Composition 5

13 octobre 2014

durée 2h

Exercice 1.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (E) : $x' = f(t,x)$, où $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ avec f continue et localement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable.

1) On suppose qu'il existe deux applications continues $a, b : I \to \mathbb{R}^+$ telles que

$$\forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n \;:\; \|f(t,x)\| \leq a(t)\|x\| + b(t).$$

Soient $x : J \to \mathbb{R}^n$ une solution de (E), $t_0 \in J$ et $x_0 = x(t_0)$. Montrer que pour tout $t \in J$, on a

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} b(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} a(s)\|x(s)\| ds.$$

2) En déduire que si K est un compact de I contenant t_0, alors il existe une constante C_K telle que $\|x(t)\| \leq C_K$ pour tout $t \in J \cap K$.

Indication: On pourra poser $w(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\|x(s)\| ds$ et montrer que w vérifie une inégalité différentielle de la forme

$$w'(s) \leq \alpha(s) + \beta(s) w(s).$$

3) Montrer que les solutions maximales de (E) sont définies sur I tout entier.

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle:

$$x'(t) = \sin(x(t)). \tag{1}$$

et on considère ϕ **la** solution maximale de (1) vérifiant $\phi(0) = x_0$ avec $x_0 \in (0, \pi)$.

1) Justifier que ϕ est bien définie et que son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $0 < \phi(t) < \pi$.

3) Montrer que $\phi(t) \to \pi$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 3.

On considère l'équation différentielle:

$$y''(t) + 2y(t)^3 = 0 \tag{2}$$

et on considère ψ une solution maximale de (2) non identiquement nulle.

1) Montrer que $\psi(t)^4 + \psi'(t)^2$ est constant. En déduire que ψ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2) On dit que t_0 est un zéro de ψ si $\psi(t_0) = 0$. Montrer que les zéros de ψ sont isolés.

Indication: Pour t_0 un zéro de ψ, on pourra effectuer un développement limité à d'ordre 1 en t_0.

3) Montrer que ψ s'annule au moins une fois.

4) Montrer ψ ne possède pas de plus grand zéro.

5) Montrer que la solution ψ est périodique.
Indication: On pourra considérer 3 zéros consécutifs de ψ.

Exercice 4.

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $A : I \to M_n(\mathbb{C})$ une application continue.

Soient également $x_1, \ldots, x_n$ des solutions de l'équation différentielle $x' = A(t)x$. On pose $w(t) = \det(x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Montrer que w est solution de l'équation différentielle $w'(t) = [\operatorname{tr} A(t)]\, w(t)$ et en déduire l'expression de w.
Indication: On rappelle que la différentielle du déterminant est donnée par: $D\det_M = \operatorname{tr}(com(M)^t \cdot)$ avec $com(M)$ la comatrice de M.

2) Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}.$$