CPP-la prépa des INP 2 ème année
mardi 12 novembre 2013

Examen de Probabilités

Exercice 1. (6 points environ)
Un joueur dispose d'un dé et d'une pièce. Le dé est équilibré et la pièce a une probabilité p ($0 < p < 1$) de tomber sur pile. Le joueur lance d'abord le dé, puis lance la pièce autant de fois que le résutlat du dé. Il compte enfin le nombre de piles obtenu au cours des lancers.

Les résultats de chaque lancer sont indépendants.

On note $q = 1 - p$. On note également D la variable aléatoire correspondant à la valeur du dé et X celle correspondant au nombre de piles obtenus à la fin du jeu.

1. Soit $(i, j) \in \{1, \ldots, 6\}^2$. Que vaut $\mathbb{P}(X = j|D = i)$?
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 6)$ et $\mathbb{P}(X = 4)$.
3. Montrer que
$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{q}{6}\left(\frac{1 - q^6}{1 - q}\right).$$
4. Sachant que l'on n'a obtenu aucun pile au cours du jeu, quelle était la probabilité que le résultat du dé était 1? Evaluer cette quantité quand $p = q = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. *Quelques aspects de la loi exponentielle.*
Les 3 parties sont indépendantes.

On rappelle que la densité d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est donnée par:
$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

Partie A: *absence de mémoire* (4 points environ)

1. Soit A et B deux évènements. Rappeler la définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B: $\mathbb{P}(A|B)$.
2. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X \geq t)$ pour $t \geq 0$ et $t < 0$.

3. Soit maintenant $t > s \geq 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \geq t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t - s).$$

Partie B: *minimum de 2 lois exponentielles* (5 points environ)
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même paramètre $\lambda > 0$. On note $Z = min(X, Y)$.

1. Ecrire l'évènement $\{Z \geq t\}$ en fonction des évènements $\{X \geq t\}$ et $\{Y \geq t\}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(Z \geq t)$ pour $t \geq 0$ et $t < 0$.
3. En déduire la fonction de répartition de Z et conclure que Z suit une loi exponentielldе paramètre 2λ.
4. Plus généralement, on considère $X_1 \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même paramètre $\lambda > 0$ et on note $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Calculer la fonction de répartition de Z_n puis montrer que Z_n converge en loi vers 0.

Partie C: *somme de 2 lois exponentielle* (5 points environ)
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On note $S = X + Y$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ et $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X + Y]$ et $\text{Var}(X + Y)$.
3. En déduire que la variable aléatoire $S = X + Y$ ne fait pas partie de la famille des lois exponentielles.