Leçon: Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

Exercice 1. L'ensemble des polynômes dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est-il dense?

Indication: On pourra montrer qu'une limite uniforme de polynômes est encore un polynôme.

Exercice 2. Soit $\bar{\mathbb{D}}$ le disque unité fermé.L'ensemble des polynômes dans $\mathcal{C}(\bar{\mathbb{D}},\mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est-il dense?

Indication: On pourra montrer qu'une limite uniforme de fonctions holomorphes est encore holomorphe sur K compact de $\mathbb{D}$.

Exercice 3. (Polynômes de Bernstein) (ZQ)

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ une fonction continue et soit ω son module de contiuité uniforme:

$$\omega(h)=\sup\{|f(x)-f(y)|,|x-y|\leq h\},h>0.$$

On note $B_n(f,x)=B_n(x)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$ le n-ème polynôme de Bernstein associé à f.

1) Soit $x\in[0,1]$ fixé. On considère $X_1,\dots,X_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre x. Montrer que

$$B_n(x)=\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$$

avec $S_n=X_1+\cdots+X_n$.

2) En utilisant l'inégalité de Bienaimé Tchebychev, montrer que pour $\delta>0$,

$$|f(x)-B_n(x)|\leq\omega(\delta)+\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

En déduire que B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

3) Si f est Lipschitzienne, optimiser en δ pour trouver une vitesse de convergence de B_n vers f. Cette vitesse n'est en fait pas optimale.

4) Montrer que pour $\lambda\geq 0$, $\omega(\lambda h)\leq([\lambda]+1)\omega(h)$ puis que

$$|f(x)-B_n(x)|\leq\mathbb{E}\left[\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)\right]\leq\left(1+\sqrt{n}\mathbb{E}\left[\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right]\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et

$$\|f-B_n\|_\infty\leq\frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

5) Prenons maintenant $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Que vaut $\omega_f(h)$?
Montrer que

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2n}\mathbb{E}\left[|\xi_1 + \cdots + \xi_n|\right];$$

avec $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher de paramètre 1/2. En utilisant l'inégalité de Khintchine, montrer que

$$\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{1}{2\sqrt{2n}}\mathbb{E}\left[|\xi_1 + \cdots + \xi_n|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Remarque: Les polynômes de Jackson conduisent à une approximation en $\omega(\frac{1}{n})$ (voir Demailly).

Exercice 4. (Moisan-Vernotte-Tosel) (Une curiosité : séries entières universelles)

1 Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$. Soient également $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un polynôme R tel que

$$\forall x \in [0;1] \quad |f(x) - x^N R(x)| \leq \varepsilon\,.$$

Indication: Pour $\varepsilon > 0$, on prendra $\alpha > 0$ tel que $|f(x)| \leq \varepsilon$ si $0 \leq x \leq \alpha$, puis on approchera

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(\alpha)}{\alpha^n} & \text{si } \; 0 \leq x \leq \alpha \\ \frac{f(x)}{x^n} & \text{si } \; \alpha \leq x \leq 1 \end{cases}$$

uniformément par des polynômes.
2 Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients réels, avec $P_n(0) = 0$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

(i) $\mathrm{val}(Q_n) > \deg(Q_{n-1})$ si $n \geq 1$;
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1] \quad |P_n(x) - \sum_0^n Q_k(x)| \leq 2^{-n}$.

3 Montrer qu'il existe une série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ vérifiant la propriété suivante: pour toute fonction continue $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telle que la suite de sommes partielles $S_{n_k}(x) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n x^n$ converge uniformément vers f.

Exercice 5. (Alessandri-Exbrayat) (suites équiréparties)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $[0;1]$ est *équirépartie* si pour tout intervalle $[a;b] \subset [0;1]$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{card}\,\{i \in \{1;\ldots;n\};\ u_i \in [a;b]\} = b - a\,.$$

A Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $[0;1]$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Soit maintenant $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Montrer que dans chacun des cas suivants, on peut conclure que $f \in \mathcal{E}$.

a f est limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathcal{E}$.

b f est limite simple d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}$ et d'une suite décroissante déléments de $\mathcal{E}$.

B Soit $(u_n) \subset \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $(\{u_n\}) \subset [0,1]$ est équirépartie (avec $\{u_n\}$, la partie fractionnaire de u_n).

(ii) Pour toute fonction continue par morceaux 1-périodique $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)\, dt\,.$$

(ii') Pour toute fonction continue 1-périodique $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)\, dt\,.$$

(iii) Pour tout entier $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi m u_k} = 0\,.$$

Indication: On motrera que: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (ii') \Rightarrow (i)$ puis que $(ii') \Leftrightarrow (iii)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ par limite uniforme de fonction en escaliers.

$(ii) \Rightarrow (ii')$ clair.

$(ii') \Rightarrow (i)$ On considère $0 \leq a < b \leq 1$ et $\phi_{a,b}$ la fonction 1-périodique coïncidant avec $\mathbf{1}_{[a,b]}$ sur $[0,1]$. Pour $\varepsilon > 0$, on encadre $f_- \leq \phi_{a,b} \leq f_+$ avec f_- et f_+ linéaire par morceaux 1-périodiques de telles sorte que $\int_0^1 f_+(x) - f_-(x)dx \leq \varepsilon$.

$(ii') \Rightarrow (iii)$ clair.

$(iii) \Rightarrow (ii')$ On utilise la densité des polynômes trigonométriques dans l'ensemble des fonctions continues 1-périodiques pour la norme uniforme (Fejer, Weierstrass).

C Soit $\theta \in [0;1]$. Montrer que la suite $(\{n\theta\})_{n\geq 1}$ est équirépartie si et seulement si $\theta \notin \mathbb{Q}$.