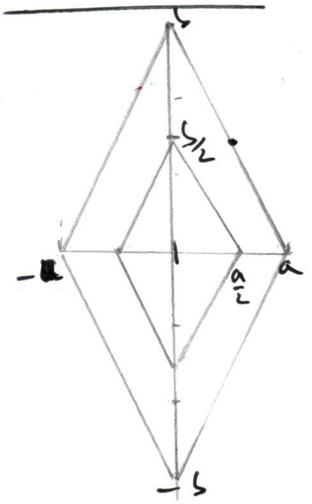
Exercice 3



1) L'aire du losange L est :

$$4 \times \underbrace{\left(\frac{ab}{2}\right)}_{\text{aire d'un triangle}} = 2ab.$$

donc (X,Y) de loi uniforme sur le losange a pour densité : $\dfrac{1}{2ab} \mathbb{1}_L(x,y)$.

2) $\mathbb{P}\left(\dfrac{|X|}{a} + \dfrac{|Y|}{b} \geq \dfrac{1}{2}\right)$

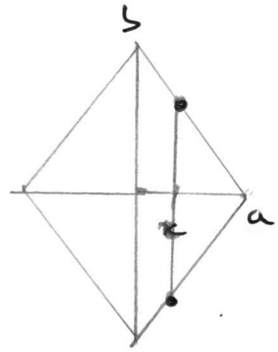
$= 1 - \mathbb{P}\left(\dfrac{|X|}{a} + \dfrac{|Y|}{b} \leq \dfrac{1}{2}\right)$

$\mathbb{P}\left(\dfrac{|X|}{a} + \dfrac{|Y|}{b} \leq \dfrac{1}{2}\right)$ est la probabilité que (X,Y) appartienne au losange $\hat{L}$ de base $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ et de hauteur $\left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$.

donc $\mathbb{P}\left(\dfrac{|X|}{a} + \dfrac{|Y|}{b} \leq 1\right) = \dfrac{\text{Aire de } \hat{L}}{\text{Aire de } L} = \dfrac{2\left(\frac{a}{2}\frac{b}{2}\right)}{2ab} = \dfrac{1}{4}.$

donc $\mathbb{P}\left(\dfrac{|X|}{a} + \dfrac{|Y|}{b} \geq \dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}.$

3) X est à valeurs dans $[-a, a]$



et si $-a \leq x \leq a$.

$$\frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} \leq 1$$

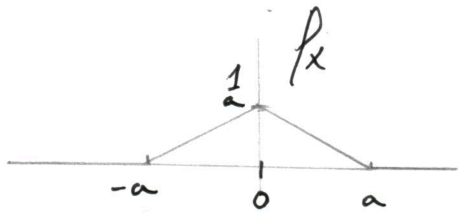
$$\iff \frac{|y|}{b} \leq 1 - \frac{|x|}{a}$$

$$\iff -b\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \leq y \leq b\left(1 - \frac{|x|}{a}\right).$$

donc
$$f_X(x) = \int_{y \in \mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\, dy$$
$$= \int_{-b(1-\frac{|x|}{a})}^{b(1-\frac{|x|}{a})} \frac{1}{2ab}\, dy$$
$$= \frac{2b\left(1 - \frac{|x|}{a}\right)}{2ab} = \frac{1}{a^2}\left(a - |x|\right).$$

si $-a \leq x \leq a$.

et $f_X(x) = 0$ si $|x| > a$.



De même par symétrie, $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b^2}(b - |y|) & \text{si } |y| \leq b \\ 0 & \text{si } |y| > b \end{cases}$

4) X est bornée donc admet des moments de tout ordre

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \, f_X(x) \, dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \underbrace{x \left(\frac{a - |x|}{a^2}\right)}_{\text{impaire}} dx = 0$$

$$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \, f_X(x) \, dx = \int_{-a}^{a} x^2 \left(\frac{a - |x|}{a^2}\right) dx$$

$$= 2 \int_0^a \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} \, dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^3}{3a} - \frac{x^4}{4a^2} \right]_0^a = 2 \left(\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} \right)$$

$$= \frac{a^2}{6}.$$

D'où $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \dfrac{a^2}{6}$.

5) On a $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - \underbrace{E[X]}_{= 0} \underbrace{E[Y]}_{= 0}$

$$= E[XY].$$

Or par symétrie $(-X, Y)$ suit aussi la loi uniforme sur le losange L.

donc $E[XY] = E[-XY] = -E[XY]$

et $E[XY] = 0$.

donc $Cov(X, Y) = 0$.

6) Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathbb{1}_L(x,y)$ ne s'écrit pas comme un produit d'une fonction de x et d'une fonction de y.

Plus précisément :

$$\mathbb{P}\left(\left\{X > \frac{a}{2}\right\} \cap \left\{Y > \frac{b}{2}\right\}\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\neq \quad \mathbb{P}\left(X > \frac{a}{2}\right) \times \mathbb{P}\left(Y > \frac{b}{2}\right) > 0.$$