Exercice 4 :

Soit $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $|\rho| \leq 1$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

1) Γ est symétrique et $\det \Gamma = 1 - \rho^2 \geq 0$

et trace $\Gamma = 2$

donc ses valeurs propres sont ≥ 0

et Γ est symétrique positive.

ou bien : soit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$^t v \Gamma v = v_1^2 + v_2^2 + 2\rho v_1 v_2$$

$$\geq v_1^2 + v_2^2 - 2|v_1||v_2| = (|v_1| - |v_2|)^2 \geq 0.$$

~~2)~~

3) Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien centré et de matrice de covariance Γ.

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{:= A} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ est une transformation linéaire du vecteur gaussien $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

donc est aussi un vecteur gaussien.

Son vecteur espérance est $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sa matrice de covariance est : $\Gamma_Y = A \Gamma_X A^t$

$$A \Gamma_X A^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\rho & 1-\rho \\ 1+\rho & \rho-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{pmatrix}$$

Elle est diagonale et (Y_1, Y_2) est un vecteur gaussien donc Y_1 et Y_2 sont indépendants.

4) $Y_1 \sim \mathcal{N}(0, 1+\rho)$
$Y_2 \sim \mathcal{N}(0, 1-\rho)$
donc Y_1 et Y_2 n'ont pas la même loi sauf si $\rho = 0$.

5) Y_1 et Y_2 sont indépendants et de loi $\mathcal{N}(0, 1+\rho)$ et $\mathcal{N}(0, 1-\rho)$.

Si $|\rho| < 1$, (Y_1, Y_2) admet une densité donnée par le produit des 2 densités :

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{y_1^2}{2(1+\rho)}\right) \exp\left(-\frac{y_2^2}{2(1-\rho)}\right).$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{1+\rho}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\rho}}$$