Université de Bordeaux 1, L3 Probabilités 2012-2013

Devoir maison n. 2

Corrigé de l'exercice 2

A) a) Les variables aléatoires θ_k, $k \geq 1$ sont indépendantes et ont même loi, il en est donc de même pour les v.a. $\ell(\theta_k)$, $k \geq 1$. La fonction ℓ est continue sur le compact $[0,1]$ donc elle est bornée. Les v.a. θ_k prennent leurs valeurs dans $[0,1]$, donc les $|\ell(\theta_k)|$ sont bornées. On peut donc appliquer la loi forte des grands nombres, et on en déduit que la suite $(L_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers $\mathbb{E}[\ell(\theta_1)]$.

De même, les v.a. $h(\theta_k)$, $k \geq 1$, sont indépendantes et de même loi, et les $|h(\theta_k)|$ sont bornées par $\alpha \sup_{[0,1]} \ell$. Toujours par la loi forte des grands nombres, la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers $\mathbb{E}[h(\theta_1)]$.

A) b) On a vu à la question précédente que (H_n) converge p.s. vers $\mathbb{E}[h(\theta_1)]$ et (L_n) converge p.s. vers $\mathbb{E}[\ell(\theta_1)]$. Comme $\mathbb{E}[\theta_1] > 0$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $p := \mathbb{P}(\theta_1 > \varepsilon) > 0$ (sinon on aurait pour tout $\varepsilon > 0$ $\mathbb{E}[\theta_1] \leq \varepsilon$ ce qui impliquerait $\mathbb{E}[\theta_1] = 0$). On a donc

$$\mathbb{E}[\ell(\theta_1)] \geq \mathbb{E}\left[1_{\{\theta_1>\varepsilon\}}\ell(\theta_1)\right] \geq \mathbb{E}\left[1_{\{\theta_1>\varepsilon\}} \min_{[\varepsilon,1]} \ell\right] = p \min_{[\varepsilon,1]} \ell > 0$$

(pour la dernière inégalité on a utilisé le fait que la fonction ℓ est continue et strictement positive sur le compact $[\varepsilon, 1]$, elle atteint son minimum sur ce compact et ce minimum est strictement positif). Par conséquent presque sûrement, à partir d'un certain rang, $L_n > 0$. On en conclut que la suite $\left(\frac{H_n}{L_n}\right)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers $\frac{\mathbb{E}[h(\theta_1)]}{\mathbb{E}[\ell(\theta_1)]}$.

A) c) Si on prend les θ_k de loi uniforme sur $[0,1]$, alors $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ a la densité produit

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]^n}(x_1, \dots, x_n)$$

et on a pour le calcul de l'espérance

$$\mathbb{E}\left[\frac{H_n}{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{k=1}^n h(\theta_k)}{\sum_{k=1}^n \ell(\theta_k)}\right] = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\sum_{k=1}^n h(x_k)}{\sum_{k=1}^n \ell(x_k)} dx_1 \dots dx_n.$$

On a prouvé à la question précédente que $\left(\frac{H_n}{L_n}\right)_{n\geq 1}$ convergeait p.s. vers $\frac{\mathbb{E}[h(\theta_1)]}{\mathbb{E}[\ell(\theta_1)]}$. Comme θ_1 a une loi uniforme sur $[0,1]$, on a

$$\frac{\mathbb{E}[h(\theta_1)]}{\mathbb{E}[\ell(\theta_1)]} = \frac{\int_0^1 h(x)\,dx}{\int_0^1 \ell(x)\,dx}.$$

On va montrer que $\mathbb{E}\left[\frac{H_n}{L_n}\right]$ converge vers $\frac{\int_0^1 h(x)\,dx}{\int_0^1 \ell(x)\,dx}$. On sait que $\frac{H_n}{L_n}$ converge p.s. vers cette quantité, donc aussi en loi. Si la fonction id était bornée, ce que l'on veut montrer serait une conséquence immédiate de la convergence en loi. Mais elle n'est pas bornée, il faut donc choisir une autre fonction. De l'inégalité

$$0 < h(x) \leq \alpha \ell(x)$$

pour $x > 0$ on tire

$$0 < \sum_{k=1}^{n} h(\theta_k) \leq \alpha \sum_{k=1}^{n} \ell(\theta_k) \quad \text{p.s.}$$

car $\mathbb{P}(\theta_k = 0) = 0$ ce qui donne

$$0 < \frac{H_n}{L_n} \leq \alpha \quad \text{p.s.}$$

Si on définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) = x$ si $x \in [0, \alpha]$ et $f(x) = \alpha$ pour $x \geq \alpha$ alors f est continue bornée et on a p.s.

$$f\left(\frac{H_n}{L_n}\right) = \frac{H_n}{L_n}.$$

La convergence en loi de $\dfrac{H_n}{L_n}$ donne

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{H_n}{L_n}\right)\right] \to \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\int_0^1 h(x)\,dx}{\int_0^1 \ell(x)\,dx}\right)\right] = f\left(\frac{\int_0^1 h(x)\,dx}{\int_0^1 \ell(x)\,dx}\right) = \frac{\int_0^1 h(x)\,dx}{\int_0^1 \ell(x)\,dx}$$

la dernière égalité étant due au fait que

$$0 \leq \frac{\int_0^1 h(x)\,dx}{\int_0^1 \ell(x)\,dx} \leq \alpha,$$

qui est une conséquence directe soit de $0 \leq h \leq \alpha\ell$ soit de la convergence p.s. de $\dfrac{H_n}{L_n}$.

On a bien prouvé que

$$\mathbb{E}\left[\frac{H_n}{L_n}\right] \to \frac{\int_0^1 h(x)\,dx}{\int_0^1 \ell(x)\,dx}$$

ce qui donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\sum_{k=1}^n h(x_k)}{\sum_{k=1}^n \ell(x_k)} dx_1 \ldots dx_n = \frac{\int_0^1 h(x)\,dx}{\int_0^1 \ell(x)\,dx}.$$

B) a)

Soit $(\theta_k)_{k\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k$ D'après la loi forte des grands nombres la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$

converge p.s. vers $1/2$, donc aussi en loi vers cette quantité. Pour f continue bornée, on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \mathbb{E}[f(1/2)] = f(1/2).$$

Par indépendance des θ_k, $k = 1,\ldots,n$, $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ a la densité produit $\mathbb{1}_{[0,1]^n}(x_1,\ldots,x_n)$ sur $\mathbb{R}^n$. Le calcul de l'espérance donne donc

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1\ldots dx_n.$$

On en conclut que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1\ldots dx_n = f(1/2).$$

B) b)

Les v.a. θ_k prennent p.s. leurs valeurs dans $[0,1]$, donc il en est de même pour $\frac{S_n}{n}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Si on définit $\tilde{f}$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in [0,1]$, $\tilde{f}(x) = f(0)$ si $x \leq 0$ et $\tilde{f}(x) = f(1)$ si $x \geq 1$ alors $\tilde{f}$ est continue bornée et on a p.s. $\tilde{f}\left(\frac{S_n}{n}\right) = f\left(\frac{S_n}{n}\right)$. On a aussi $\tilde{f}(1/2) = f(1/2)$. D'après la question précédente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \tilde{f}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1\ldots dx_n = \tilde{f}(1/2).$$

On en déduit

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1\ldots dx_n = f(1/2).$$