Probabilités DM2

Eléments de correction

Exercice 1. Contre-exemple aux théorèmes des moments.

Partie A) Soit X une variable aléatoire de loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$. On note ϕ_X la fonction caractéristique de X.
1) a) *Montrer que ϕ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que ϕ_X vérifie l'équation différentielle*

$$y'(t) + ty(t) = 0.$$

Résoudre l'équation différentielle puis en déduire que pour tout réel t, $\phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

On va appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
— $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En effet, $|e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}| = e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
— $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $t \mapsto ixe^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
— $\forall t \in \mathbb{R}$ $\left|ixe^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}\right| = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $x \mapsto |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
ϕ_X est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi'_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} ixe^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Il reste à faire une intégration par parties pour vérifier que ϕ_X est bien solution de l'équation différentielle.
Les fonctions $x \mapsto ie^{itx}$ et $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} ie^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ ainsi que $\lim\limits_{x\to-\infty} ie^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, d'où

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sqrt{2\pi}\phi'_X(t) = \int_{\mathbb{R}} ixe^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \left[-ie^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} te^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -\sqrt{2\pi}t\phi_X(t)$$

ϕ_X vérifie l'équation différentielle $y'(t) + ty(t) = 0$.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-\frac{t^2}{2}}$ avec C réel. On sait que $\phi_X(0) = 1$ donc $C = 1$ et $\phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

b) *Montrer que X a des moments de tous ordres donnés par :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbf{E}(X^{2k+1}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k.k!}.$$

On sait que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^j e^{-\frac{x^2}{2}}$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, donc X a des moments de tous ordres et de plus (en appliquant à nouveau le théorème de dérivation des intégrales à paramètre)

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad E(X^j) = (-i)^j \phi_X^{(j)}(0).$$

Nous savons que $\phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ qui est une fonction développable en série entière en 0, de rayon de convergence infini, d'où

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(-\frac{t^2}{2})^k.$$

Avec l'unicité du développement en série entière, nous avons que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad (j = 2k+1 \Rightarrow \frac{\phi_X^{(j)}}{j!}(0) = 0) \text{ et } (j = 2k \Rightarrow \frac{\phi_X^{(j)}}{j!}(0) = \frac{1}{k!}(-\frac{1}{2})^k$$

Soit

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad E(X^{2k+1}) = 0 \text{ et } E(X^{2k}) = (-i)^{2k}\frac{(2k)!}{k!}(-\frac{1}{2})^k = \frac{(2k)!}{2^k.k!}$$

Remarque : X suit une loi symétrique par rapport à 0, on a retrouvé que, dès qu'ils existent, ses moments d'ordre impair sont nuls.

2) *En déduire la fonction caractéristique d'une loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ pour $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.*

Pour toute variable aléatoire X, pour tous réels a et b

$$\phi_{aX+b}(t) = E(e^{it(aX+b)}) = e^{itb}\phi_X(ta)$$

Si X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors $m + \sigma X$ suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_{m+\sigma X} = e^{itm}e^{-\sigma^2 \frac{t^2}{2}}$$

3) *En déduire que si Y et Z sont deux variables aléatoires suivant chacune une loi normale et indépendantes alors $Y + Z$ suit encore une loi normale.*

Supposons que Y suit une loi $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et que Z suit une loi $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. La fonction caractéristique de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est le produit des fonctions caractéristiques d'où

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi_{Y+Z}(t) = e^{itm_1}e^{-\sigma_1^2 \frac{t^2}{2}}e^{itm_2}e^{-\sigma_2^2 \frac{t^2}{2}} = e^{it(m_1+m_2)}e^{-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\frac{t^2}{2}}$$

La fonction caractéristique caractérise la loi donc $Y + Z$ suit une loi $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Remarque : dès que l'on sait que la somme de deux variables indépendants de loi normales est une variable aléatoire de loi normale, on retrouve facilement ses paramètres en utilisant que $E(Y + Z) = E(Y) + E(Z)$, et pour des variables indépendants $V(Y + Z) = V(Y) + V(Z)$.

Partie B) *Dans le cours, on a vu que pour une variable aléatoire bornée, la connaissance de tous ses moments caractérise sa loi. Dans cette partie, nous allons montrer que de manière générale le résultat est faux : les moments d'une variable aléatoire ne caractérisent pas sa loi.*

On dit que Z suit la loi log-normale (de paramètres 0 et 1) si Z s'écrit $Z = e^X$ avec X de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) *Montrer que Z a pour densité*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{z}e^{-\frac{(\ln z)^2}{2}}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(z).$$

Avec la fonction muette, soit h une fonction continue et bornée

$$E(h(Z)) = E(h(e^X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} h(e^x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

puis avec le changement de variable $t = e^x$ (la fonction exponentielle est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$)

$$E(h(Z)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{]0,+\infty[} h(t)e^{-\frac{(\ln t)^2}{2}}\frac{1}{t}\,dt$$

Z a pour densité

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{t}e^{-\frac{(\ln t)^2}{2}}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t).$$

2) *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose alors : $f_{a,\alpha}(x) = f(x)\,(1 + a\sin(\alpha \ln x))$.*
Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur a et α pour que $f_{a,\alpha}$ soit une densité de probabilité. (On pourra remarquer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}\sin(\alpha u)\,du = 0$.)

Il faut et suffit que $f_{a,\alpha}$ soit positive, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, intégrable et d'intégrale égale à 1. On sait déjà que f est une densité de probabilité, de la continuité par morceaux de f il découle celle de $f_{a,\alpha}$. En remarquant de plus que

$$|f_{a,\alpha}| \leq (1 + |a|)f$$

nous avons pour tout a et α l'intégrabilité de $f_{a,\alpha}$. De plus avec le changement de variable $x = \ln t$

$$\int_{\mathbb{R}} f_{a,\alpha}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\sin(\alpha x)\,dx = 1 + 0 = 1$$

car dans la deuxième intégrale, on intègre une fonction impaire.

Reste à s'assurer de la positivité, elle est réalisée si et seulement si $a \in [-1, 1]$ quelque soit la valeur de α.
3) *On prend maintenant $a \in [-1, 1]$ et $\alpha = 2\pi$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ku}e^{-u^2/2}\sin(2\pi u)\,du = 0.$$

(Indication : *On pourra par exemple écrire $\int_{\mathbb{R}} e^{ku}e^{-u^2/2}e^{i\alpha u}\,du$ à l'aide de la fonction caractéristique d'une loi normale bien choisie.)*

$$e^{ku}e^{-u^2/2}e^{i\alpha u} = e^{\frac{k^2}{2}}e^{-\frac{(u-k)^2}{2}}e^{i\alpha u}$$

Il en découle, en reconnaissant la fonction caractéristique d'une loi $\mathcal{N}(k,1)$ calculée au point α, que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ku}e^{-u^2/2}e^{i\alpha u}\,du = \sqrt{2\pi}e^{\frac{k^2}{2}}e^{i\alpha k}e^{-\alpha^2/2}$$

Puis

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \int_{\mathbb{R}} e^{ku}e^{-u^2/2}\sin(2\pi u)\,du = Im\left(\int_{\mathbb{R}} e^{ku}e^{-u^2/2}e^{i2\pi u}\,du\right) = Im\left(\sqrt{2\pi}e^{\frac{k^2}{2}}e^{i2\pi k}e^{-\alpha^2/2}\right) = 0$$

4) *En déduire que si Z_a est une variable aléatoire de densité $f_{a,2\pi}$, alors Z_a et Z ont mêmes moments et que les moments ne caractérisent pas la loi.*

Avec la majoration $|f_{a,\alpha}| \leq (1+|a|)f$, il est clair que si Z a des moments de tous ordres alors Z_a aussi. Pour montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, le moment d'ordre k de Z existe on peut utiliser un théorème de comparaison. La fonction $t\mapsto \frac{t^k}{t}e^{-(\ln t)^2/2}$ est prolongeable par continuité sur $[0,+\infty[$ donc localement intégrable. $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\frac{t^k}{t}e^{-(\ln t)^2/2} = 0$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ converge, par comparaison entre fonctions positives, $\int_1^{+\infty}\frac{t^k}{t}e^{-(\ln t)^2/2}\,dt$ converge.

De plus, avec la question 3 et un changement de variable $u=\ln t$ on a pour tout $k\in\mathbb{N}^*$

$$E(Z_a^k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{]0,+\infty[}\frac{t^k}{t}e^{-(\ln t)^2/2}(1+a\sin(2\pi\ln t))\,dt = E(Z^k) + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ku}e^{-\frac{u^2}{2}}\sin(2\pi u)\,du = E(Z^k)+0$$

Les moments ne caractérisent pas la loi en général.

Exercice 2. 1) Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Soit $a>0$, montrer que

$$\mathbb{E}\left[X^2\mathbf{1}_{\{|X|\geq\sqrt{n}a\}}\right] \to 0 \text{ quand } n\to+\infty.$$

2) Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On suppose que la loi commune possède un moment d'ordre 2 fini. Pour tout $n\geq1$, on pose

$$M_n = \max_{1\leq k\leq n}|X_k|.$$

Le but de cette question est de montrer que $(M_n/\sqrt{n})$ converge en probabilité vers 0.

a) Montrer que $\forall\varepsilon>0$, $\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\geq\varepsilon\right) = 1-(\mathbb{P}(|X_1|<\varepsilon\sqrt{n}))^n$.

b) Pour tout $\varepsilon>0$ et tout $n\geq1$, on note $\alpha_n(\varepsilon) := \mathbb{E}\left[X_1^2\mathbf{1}_{\{|X_1|\geq\varepsilon\sqrt{n}\}}\right]$, montrer que

$$\mathbb{P}(|X_1|<\varepsilon\sqrt{n}) \geq 1-\frac{\alpha_n(\varepsilon)}{n\varepsilon^2}.$$

c) Conclure.

① posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n := X^2 \mathbb{1}_{X \geq \sqrt{n}\, a}$

i) $$\mathbb{1}_{X \geq \sqrt{n}\, a} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}.\text{ps}} \mathbb{1}_{\emptyset} = 0$$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|Y_n| \leq X^2$ qui est intégrable puisque X possède un moment d'ordre 2.

donc, par le Théorème de Convergence dominée, on déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} E(Y_n) = E\left[\lim_{n \to \infty} Y_n\right] = E(0) = 0$$

i.e $\forall a > 0$, $$\lim_{n \to \infty} E\left[X^2 \mathbb{1}_{X \geq \sqrt{n}\, a}\right] = 0$$

② $$\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \iff \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left[\left|\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right| \geq \varepsilon\right] \longrightarrow 0$$

a) soit $\varepsilon > 0$.

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right| \geq \varepsilon\right] = \mathbb{P}\left[M_n \geq \varepsilon\sqrt{n}\right] = 1 - \mathbb{P}\left[M_n < \varepsilon\sqrt{n}\right]$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left[\bigcap_{k=1}^{n} \{|X_k| < \varepsilon\sqrt{n}\}\right]$$

les X_k sont indépendantes

$$= 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(|X_k| < \varepsilon\sqrt{n}\right)$$

elles ont même loi

$$= 1 - \left(1 - \mathbb{P}\left(|X_1| \geq \varepsilon\sqrt{n}\right)\right)^n$$

b) on a :

<u>Propriété 1</u> : $\forall a > 0$, $$\mathbb{P}\left[|X_1| \geq a\right] \leq \frac{E\left[X_1^2 \mathbb{1}_{|X_1| \geq a}\right]}{a^2} \quad \left(\leq \frac{E(X_1^2)}{a^2}\right)$$

inégalité de MARKOV

<u>en effet</u> :

$$E\left[X_1^2 \mathbb{1}_{|X_1| \geq a}\right] \geq E\left[a^2 \mathbb{1}_{|X_1| \geq a}\right] = a^2 E\left[\mathbb{1}_{|X_1| \geq a}\right] = a^2 \mathbb{P}(|X_1| \geq a) \quad \#$$

donc cette propriété implique : en posant $\alpha_n(\varepsilon) := E\left(X_1^2 \mathbb{1}_{|X_1| \geq \sqrt{n}\,\varepsilon}\right)$

comme $\mathbb{P}(|X_1| < \varepsilon\sqrt{n}) = 1 - \mathbb{P}(|X_1| \geq \varepsilon\sqrt{n})$ que :

$$\mathbb{P}(|X_1| < \varepsilon\sqrt{n}) \geq 1 - \frac{\alpha_n(\varepsilon)}{(\sqrt{n}\,\varepsilon)^2}$$

c) on en déduit que :

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \geq 1$,

$$0 \leq \mathbb{P}\left[\left| \frac{M_n}{\sqrt{n}} \right| \geq \varepsilon \right] \leq 1 - \left[1 - \frac{\alpha_n(\varepsilon)}{\varepsilon^2 n} \right]^n \quad (*)$$

On rappelle que :

Propriété 2 : si (x_n) est une suite réelle telle que :

$$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \quad \text{si } x \in \mathbb{R}$$

alors $$\left(1 + \frac{x_n}{n} \right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x$$

ici pour $\varepsilon > 0$ fixé, la suite $\left(\frac{\alpha_n(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right)_{n \geq 1}$ converge,

d'après la question ① vers 0

donc la propriété 2 donne : $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \left[1 - \frac{\alpha_n(\varepsilon)}{\varepsilon^2 n} \right]^n = e^0 = 1$$

donc on déduit de $(*)$ par le Th. des gendarmes que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left[\left| \frac{M_n}{\sqrt{n}} \right| \geq \varepsilon \right] = 0$$

Ainsi $$\frac{M_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} 0$$

#

Exercice 3. **Loi forte des grands nombres version avec existence de la transformée de Laplace.**

Soit X une variable aléatoire réelle telle que : $\mathbb{E}[e^{t|X|}]$ est fini pour tout $t \geq 0$. (Noter que ceci implique en particulier que X est intégrable).
Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.
On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, le but est de montrer que S_n/n converge presque sûrement vers $m = \mathbb{E}[X]$. Pour simplifier, on suppose également que $m = 0$.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{-\varepsilon nt}\left(\mathbb{E}[e^{tX}]\right)^n.$$

b) On pose $\alpha = \inf_{t\geq 0} e^{-\varepsilon t}\mathbb{E}[e^{tX}]$, montrer que $\alpha < 1$ (on pourra dériver en 0 la fonction $h\ :\ t \mapsto e^{-\varepsilon t}\mathbb{E}[e^{tX}]$) et que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \alpha^n.$$

c) En déduire que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) < +\infty$. Puis justifier que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right) < +\infty$.

d) Conclure.

2 a Soit $\epsilon > 0$ et ≥ 0

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \epsilon\right) = \mathbb{P}(S_n \geq \epsilon n)$$

$$= \mathbb{P}\left(e^{tS_n} \geq e^{t\epsilon n}\right)$$ $t \geq 0$

par croissance stricte de exponentielle

$$\leq \frac{\mathbb{E}[e^{tS_n}]}{e^{t\epsilon n}}$$ par Markov

$$= e^{-t\epsilon n}\, \mathbb{E}[e^{tX_1}]^n$$ par indépendance et même loi.

b Considérons $g(t) = e^{-\epsilon t}\,\mathbb{E}[e^{tX}]$

on a : $g(0) = 1$

$$g'(0) = -\epsilon + \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=0} = -\epsilon$$

$$\inf_{t \geq 0} g(t) < 1.$$

Posons $\alpha = \inf_{t \geq 0} g(t)$.

On a pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \epsilon\right) \leq g(t)^n$

en faisant tendre t vers l'infimum,

on obtient $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \epsilon\right) \leq \alpha^n$.

c) $\alpha < 1$ donc $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \epsilon\right) < +\infty$.

En appliquant ce qui précède avec $-X_i$ au lieu de X_i on obtient également $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(-\frac{S_n}{n} \geq \epsilon\right) < +\infty$.

Or $\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \epsilon\right) + \mathbb{P}\left(-\frac{S_n}{n} \geq \epsilon\right)$

donc $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \epsilon\right) < +\infty$

d) Par Borel-Cantelli, on en déduit que pour tout $\epsilon > 0$,

$\mathbb{P}\left(\limsup \left\{\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| \geq \epsilon\right\}\right) = 0$

c'est-à-dire que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$.

Exercice 4. 1) *Montrer que pour tout $x > 0$,*

$$e^{\frac{-x^2}{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) \leq \int_x^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt \leq e^{\frac{-x^2}{2}}\,\frac{1}{x}.$$

(Pour la minoration, on pourra commencer par faire une intégration par parties. Pour les deux inégalités on pourra penser à faire apparaître $\frac{t}{x}$.)

• On intègre $e^{-t^2/2} = t^{-1} \times t\, e^{-t^2/2}$ par parties :

$$(*) \qquad \int_x^{+\infty} t^{-1}\, t\, e^{-t^2/2}\, dt = -\int_x^{+\infty} t^{-2}\, e^{-t^2/2}\, dt - \left[t^{-1}\, e^{-t^2/2}\right]_x^{+\infty} = -\int_x^{+\infty} t^{-2}\, e^{-t^2/2}\, dt + x^{-1}\, e^{-x^2/2}.$$

D'où la majoration pour tout $x > 0$: $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt \leq x^{-1}\, e^{-x^2/2}$.

• En remarquant que pour tout $t \geq x$, $t^{-2} \leq x^{-3} \times t$, nous avons la minoration :

$$-\int_x^{+\infty} t^{-2} e^{-t^2/2}\, dt \geq x^{-3}\int_x^{+\infty} -t e^{-t^2/2}\, dt = -x^{-3} e^{-x^2/2}.$$

On en déduit l'encadrement demandé i.e. que pour tout $x > 0$:

$$x^{-1}\, e^{-x^2/2}\,(1-x^{-2}) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt \leq x^{-1}\, e^{-x^2/2}.$$

Remarque : Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^{-2}) = 0$, on a : $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt \sim x^{-1}\, e^{-x^2/2}$ lorsque $x \to +\infty$.

2) *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$, on pose*

$$A_n = \left\{\frac{X_n}{\sqrt{2\ln n}} \geq 1-\varepsilon\right\}$$

Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

Soit $0 < \epsilon < 1$. On note $A_n(\epsilon) := \{(X_n/\sqrt{2\ln n}) \geq 1-\epsilon\}$.
En utilisant le 1), on obtient lorsque $n \to +\infty$ (cf. Remarque du **1)**) :

$$\mathbf{P}(A_n(\epsilon)) = \mathbf{P}\left[X_n \geq (1-\epsilon)\sqrt{2\ln n}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(1-\epsilon)\sqrt{2\ln n}}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{(1-\epsilon)\sqrt{2\ln n}}\, e^{-(1-\epsilon)^2\ln n}$$

d'où $\mathbf{P}(A_n(\epsilon)) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\dfrac{1}{(1-\epsilon)\sqrt{2\ln n}}\,\dfrac{1}{n^{(1-\epsilon)^2}}$ lorsque $n \to +\infty$.

Comme $0 < \epsilon < 1$, on peut considérer α tel que $(1-\epsilon)^2 < \alpha < 1$.
On déduit alors que : $n^\alpha\,\mathbf{P}(A_n(\epsilon)) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Mais comme la série $\sum_n n^{-\alpha}$ diverge, il en est de même de la série $\sum_n \mathbf{P}(A_n(\epsilon))$. De plus, les variables aléatoires X_n étant indépendantes, les évènements $A_n(\epsilon)$ sont indépendants. Par le théorème de Borel-Cantelli, on conclut que : $\mathbf{P}(\limsup_n A_n(\epsilon)) = 1$.

3) *Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$, on pose*

$$B_n = \left\{\frac{X_n}{\sqrt{2\ln n}} \geq 1+\varepsilon\right\}$$

Montrer que $\mathbb{P}(\limsup B_n) = 0$.

Soit $0 < \epsilon < 1$ et $B_n(\epsilon) := \{(X_n/\sqrt{2\ln n}) \geq 1+\epsilon\}$. Comme précédemment,

$$\mathbf{P}(B_n(\epsilon)) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{(1+\epsilon)\sqrt{2\ln n}}\,\frac{1}{n^{(1+\epsilon)^2}} \qquad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

D'où $\mathbf{P}(B_n(\epsilon)) = o(\frac{1}{n^{(1+\epsilon)^2}})$. La série $\sum_n n^{-(1+\epsilon)^2}$ étant convergente, la série $\sum_n \mathbf{P}(B_n(\epsilon))$ l'est aussi.
Donc, par le théorème de Borel-Cantelli, on en conclut que : $\mathbf{P}(\limsup_n B_n(\epsilon)) = 0$.

4) *En déduire que*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\limsup\left(\frac{X_n}{\sqrt{2\ln n}}\right)=1\right\}\right)=1.$$

- Remarquons l'équivalence

$$\limsup_n\,(X_n(\omega)/\sqrt{2\ln n}\,))>1 \iff \exists r\in\mathbb{N}^*\ /\ \omega\in\limsup_n\ B_n(1/r)$$

On a donc l'égalité entre évènements : $\{\limsup_n\,(X_n/\sqrt{2\ln n}\,)>1\}=\bigcup_{r\in\mathbb{N}^*}(\,\limsup_n\ B_n(1/r)\,)$.
On obtient alors, en utilisant la question **3)**,

$$\mathbf{P}\big[\limsup_n\,(X_n/\sqrt{2\ln n}\,)>1\big]\le\sum_{r\in\mathbb{N}^*}\mathbf{P}(\,\limsup\ B_n(1/r)\,)=0$$

- Remarquons maintenant l'équivalence : $\limsup_n\,(X_n(\omega)/\sqrt{2\ln n}\,)\ge 1\iff\forall r\in\mathbb{N}^*\ /\ \omega\in\limsup_n\ A_n(1/r)$.

On a donc l'égalité entre évènements : $\{\limsup_n\,(X_n/\sqrt{2\ln n}\,)\ge 1\}=\bigcap_{r\in\mathbb{N}^*}(\,\limsup_n\ A_n(1/r)\,)$.
On obtient alors, en utilisant la question **2)** et la décroissance de la suite d'évènements $\big(\limsup_n\ A_n(1/r)\,\big)_{r\in\mathbb{N}^*}$,

$$\mathbf{P}\big[\limsup_n\,(X_n/\sqrt{2\ln n}\,)\ge 1\big]=\lim_{r\to+\infty}\mathbf{P}(\,\limsup_n\ A_n(1/r)\,)=1$$

De ces deux étapes de démonstration, on en conclut que :

$$\mathbf{P}\big[\limsup_n\,(X_n/\sqrt{2\ln n}\,)=1\big]=\mathbf{P}\big[\limsup_n\,(X_n/\sqrt{2\ln n}\,)\ge 1\big]-\mathbf{P}\big[\limsup_n\,(X_n/\sqrt{2\ln n}\,)>1\big]=1.$$