Exercice 2 :

① Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe et différentiable

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ fixés

et $t \in [0,1]$.

On a :

$$g((1-t)x + ty) \leq (1-t)g(x) + tg(y)$$

i.e :

$$g(x + t(y-x)) \leq g(x) + t(g(y) - g(x))$$

On a égalité en $t=0$, donc on peut dériver en $t=0$ et comparer les dérivées :

$$Dg_{(x)}(y-x) \leq g(y) - g(x)$$

i.e :

$$g(y) \geq g(x) + Dg_{(x)}(y-x).$$

(Réciproque : Si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$g(y) \geq g(x) + Dg_{(x)}(y-x)$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ fixés et $\lambda \in [0,1]$,

on pose $z = (1-\lambda)x + \lambda y$.

on a :

$$\begin{cases} g(x) \geq g(z) + Dg_{(z)}(x-z) & (L1) \\ g(y) \geq g(z) + Dg_{(z)}(y-z) & (L2) \end{cases}$$

$(1-\lambda)\, L_1 + \lambda\, L_2$ donc : (car $(1-\lambda)(x-z) + \lambda(y-z) = 0$)

$$(1-\lambda)\, g(x) + \lambda g(y) \geq g(z) = g((1-\lambda)x + \lambda y)$$

i.e g convexe.

② Si de plus g admet un minimum local en $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Alors $Dg_{(x_0)} = 0$

et pour tout $y \in \mathbb{R}^n$

$$g(y) \geq g(x_0) + Dg_{(x_0)}(y - x_0) = g(x_0)$$

Ce minimum est global. (pas forcément unique).