Leçon: Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Exercice 1. Montrer qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Exercice 2. Sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, on considère les normes: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

1) Représenter leur boule unité respective dans $\mathbb{R}^2$.

2) On sait que ces normes sont équivalentes: donner les meilleures encadrements possibles entre ces 3 normes (en fonction de la dimension n).

3) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que

$$\|A\|_{1,1} = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\right), \ \|A\|_{\infty,\infty} = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right)$$

b) Montrer que si A est hermitienne (i.e. $A^* = A$),

$$\|A\|_{2,2} = \rho(A)$$

avec $\rho(A)$ le rayon spectral de A, $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C} \text{ valeur propre de } A\}$.
c) Montrer que dans le cas général:

$$\|A\|_{2,2} = \rho(A^*A)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 3. Soit $B \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que B est la boule unité d'une norme si et seulement si B est compacte, symétrique , convexe et d'intérieur non vide.

Indication: On poura considérer $\|x\| := \inf\{\lambda > 0, \frac{x}{\lambda} \in B\}$.

Exercice 4. Soit E un espace de Banach. Montrer que $GL(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}_c(E)$.

Indication: On poura commencer par montrer que si $\|u\| < 1$, $Id + u$ est inversible dans $\mathcal{L}_c(E)$.

Exercice 5. Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit les normes suivantes: pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$,

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|, \ \|P\|_2 = \left(\sum_{k=0}^n |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \ \|P\|_\infty = \sup_{0\leq k\leq n} |a_k|$$

1) Montrer que $\|P\|_\infty \leq \|P\|_2 \leq \|P\|_1$ mais que ces normes ne sont pas équivalentes.

2) On considère l'endomorphisme $P \to P'$ dans $\mathbb{R}[X]$. Est-il continu pour l'une de ces normes.

3) On considère la forme linéaire ϕ $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par $P \mapsto P(c)$ est-elle continue pour l'une de ces normes. On pourra séparer les cas $|c| \leq 1$ et $|c| > 1$. Dans le cas $|c| \leq 1$, calculer la norme $|||\phi|||$. Est-elle atteinte?

Exercice 6. On considère $E = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt,\ \|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},\ \|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f(t)|.$$

Monter que ce sont bien des normes sur E. Montrer qu'elles ne sont pas comparables. Qu'en est-il lorsque l'on remplace $\mathbb{R}$ par $I = [0, 1]$.?

Exercice 7. (Nawfal El Hage Hassan) Soit $E = \mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application linéaire $T : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$T(f) = \int_0^1 f(u)du - \int_1^2 f(u)du.$$

Montrer que $\|T\| = 2$ mais que cette norme n'est pas atteinte.

Exercice 8. a) On considère l'application linéaire T de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même définie par $T(P) = P'$ avec P' le polynôme dérivé de P.

Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle T est continue.

b) Même question pour S l'application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même définie par $S(X^n) = nX^n$, $n \geq 0$.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel normé. Soit S et T 2 applications linéaires sur E telles que $ST - TS = Id$.

Montrer que pour $n \geq 0$, $S^nT - TS^n = nS^{n-1}$.

En déduire que S et T ne peuvent pas être toutes les 2 continues.

Exercice 10. Inégalités de Khintchine (Zuily-Queffelec) Le but de l'exercice va être de construire 2 normes notées $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifient pour tout $a \in \mathbb{R}^n$,

$$\|a\|_1 \leq \|a\|_2 \leq c\|a\|_1$$

avec c une constante qui ne dépend pas de la dimension n.

On commence par s'intéresser au cube discret $C_n = \{-1, +1\}^n$ muni de la mesure uniforme μ_n. Pour $n \geq 1$, on définit alors pour $a \in \mathbb{R}^n$ les normes:

$$\|a\|_1 := \sum_{\varepsilon \in C_n} \left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i \right| \mu_n(\varepsilon)$$

et

$$\|a\|_2 := \left(\sum_{\varepsilon \in C_n} \left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i \right|^2 \mu_n(\varepsilon) \right)^{\frac{1}{2}}$$

avec $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in C_n = \{-1, +1\}^n$ et $\mu_n(\varepsilon) = \frac{1}{2^n}$.

Remarque: On peut considérer que cette mesure uniforme sur le cube C_n est elle-même obtenue comme la mesure image par n variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

$$\begin{array}{ccc} (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) & \rightarrow & (C_n, \mathcal{P}(C_n), \mu_n) \\ \omega & \mapsto & (X_1(\omega), \ldots X_n(\omega)) \end{array}$$

avec $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher (c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_i = +1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$.)

Il est même possible de proposer un modèle explicite pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ surlequel on peut construire toutes les variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$ à la fois.

On peut prendre $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ la tribu des boréliens sur $[0, 1]$ et $\mathbb{P}$ la mesure de lebesgue sur $[0, 1]$ et définir pour $\omega \in \Omega = [0, 1]$,

$$X_i(\omega) = signe \left[\sin(2^j \pi \omega) \right].$$

On remarque donc que

$$\|a\|_1 = \mathbb{E}[\,|f|\,] \text{ et } \|a\|_2 = \mathbb{E}[\,|f|^2\,]^{\frac{1}{2}}$$

avec

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k(\omega)$$

qui appartient à l'espace vectoriel F_n de dimension n engendré par les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$.

On a clairement

$$\mathbb{E}[\,|f|\,] \leq \mathbb{E}[\,|f|^2\,]^{\frac{1}{2}}$$

Le but de l'exercice est maintenant de montrer que pour $f \in F_n$ on a

$$\mathbb{E}[\,|f|^2\,]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{e}\, \mathbb{E}[\,|f|\,].$$

1) Montrer que pour $f = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$, on a

$$\mathbb{E}[\,|f|^2\,] = \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

2) Monter que si $g \in L^\infty(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et si $g \neq 0$,

$$\mathbb{E}[\,|f|\,] \geq \frac{|\mathbb{E}[fg]|}{\|g\|_\infty}.$$

3) On va donc essayer de minorer $\mathbb{E}[\,|f|\,]$ par "dualité" en cherchant g telle que $\|g\|_\infty$ soit "petit" et $|\mathbb{E}[fg]|$ "grand" . Posons

$$g(\omega) = \prod_{k=1}^{n} (1 + i a_k X_k(\omega)).$$

a) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega = [0,1]$,

$$|g(\omega)|^2 \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right).$$

b) Montrer que pour tout $1 \leq j \leq n$

$$E[gX_j] = i a_j,$$

puis que: $|\mathbb{E}[fg]| = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \mathbb{E}[\,|f|^2\,]$.

c) En déduire que

$$\mathbb{E}[\,|f|\,] \geq \frac{\mathbb{E}\left[|f|^2\right]}{\exp\left(\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[|f|^2\right]\right)}.$$

d) Conclure pour $\mathbb{E}\left[|f|^2\right] = 1$ puis dans le cas général.

Remarque: la constante $\sqrt{e}$ n'est pas optimale. La constante optimale est $\sqrt{2}$.