Corrigé : Equations différentielles

Exercice 1. (Gourdon)

1) (E) $\quad x'' + q(t)\, x = 0$

(E) est une équation linéaire du 2ème ordre

Soit φ une solution de (E), on suppose que $|\varphi(t)| \leq M$, $t \geq 0$. φ est C^2

d'où $\varphi'(t_2) - \varphi'(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \varphi''(s)\, ds$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} q(s)\, \varphi(s)\, ds$$

et pour $t_0 \leq t_1 \leq t_2$

$$|\varphi'(t_2) - \varphi'(t_1)| \leq M \int_{t_1}^{t_2} |q(s)|\, ds.$$

$$\leq M \int_{t_0}^{+\infty} |q(s)|\, ds.$$

$\int_{t_0}^{+\infty} |q(s)|\, ds \xrightarrow[t_0 \to +\infty]{} 0$ car $\int_0^{+\infty} |q(s)|\, ds < +\infty$.

Soit $\epsilon > 0$, $\exists\, A > 0$ tel que si $t_2, t_1 \geq A$

$$|\varphi'(t_2) - \varphi'(t_1)| \leq \epsilon.$$

On déduit de ce critère de Cauchy que φ' admet une limite l en $+\infty$.

Nécessairement $l = 0$, car sinon φ ne serait pas bornée.

2) On pose $w(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)$, w est $\mathcal{C}^1$

et on a : $w'(t) = \varphi_1(t)\varphi_2''(t) - \varphi_1''(t)\varphi_2(t)$

$$= -q(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t) + q(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)$$

$$= 0$$

donc w est constant sur $\mathbb{R}$.

3) On suppose que toutes les solutions (maximales) sont bornées.

Par le théorème des bouts, elles sont donc globales (définies sur $[0, +\infty[$).

Pour toutes solutions φ_1 et φ_2, on aurait

$$w(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Or w est constant, donc $w(t) = 0$.

Or par Cauchy-Lipschitz, il existe φ_1, φ_2 solution maximale

avec $\begin{cases}\varphi_1(0) = 1\\ \varphi_1'(0) = 0\end{cases}$ et $\begin{cases}\varphi_2(0) = 0\\ \varphi_2'(0) = 1\end{cases}$.

On a alors que leur Wronskien associé

vaut $w(0) = 1$. <u>contradiction</u>

Donc il existe des solutions non bornées.

(Rq : On peut montrer (E) étant linéaire, l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 2).

Exercice 2 : (E) $y'(t) = y^2(t) + \alpha(t)$ sur $[0, +\infty[$ (3)

On suppose que z_0 est une solution globale strictement positive.

1) (E) est une équation différentielle du 1er ordre et $\mathbb{R}$.

$y'(t) = f(t, y(t))$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$

$f(t,x) = \alpha(t) + x^2$

donc est localement Lipschitzienne par rapport à sa 2ème variable.

Par Cauchy-Lipschitz, les solutions ne se croisent pas

donc si $z_1(0) > z_0(0)$

on a $z_1(t) > z_0(t)$ partout où z_1 est défini si $t \in [0, b[$.

2) Posons $u(t) = z_1(t) - z_0(t)$

$$u'(t) = z_1^2(t) + \alpha(t) - (z_0^2(t) + \alpha(t))$$

$$= z_1^2(t) - z_0^2(t)$$

$$= \underbrace{(z_1(t) + z_0(t))}_{\geq (z_1 - z_0)(t)} \; (z_1(t) - z_0(t)) \quad \text{car} \quad z_1(t) \geq z_0(t) \geq 0.$$

donc $u'(t) \geq u^2(t) > 0$ pour $t \in [0, b[$.

On a donc $\dfrac{u'(t)}{u^2(t)} \geq 1$ pour tout $t \in [0, b[$

et en intégrant entre 0 et t

$$\left[-\frac{1}{u(s)} \right]_0^t \geq t$$

$$\frac{1}{u(0)} - \frac{1}{u(t)} \geq t \quad \text{avec } u(0) = z_1(0) - z_0(0) = b - a > 0.$$

d'où : $\frac{1}{u(t)} \leq \frac{1}{u(0)} - t$

et $u(t) \geq \frac{1}{\frac{1}{u(0)} - t}$ pour tout $t \in [0, \beta[$.

La quantité $\frac{1}{\frac{1}{u(0)} - t} \to +\infty$ lorsque $t \to \frac{1}{u(0)}$.

donc nécessairement $\beta \leq \frac{1}{u(0)}$.

z_1 n'est donc pas globale

3) Soit $0 < c < a$ et z_2 la solution maximale telle que $z_2(0) = c$. Elle est définie sur $[0, \gamma[$.

Supposons par l'absurde que z_2 ne s'annule pas. On aurait alors (par Cauchy-Lipschitz) que
$0 < z_2(t) \leq z_0(t)$ pour tout $t \in [0, \gamma[$.

Si $\gamma < +\infty$, par le théorème des bouts, z_2 pourrait être prolongée strictement. Donc $\gamma = +\infty$ et z_2 est globale.
On aurait donc z_2 solution globale positive et $z_1(0) > z_2(0)$, d'où par (1), z_1 ne serait pas globale.
contradiction. Donc z_2 s'annule.

Rq : penser au tracé des solutions de $x' = x^2(t) - t$ fait en classe.