Exercice 3 On dispose de 3 pièces. La première est équilibrée. La deuxième a une probabilité $p_2 = 3/4$ de tomber sur pile et la troisième une probabilité $p_3 = 1/4$ de tomber sur pile. On choisit une pièce "au hasard" puis on lance d'abord 1 fois la pièce choisie.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir pile?

On note A_i, $1 \leq i \leq 3$: "on choisit la pièce i. Par la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(P \cap A_1) + \mathbb{P}(P \cap A_2) + \mathbb{P}(P \cap A_3) \\
&= \mathbb{P}(P|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(P|A_2)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(P|A_3)\mathbb{P}(A_3) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On réalise maintenant l'expérience suivante: on choisit toujours une pièce "au hasard" puis on lance maintenant 3 fois d'affilée la pièce choisie. On observe la séquence PFP.

2) Quelle est alors la probabilité d'avoir choisi la pièce 2 pour effectuer les lancers?

On cherche: $\mathbb{P}(A_2|PFP)$. D'après la formule de Bayes:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_2|PFP) &= \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap PFP)}{\mathbb{P}(PFP)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(PFP|A_2)\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(PFP)}.
\end{aligned}$$

et d'après la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(PFP) &= \mathbb{P}(PFP \cap A_1) + \mathbb{P}(PFP \cap A_2) + \mathbb{P}(PFP \cap A_3) \\
&= \mathbb{P}(PFP|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(PFP|A_2)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(PFP|A_3)\mathbb{P}(A_3) \\
&= \frac{1}{3 \times 4^3}\left(2^3 + 3^2 + 3\right).
\end{aligned}$$

Et:

$$\mathbb{P}(A_2|PFP) = \frac{3^2}{2^3 + 3^2 + 3} = \frac{9}{20}.$$

3) On effectue alors un lancer supplémentaire. Quelle est la probabilité d'observer pile? Commenter le résultat par rapport à la question 1. On appelle P_4 on obtient pile au 4 ème lancer.

Première méthode: On demande de calculer $\mathbb{P}(P_4|PFP)$. On calcule d'abord:

$$\mathbb{P}(A_1|PFP) = \frac{2^3}{2^3 + 3^2 + 3} = \frac{8}{20}, \mathbb{P}(A_3|PFP) = \frac{3}{2^3 + 3^2 + 3} = \frac{3}{20}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(P_4|PFP) &= \mathbb{P}(P_4 \cap A_1|PFP) + \mathbb{P}(P_4 \cap A_2|PFP) + \mathbb{P}(P_4 \cap A_3|PFP) \\
&= \mathbb{P}_{PFP}(P_4 \cap A_1) + \mathbb{P}_{PFP}(P_4 \cap A_2) + \mathbb{P}_{PFP}(P_4 \cap A_3) \\
&= \mathbb{P}_{PFP}(P_4|A_1)\mathbb{P}_{PFP}(A_1) + \mathbb{P}_{PFP}(P_4|A_2)\mathbb{P}_{PFP}(A_2) + \mathbb{P}_{PFP}(P_4|A_3)\mathbb{P}_{PFP}(A_3) \\
&= \mathbb{P}(P_4|A_1)\mathbb{P}_{PFP}(A_1) + \mathbb{P}(P_4|A_2)\mathbb{P}_{PFP}(A_2) + \mathbb{P}(P_4|A_3)\mathbb{P}_{PFP}(A_3) \\
&= \left(\frac{1}{2} \times \frac{8}{20}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{9}{20}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{20}\right) = 0,575.
\end{aligned}$$

On a utilisé que le résultat du 4 ème lancer ne dépend que de la pièce choisie et pas des résultats des 3 autres lancers.

Ce résultat est légèrement supérieur à $1/2$. En effet si on a observé PFP il est un peu plus probable qu'on ait lancé la pièce 2 et donc on a un peu plus de chance d'obtenir pile au 4ème lancer.

(rq: on peut aussi montrer que $\mathbb{P}(A|B|C) = \mathbb{P}(A|B \cap C)$.)

Deuxième méthode: On peut montrer aussi que:

$$\mathbb{P}(P_4|PFP) = \frac{\mathbb{P}(P_4 \cap PFP)}{\mathbb{P}(PFP)} = \frac{\mathbb{P}(PFPP)}{\mathbb{P}(PFP)}$$

et calculer $\mathbb{P}(PFPP)$ par la méthode des probabilités totales.