Université de Bordeaux 2015-2016
8 avril 2016

Algèbre 1 : Test 2

Exercice 1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits AB et BA.

Exercice 2.

1) Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donner leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Rappeler la définition du rang, de l'image et du noyau d'une matrice.

3) Donner le rang ainsi que la dimension de l'image et du noyau de A, B, C.

4) Préciser finalement l'image et le noyau de A, B et C.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$,.

On considère J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les entrées sont des 1. Pour $n = 4$,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quel est le rang de la matrice J.

2) Calculer J^2.

3) Soient $a, b \in R$. Calculer le produit de matrices $(I + aJ)(I + bJ)$ avec I la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4) En déduire que si $a \neq -\frac{1}{n}$, la matrice $(I_n + aJ)$ est inversible et donner son inverse.

5) Montrer que si $a = -\frac{1}{n}$, la somme des coefficients de chaque ligne de $(I_n + aJ)$ est nulle. En déduire un vecteur non-nul appartenant à $\ker(J)$.

La matrice $(I_n + aJ)$ est-elle alors inversible ?

Remarque : Si on est pas à l'aise on pourra faire l'exercice avec $n = 4$.