## Transformation de Fourier et convolution

**Exercice 1.** Calculer la trasformée de Fourier de la gaussienne $\exp(-\alpha x^2)$

*Indication*: On pourra dériver sous les signe intégral puis faire une intégration par parties.

**Exercice 2.** Montrer que $L^1(\mathbb{R})$ muni du produit de convolution est une algèbre qui ne possède pas d'unité.

**Exercice 3.** a) Montrer que l'équation $f * f = f$ n'admet pas de solution non nulles dans $L^1(\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'équation $f * f = f$ admet une infinité de solutions dans $L^2$.

**Exercice 4.** Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Montrer que $f * g \in L^\infty$ et que $f * g$ est continue.

*Indication:* On commencera par le cas où $f$ et $g$ sont des indicatrices d'un segment, puis on utilisera un résultat de densité.

**Exercice 5.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $f$ est impaire si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\int_R f(x)e^{itx^2}dx = 0.$$

**Exercice 6.** (Espace de Wiener)

On note $W$ l'ensemble des fonctions $L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est aussi dans $L^1(\mathbb{R})$

1) Montrer que si $f \in W$ alors $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. En déduire que pout tout $p \geq 1$, $f \in L^p(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $f \in W \Leftrightarrow \hat{f} \in W$.

3) Montrer que si $f, g \in W$ alors $f * g$ et $fg$ appartiennent aussi à $W$.

4) Montrer que $N(f) = \|f\|_1 + \|\hat{f}\|_1$ définit une norme sur $W$ et que $W$ est complet pour $N$.

5) Montrer que $W$ est dense dans $L^p$ pour $1 \leq p < +\infty$.

*Indication*: On pourra montrer que l'espace de Schwartz est inclus dans $W$.

6) Montrer que $W$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini).

**Exercice 7.** (Non surjectivité de la transformation de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$).

1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ impaire. Montrer que

$$\hat{f}(t) = -(2i) \int_{x=0}^{+\infty} f(x) \sin(2\pi x t) dx.$$

2) On pose

$$\phi(x) = \int_{u=x}^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

Montrer que $\phi \in \mathcal{C}_0([0, \infty)$ .

3) Soit $R \geq 1$. Montrer (par Fubini (en utilisant que $\phi$ est bornée) et avec un changement de variable que

$$\int_{t=1}^{R} \frac{\hat{f}(t)}{t} dt = -(2i) \int_{u=0}^{+\infty} \left( \int_{t=1}^{R} \frac{\sin(t)}{t} dt \right) f(u) du.$$

En déduire avec le théorème de convergence dominée que

$$\int_{t=1}^{R} \frac{\hat{f}(t)}{t} dt \to_{R \to +\infty} -2i \int_{0}^{\infty} f(x) \phi(2\pi x) dx.$$

4) Montrer que si une fonction impaire $g$ est la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f$ est aussi impaire.

5) On pose

$$g(t) = \frac{\arctan t}{\ln(1 + t^2)}.$$

Montrer que $g$ est impaire, appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ mais n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$.

**Exercice 8.** On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schartz des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.

1) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et que la transformation de Fourier préserve $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ( et est donc un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui même.)

2) Montrer que si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $f * g$ et $fg$ appartiennent aussi à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.