Prépa-agreg 2015-2016 Université de Bordeaux

Composition 3

21 septembre 2015
durée 2h

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en (0,0).

2) Montrer que si f est différentiable en (0,0), alors sa différentielle est nulle. Conclure.

3) Jusitifier que f est différentiable au point (1,0) et calculer sa différentielle en ce point.

Exercice 2. On considère $E = M_n(\mathbb{R})$ et l'application det : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

On rappelle que le déterminant est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice.

1) Pour $1 \leq i, j \leq n$ où $t \in \mathbb{R}$ on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire n'ayant que des 0 sauf un 1 à la place (i, j).

Calculer $\det(Id + tE_{i,j})$. En déduire l'existence des dérivées dans les directions $E_{i,j}$ de la fonction determinant en l'identité.

2) En déduire que pour $H \in M_n(\mathbb{R})$

$$D\det_{Id}(H) = \text{trace(H)}.$$

3) Soit X une matrice inversible en déduire que $H \in M_n(\mathbb{R})$

$$D\det_X(H) = \text{trace}(\det(\text{X})\text{X}^{-1}\text{H}).$$

Exercice 3. Soit f fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On considère $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$P(x, y) = Ref(x + iy),\ Q(x, y) = Imf(x + iy).$$

On pose alors $F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

1) Montrer que si f est holomorphe en $z = (x+iy)$ alors F est différentiable en (x, y).

2) Montrer que si F est différentiable en (x, y) et si $DF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ alors f est holomorphe en $z = (x + iy)$.

Exercice 4. Théorème de D'Alembert

Soit P un polynôme non constant sur $\mathbb{C}$. On note P' son polynôme dérivé. Le but de l'exercice est de montrer que P admet une racine dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $P(z) = 0$.

On considère $A = \{z \in \mathbb{C}, P'(z) = 0\}$. On note $B = P(A)$ son image par P et on note $U = P(\mathbb{C}) - B$ et $V = \mathbb{C} - B$.

1) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{C}$.

2) Montrer que $|P(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$.

3) Montrer que $P(\mathbb{C})$ est une partie fermée de $\mathbb{C}$. (On considèrera $(z_n)_n$ une suite de $\mathbb{C}$ telle que $P(z_n)$ converge vers $y \in \mathbb{C}$ et on montrera que $y \in P(\mathbb{C})$).

4) Justifier que $U \subset V$ est un ensemble fermé et ouvert pour la topologie induite par V.

On rappelle que l'ensemble des ouverts pour la topologie induite par V est définie par :

$$\{\Omega \cap V,\ \Omega \text{ ouverts de } \mathbb{C}\}.$$

5) Conclure.