Exercice 3 : (E) $y''+y^3=0$. (Pommelet)

1) Soit y une solution maximale : y est $\mathcal{C}^2$ et on dérive.

$$\left((y')^2+\frac{y^4}{2}\right)'=2y'y''+2y^3y'$$
$$=2y'(y''+y^3)=0.$$

donc $(y'(t))^2+\frac{y^4}{2}(t)=C$, avec $C\in\mathbb{R}_+$.

2) Supposons par l'absurde que pour $t\geq t_0$, y garde un signe constant, par exemple $y(t)>0$

On a : $y''(t)=-y^3(t)<0$

donc y' est décroissante.

Or y' est bornée car $(y'(t))^2\leq C$

donc $y'(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}a$, $a\in\mathbb{R}$

Nécessairement $a=0$, car sinon y ne serait pas borné

y' tend en décroissant vers 0

donc $y'(t)>0$ pour $t\geq t_0$

donc y est croissante pour $t\geq t_0$.

On $\frac{y'^2(t)}{2} \leq C$

donc y est bornée donc y converge vers une limite
$l \geq y(t_0) > 0$.

En réinjectant dans (E), on déduit

que $y''(t) = -y^3(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -l^3 < 0$

En intégrant, on aurait que $y'(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$.
<u>contradiction</u> avec y' bornée.

De même, l'hypothèse $y(t) < 0$ pour tout $t < t_0$
conduit à une contradiction.

Ainsi y s'annule une infinité de fois et ne possède pas
de plus grand zéro

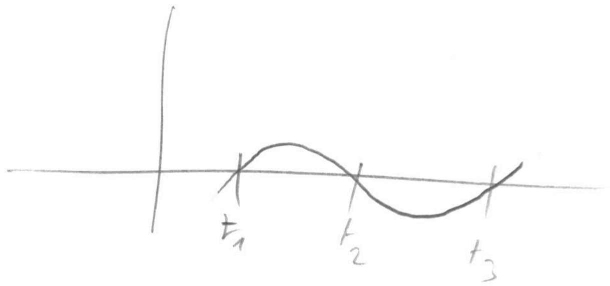
3) Les zéros de y étant isolés, sur chaque intervalle fini,
on a au plus un nombre fini de zéro de f.
On peut donc considérer 3 zéros successifs de y.

Appelons les $t_1 < t_2 < t_3$

• y change de signe lors d'un passage d'un zero

car sinon nécessaire $\begin{cases} y'(t_i) = 0 \\ y(t_i) = 0 \end{cases}$

et y serait la solution nulle.



On a donc que $y'(t_1)$ et $y'(t_3)$ sont de même signe.

Or $(y'(t_i))^2 = C$ car $y(t_i) = 0$.

donc $\begin{cases} y(t_1) = y(t_3) = 0 \\ y'(t_1) = y'(t_3) \end{cases}$

En posant $z(t) = y(t + (t_3 - t_1))$

on a $z(t_1) = y(t_3) = 0 = y(t_1)$

$z'(t_1) = y'(t_3) = y'(t_1)$

Par Cauchy-Lipschitz, on a unicité des solutions maximales

et $z(t) = y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

C'est-à-dire $y(t+T) = y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

avec $T = t_3 - t_1$

Les solutions sont donc périodiques.

(4) On considère maintenant la solution maximale y telle que $\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

(a) Puisque $y'(t)^2 + \frac{y(t)^4}{2} = C$.

on a $C = \frac{y(0)^4}{2}$

et $\frac{y(t)^4}{2} \leq C = \frac{y(0)^4}{2}$

on a $|y(t)| \leq y(0)$

(5) On pose $\Gamma = \{t > 0,\ \forall\, 0 < u < t,\ y'(u) < 0\}$.

$$y''(0) = -y(0)^3 = -y_0^3 < 0.$$

Supposons par l'absurde que $\Gamma = \emptyset$.

Alors $\exists\, u_n \searrow 0$ telle que $y'(u_n) \geq 0$.

et y étant 2 fois dérivable (même $\mathcal{C}^2$) en 0

$$y''(0) = \lim_{n \to +\infty} \frac{y'(u_n) - y'(0)}{u_n - 0} \geq 0 \qquad (\text{car } y'(0) = 0.$$

contradiction. Donc Γ est non vide.

c) On pose $T = \sup \Gamma$

Pour $t < t_0$, $y'(t)$ est donc strictement négatif

On $y'(t)^2 = C - F(y(t))$ avec $F(x) = \frac{x^4}{2}$
$= F(y(0)) - F(y(t))$

d'où $\dfrac{y'(t)}{\sqrt{F(y_0) - F(y(t))}} = -1$

(on remarque $F(y(t)) < F(y_0)$ car $|y'(t)| > 0$).

En intégrant entre 0 et t

$$\int_0^t \frac{y'(t)}{\sqrt{F(y_0) - F(y(t))}} \, dt = -t$$

en posant $u = y(t)$
$du = y'(t)\, dt$

et $$\int_{y(t)}^{y_0} \frac{1}{\sqrt{F(y_0) - F(u)}} \, du = t.$$

d) On pose $A = \displaystyle\int_{-y_0}^{y_0} \frac{1}{\sqrt{F(y_0) - F(u)}} \, du$

Cette intégrale est bien définie car $A = 2\displaystyle\int_0^{y_0} \frac{1}{\sqrt{F(y_0) - F(u)}} \, du$.

On a donc $t \leq A$

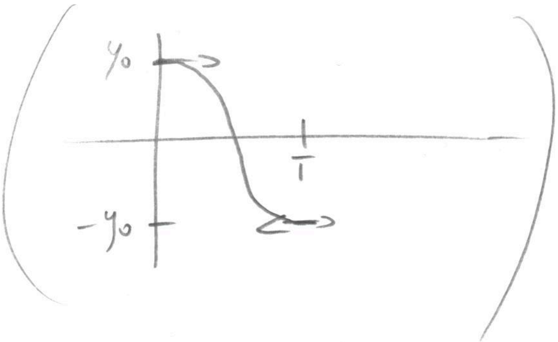
et en prenant la borne supérieure, on a :

$T \leq A < +\infty$

Ensuite par continuité, on $y'(T) = 0$

d'où : $|y(T)| = |y(0)|$

et $y(T) = -y_0$



D'où $T = \displaystyle\int_{-y_0}^{y_0} \frac{1}{\sqrt{F(y_0) - F(u)}}\, du$

et $T = A$

(e) Posons $z(t) = -y(t+T)$

On a bien $z''(t) + z^3(t) = (E)$

De plus $z(0) = -y(T) = -(-y_0) = y_0$

et $z'(0) = -y'(T) = 0$.

Par Cauchy-Lipschitz, $z(t) = y(t)$.

i.e $y(t+T) = -y(t)$

et donc $y(t+2T) = -y(t+T) = y(t)$

donc y est $2T$-périodique.

c'est-à-dire $\boxed{4 \displaystyle\int_0^{y_0} \frac{1}{\sqrt{F(y_0) - F(u)}}\, du}$ -périodique.