CPP - la prépa des INP (1 ème année). Bordeaux, 10/03/2014.

Probabilités discrètes: DS 2. Corrigé.

durée 1h- la calculatrice Casio collège est autorisée.
On justifiera proprement tous les calculs.
Le barême est indicatif.

EXERCICE 1. (4 points) On effectue 3 tirages avec remise dans une urne composée de 5 boules numérotées de 1 à 5.

1) Calculer la probabilité que toutes les boules tirées aient un numéro pair. On appelle A cet évènement. Les 3 tirages se font avec remise. On considère donc qu'on connaît le résultat de chaque tirage. L' univers est alors:

$$\Omega = \{w = (w_1, w_{2,3}), w_1, w_2, w_3 \in \{1,2,3,4,5\}\}.$$

Son cardinal est 5^3. La probabilité sur Ω est la probabilité uniforme. Il y a 2 boules paires dans l'urne donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2^3}{5^3} = 0,064.$$

2) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule portant un numéro pair. On appelle B cet évènement. Il est plus facile de calculer la probabilté de B^c. En effet, B^c correspond à l'évènement: "toutes les boules tirées sont impaires". Il y a 3 boules impaires dans l'urne donc:

$$\mathbb{P}(B^c) = \frac{3^3}{5^3} \text{ et } \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \frac{3^3}{5^3} = 0,784.$$

EXERCICE 2. (2 points) Dans un jeu de 52 cartes, on tire au hasard 5 cartes sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir un carré (c'est-à-dire d'avoir les 4 cartes d'une même valeur (As, Roi, ...) et une cinquième carte d'une valeur forcément différente). On appele C cet évènement. On choisit ici de considérer que les tirages sont indiscernables (on tire toutes les cartes à la fois). On a donc, avec $\mathscr{C}$ l'ensemble des cartes:

$$\Omega = \{w = \{w_1, w_{2,3}, w_4, w_5\}, w_i \in \mathscr{C} \text{ et } w_i \neq w_j \text{ si } i \neq j, 1 \leq i, j \leq 5\}.$$

Le cardnal de Ω est $|\Omega| = \binom{52}{5}$ et Ω est muni de la probabilité uniforme. Chaque "carré" est determiné par sa valeur et sa carte restante. Il y a donc 13×48 carrés, d' où:

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{13 \times 48 \times 5!}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} \simeq 2,4 \times 10^{-4}.$$

EXERCICE 3. (7 points) Soient X et Y deux variables aléatoires telles que la loi du couple (X,Y) est donnée par le tableau suivant:

$X\backslash Y$	0	1	2	3
1	$\mathbf{0,1}$	$0,2$	$0,1$	$0,1$
2	$0,1$	0	0	$0,1$
3	$0,1$	0	$0,1$	$0,1$

Pour lire le tableau, on a par exemple $\mathbb{P}(\{X=2\}\cap\{Y=0\}) = \mathbf{0,1}$.

1) Ecrire l'évènement $X=Y$ à l'aide des évènements $\{X=i\}\cap\{Y=j\}$, puis calculer la probabilité $\mathbb{P}(\{X=Y\})$.

$$\{X=Y\} = \bigcup_{i=1,2,3} (\{X=i\}\cap\{Y=i\}).$$

L'union est disjointe donc:

$$\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{i=1,2,3} \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=i\}) = 0,2+0+0,1 = 0,3.$$

2) Déterminer la loi de X puis calculer l'espérance et la variance de X. X est à valeurs dans l'ensemble $\{1,2,3\}$. Pour déterminer la loi de X, il faut calculer $\mathbb{P}(X=i)$ pour $i=1,2,3$. On a

$$\mathbb{P}(X=1) = \sum_{j=0}^{3} \mathbb{P}(\{X=1\}\cap\{Y=j\}) = 0,1+0,2+0,1+0,1 = 0,5$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \sum_{j=0}^{3} \mathbb{P}(\{X=2\}\cap\{Y=j\}) = 0,1+0+0+0,1 = 0,2$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \sum_{j=0}^{3} \mathbb{P}(\{X=3\}\cap\{Y=j\}) = 0,1+0+0,1+0,1 = 0,3.$$

3) Calculer l'espérance et la variance de X.

$$E[X] = 1\mathbb{P}(X=1)+2\mathbb{P}(X=2)+3\mathbb{P}(X=3) = 1\times 0,5+2\times 0,2+3\times 0,3 = 1,8.$$

$$E[X^2] = 1^2\mathbb{P}(X=1)+2^2\mathbb{P}(X=2)+3^2\mathbb{P}(X=3) = 1\times 0,5+4\times 0,2+9\times 0,3 = .$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2]-E[X]^2 = 4-1,8^2 = 0,76.$$

4) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
Non, on a par exemple:

$$0 = \mathbb{P}(\{X=2\}\cap\{Y=1\}) \neq \mathbb{P}(X=2)\cdot\mathbb{P}(Y=1).$$

5) Calculer $\mathbb{P}(Y=i|X=3)$ pour $i=0,1,2,3$. Par définition, on a:

$$\mathbb{P}(Y=0|X=3) = \frac{\mathbb{P}(\{X=3\}\cap\{Y=0\})}{\mathbb{P}(X=3)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}.$$

De même:

$$\mathbb{P}(Y=1|X=3) = 0, \mathbb{P}(Y=2|X=3) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(Y=3|X=3) = \frac{1}{3}.$$

EXERCICE 4. (4 points) Un vin Chilien et un Pessac-Léognan sont servis à cinq goûteurs "à l'aveugle", Un vin donné est choisi avec probabilité $1/2$ et le même vin est servi aux cinq goûteurs. On suppose que les réponses des goûteurs sont indépendantes et que chaque goûteur reconnaît bien le vin servi avec probabilité $3/4$.

1) Sachant que les 5 goûteurs ont trouvé que le vin était un Bordeaux, quelle est la probabilité que ce soit le vin Chilien qui ait été servi.

On note B l'évènement: "le vin servi est un bordeaux" et C l'évènement: " le vin servi est un chilien". On note A l'évenement: "le 5 goûteurs disent que le vin est un bordeaux". On cherche à calculer $\mathbb{P}(C|A)$. On va utiliser la formule de Bayes.

On calule d'abord les probabilités conditionnelles: $\mathbb{P}(A|B)$ et $\mathbb{P}(A|C)$. On a

$$\mathbb{P}(A|B) = \left(\frac{3}{4}\right)^5 \text{ et } \mathbb{P}(A|C) = \left(\frac{1}{4}\right)^5.$$

En effet, dans le premier cas les 5 goûteurs ont raison et dans le deuxième, les gouteurs se trompent. On a aussi $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$. Par la formule de Bayes (et celle des probabilités totales), on obtient:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C|A) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^5\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^5\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^5+1} = \frac{1}{244} \simeq 4,1\times 10^{-3}.\end{aligned}$$

2) On suppose maintenant que seulement 3 goûteurs sur 5 ont trouvé que le vin était un Bordeaux, quelle est la probabilité que ce soit le vin Chilien qui ait été servi.

On note A' l'évènement: " 3 goûteurs parmi 5 disent que le vin est un bodeaux". On va procéder comme précédemment: la seule chose qui change est le calcule de $\mathbb{P}(A|B)$ et $\mathbb{P}(A|C)$. On est axactement dans la situation de la loi binomiale de paramètr $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$. On a donc:

$$\mathbb{P}(A'|B) = \binom{5}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2 \text{ et } \mathbb{P}(A'|C) = \binom{5}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

On remarque que: $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$, donc après simplification:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C|A') &= \frac{\mathbb{P}(A'|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(A'|B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A'|C)\mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{3^2}{3^3+3^2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

EXERCICE 5. (2 points) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \operatorname{Var}(X_1)$. On note: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire suivante:

$$Y_n := \left(\frac{S_n}{n} - m\right).$$

Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}[S_n] = n\mathbb{E}[X_1] = nm$ et

$$\mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[S_n] - m = 0.$$

Les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, donc $\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = n\sigma^2$. D'où:

$$\mathrm{Var}(Y_n) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(S_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$