INTRODUCTION À LA MÉTHODE DES VOLUMES FINIS

Filière : Matmeca | Année : 2023-2024 | Semestre : 7

Devoir à la maison du 19/10/2024

CONSIGNES

Pour ce devoir à la maison, vous devez rendre votre copie sur papier **à la fin du cours le 13 novembre**.

ATTENTION : aucun devoir ne sera accepté après ce cours, et la note de 0/20 sera automatiquement attribuée.

SUJET

1 Un problème de membrane

On décrit une membrane plane par l'ensemble des points M de coordonnées $(\mathrm{x}, z = u(\mathrm{x}))$ avec $\mathrm{x} = (x, y) \in \Omega \in \mathbb{R}^2$ où $z = u(\mathrm{x})$ est la hauteur (ou déplacement vertical) de la membrane. La théorie de l'élasticité linéaire montre que lorsque la membrane est soumise à un champ de pression f, le déplacement est soumis à l'équation suivante :

$$-c\Delta u(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{1}$$

où c est une constante qui dépend du matériau dont la membrane est constituée. L'opérateur Δ est le laplacien. Si l'on considère que la membrane est fixe sur son pourtour, on impose alors la condition aux limites $u(\mathrm{x}) = h$ pour tout x de $\partial\Omega$, où h est une hauteur constante.

Le but de cette partie est alors de construire et analyser un schéma volumes finis pour cette équation.

1) En vous inspirant du cours, construisez un schéma volumes finis pour cette équation, en supposant donné un maillage non structuré de Ω constitué de triangles. Précisez bien vos notations, n'hésitez pas à faire un schéma. Détaillez précisément toutes les étapes de votre construction.

2) Montrez que ce schéma peut se mettre sous la forme matricielle $AU = b$, et donnez les coefficients de la matrice A et du second membre b.

3) Montrez que A est symétrique définie positive et concluez quant-à l'existence de la solution numérique U.

2 Conditions aux limites de Fourier-Robin

On considère l'évolution de la température d'un solide au contact avec de l'air. L'équation modélisant le phénomène est l'équation de la chaleur vue en cours, avec une condition aux limites de Fourier-Robin qui s'écrit

$$-(D\nabla T)(t, x) \cdot n(x) = h(T - T_{ext})(t, x)$$

où h est un coefficient d'échange obtenu par des mesures et T_{ext} est la température extérieure, qui est une fonction supposée ici connue. Cette condition stipule que le flux de chaleur au bord du solide est proportionnel à la différence de température entre le solide et l'extérieur.

Modifiez alors le schéma explicite vu en cours pour prendre en compte cette nouvelle condition aux limites. À la fin de votre étude, vous devez écrire votre schéma de façon complète.

3 Stabilité L^2 du schéma de Crank-Nicolson

On se propose de montrer que le schéma de Crank-Nicolson obtenu en TD pour l'équation de la chaleur sur maillage non-structuré avec des conditions aux limites de Neumann homogènes est inconditionnellement L^2-stable.

1) Rappelez le schéma obtenu en TD, puis écrivez le schéma sous la forme matricielle suivante :

$$T^{n+1} = T^n + \frac{\Delta t}{2} M(T^n + T^{n+1}), \tag{2}$$

où M est une matrice à déterminer.

2) Démontrez que M vérifie la propriété $(MT|T) \leq 0$ pour tout $T \in \mathbb{R}^{i_{max}}$, où l'on utilise le produit scalaire $(S|T) = \sum_{i=1}^{i_{max}} S_i T_i |\Omega_i|$.

3) En calculant le produit scalaire de (2) par $(T^n + T^{n+1})/2$ et en utilisant la propriété précédente, montrez que le schéma est inconditionnellement L^2-stable. On considérera pour cela la 2-norme $\|T\| = \sqrt{(T|T)}$. Pour cette question, vous pouvez admettre le résultat de la question précédente si vous n'y avez pas répondu.