Exercice 1 : (corrigé succinct)

1) $\circ$ $M_1 = \begin{cases} M_0 + C_1 & \text{si } X_1 = 1 \\ M_0 - C_1 & \text{si } X_1 = -1 \end{cases}$

d'où $M_1 = M_0 + C_1 X_1$.

$\circ$ $C_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } X_1 = 1 \\ 3C_1 & \text{si } X_1 = -1 \end{cases}$

d'où $C_2 = 1 \times \mathbb{1}_{\{X_1 = 1\}} + 3 C_1 \mathbb{1}_{\{X_1 = -1\}}$

$\circ$ De même : $M_2 = M_1 + C_2 X_2 = M_0 + C_1 X_1 + C_2 X_2$

2) $C_{n+1} = \mathbb{1}_{\{X_n = 1\}} + 3 C_n \mathbb{1}_{\{X_n = -1\}}$.

3) Montrons par récurrence que C_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \geq 0$.

$\circ$ $n = 0$: $C_1 = 1$ est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

$\circ$ Soit $n \geq 0$. Supposons que C_{n+1} est $\mathcal{F}_n$ mesurable
Et montrons que C_{n+2} est $\mathcal{F}_{n+1}$-mesurable

$$C_{n+2} = \underbrace{\mathbb{1}_{\{X_{n+1} = 1\}}}_{\mathcal{F}_{n+1}\text{-mesurable}} + 3 \underbrace{C_{n+1}}_{\mathcal{F}_n\text{-mesurable}} \underbrace{\mathbb{1}_{\{X_{n+1} = -1\}}}_{\mathcal{F}_{n+1}\text{ mesurable}}$$

donc C_{n+2} est bien $\mathcal{F}_{n+1}$ mesurable.

$\circ$ $(C_n)_{n \geq 1}$ est donc prévisible.

4) • On a : $M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k X_k$

donc M_n est bien $\mathcal{F}_n$ - mesurable.

• Soit $n \geq 0$, $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n]$

$$= \mathbb{E}[\underbrace{M_n}_{\mathcal{F}_n\text{-mesurable}} + \underbrace{C_{n+1}}_{\mathcal{F}_n\text{-mesurable}} X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$$

$$= M_n + C_{n+1} \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$$ indépendant de $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$

$$= M_n + C_{n+1} \underbrace{\mathbb{E}[X_{n+1}]}_{=0}$$

$$= M_n$$

Donc $(M_n)_{n \geq 0}$ est bien une martingale.

5) Par conséquent $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] = 1$.