INTEGRATION

Licence de Math.

Ph. Charpentier

Sommaire

Typeset by the TEX-preprocessor PreTEX

Chapitre 1

ESPACES ET FONCTIONS MESURABLES, MESURES

1.1 Tribus

Définition 1.1.1 *Soit E un ensemble.*
1) On appelle **Clan** *de parties de E, un sous-ensemble non vide $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant les deux conditions suivantes:*
-(CL$_1$) $\forall (M, N) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, $M \cup N \in \mathcal{C}$;
-(CL$_2$) $\forall (M, N) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, $M \cap N^c \in \mathcal{C}$ *(N^c désignant le complémentaire de N).*
2) On dit que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ est une **algèbre booléenne** *sur E si $\mathcal{A}$ est un clan vérifiant la condition*
-(A) $E \in \mathcal{A}$.
3) On appelle **Tribu** *de parties de E (ou encore σ-***algèbre***) une albèbre booléenne $\mathcal{M}$ sur E telle que:*
-(T) *Toute réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{M}$ appartient à $\mathcal{M}$.*

De la définition 1.1.1 il résulte aussitôt les propriétés suivantes:

Proposition 1.1.2 *1) Une partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(E)$ est une tribu si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes:*
(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$;
(ii) Toute réunion **dénombrable** *d'éléments de $\mathcal{M}$ appartient à $\mathcal{M}$.*
(iii) $\forall M \in \mathcal{M}$, $M^c \in \mathcal{M}$.
2) Soit $\mathcal{M}$ une tribu sur E. Toute intersection **dénombrable** *d'éléments de $\mathcal{M}$ appartient à $\mathcal{M}$.*
3) Toute intersection de tribus sur E est une tribu sur E. En particulier, si $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ il existe une plus petite tribu sur E contenant $\mathcal{T}$. On l'appelle la **tribu engendrée** *par $\mathcal{T}$, et on la note $\mathcal{M}(\mathcal{T})$.*

Proposition 1.1.3 *Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F.*
1) Si $\mathcal{M}'$ est une tribu sur F, alors $f^{-1}(\mathcal{M}')$ est une tribu sur E.
2) Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(F)$. Alors, $f^{-1}\Big(\mathcal{M}(\mathcal{B})\Big) = \mathcal{M}\Big(f^{-1}(\mathcal{B})\Big)$.

Comme précédement, la vérification de cette proposition se fait immédiatement à partir de la définition 1.1.1.

Exemple 1.1.4 *1) $\mathcal{P}(E)$ et $\left\{E,\emptyset\right\}$ sont les exemples les plus simples de tribus sur E.*
*2) Tout autre exemple peut être considéré comme de la forme $\mathcal{M}(\mathcal{B})$, avec les notation de la proposition*1.1.2

Nous allons maintenant voir un autre exemple fondamental de tribu:

Définition 1.1.5 *Soit X un espace topologique. On appelle* **tribu des boréliens de** *X la tribu $\mathcal{B}(X)$ engendré par les ouverts de X (i.e. $\mathcal{B}(X) = \mathcal{M}(\mathcal{O})$ si $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts de X, c'est-à-dire la topologie de X). Un élément de $\mathcal{B}(X)$ est appelé un* **borélien** *de X. De plus $\mathcal{B}(X)$ est aussi engendré par les fermés de X.*

Proposition 1.1.6 *Soient E et E' deux espaces topologiques à bases dénombrables d'ouverts $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'_0$. Alors la tribu des boréliens de l'espace topologique produit $E \times E'$ est engendrée par les ouverts de la forme $U \times U'$ où $U \in \mathcal{B}_0$ et $U' \in \mathcal{B}'_0$.*

Demonstration. En effet, pour le voir, il suffit de remarquer que l'ensemble des ouverts $U \times U'$ est dénombrable ■

Corollaire 1.1.7 *Soit A un sous-ensemble dense de* R.
1) La tribu borélienne de R *est engendré par les intervalles ouverts de la forme $]a, +\infty[$ où $a \in A$.*
2) La tribu borélienne de $\overline{\mathrm{R}}$ *($= \mathrm{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) est engendré par les intervalles ouverts de la forme $]a, +\infty]$ où $a \in A$.*
3) Supposons que A soit dénombrable. Alors la tribu borélienne de R^n est engendré par les pavés de la forme $\prod_{i=1}^{n} I_i$ où I_i est un intervalle ouvertde R *dont les bornes appartiennent à A.*

Demonstration. Les 1) et 2) sont immédiats, et le 3) résulte de la proposition 1.1.6 ■

Remarque 1.1.8 *1) Dans le corollaire*1.1.7, *nous avons considéré* $\overline{\mathrm{R}}$ *comme un espace topologique . Ceci se répètera constament par la suite. Rappelons donc que les voisinages de $+\infty$ (resp. $-\infty$) sont les ensembles contenant un intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty]$ (resp. $[-\infty, a[$).*
2) A propos des tribus boréliennes, rappelons les terminologies fort utiles suivantes:
a) On appelle F_σ toute réunion **dénombrable** *de fermés d'un espace topologique;*
b) On appelle G_δ toute intersection **dénombrable** *d'ouverts d'un espace topologique.*

Il est clair que les F_σ et les G_δ sont des boréliens.

1.2 Mesurabilité

1.2.1 Espaces et fonctions mesurables

Définition 1.2.1 *1) On appelle* **espace mesurable** *un couple $(E, \mathcal{M})$formé d'un ensemble E et d'une tribu $\mathcal{M}$ sur E.*
2) Soient $(E, \mathcal{M})$ et $(E', \mathcal{M}')$ deux espaces mesurés. On dit qu'une applcation $f : E \longrightarrow E'$ est $(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$**-mesurable** *(ou simplement* **mesurable** *si aucune confusion n'est possible) si $f^{-1}(\mathcal{M}') \subset \mathcal{M}$.*
3) Si X et X' sont deux espaces topologiques, les fonctions de X dans X' mesurables pour les tribus boréliennes sont appelées les **fonctions boréliennes**.

Remarque 1.2.2 *Soit $(E, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Lorsque l'on parle de fonction mesurable de E dans un espace topologique X il est toujours sous-entendu (sauf mention expresse du contraire) que X est considéré comme espace mesurable muni de sa tribu borélienne.*

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition 1.2.1 et de la proposition 1.1.3 :

Proposition 1.2.3 *1) La composée (convenable) de deux fonctions mesurables est mesurable.*
2) Soient $(E, \mathcal{M})$ et $(E', \mathcal{M}')$ deux espaces mesurables et $f : E \longrightarrow E'$. Soit $\mathcal{M}'_0$ une partie de $\mathcal{M}'$ qui engendre $\mathcal{M}$. Pour que f soit mesurable, il faut et il suffit que $f^{-1}(\mathcal{M}'_0) \subset \mathcal{M}$.
3) Soient $(E, \mathcal{M})$ un espace mesurable et X un espace topologique. Pour que $f : E \longrightarrow X$ soit mesurable, il faut et il suffit que $\forall \Omega$ ouvert de X, $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{M}$. En particulier, toute application continue d'un espace topologique dans un autre est borélienne.

Proposition 1.2.4 *Soient $(E, \mathcal{M})$ un espace mesurable, X_1 et X_2 deux espaces topologiques et $f = (f_1, f_2)$ une application de E dans $X_1 \times X_2$.*
(i) Si f est mesurable, alors f_1 et f_2 le sont;
(ii) Si X_1 et X_2 sont à base dénombrable d'ouverts et si f_1 et f_2 sont mesurables, alors f l'est aussi.

Demonstration. Le (i) résulte du 2) de la proposition 1.2.3 car les projections sont continues, et le (ii) resulte de la proposition 1.1.6 et du 2) de la proposition 1.2.3 ∎

Proposition 1.2.5 *Soit $(E, \mathcal{M})$ un espace mesurable.*
1) Pour qu'une application f de E dans R ou $\overline{\mathrm{R}}$ soit mesurable, il faut et il suffit que pour $a \in A$, avec $\overline{A} = \mathrm{R}$, les ensembles $\{f > a\}$ appartiennent à $\mathcal{M}$.
2) Pour que $f : E \longrightarrow \mathrm{C}$ soit mesurable, il faut et il suffit que $\Re\mathrm{e} f$ et $\Im\mathrm{m} f$ le soient.

Demonstration. Le 1) résulte du corollaire 1.1.7 et de la proposition 1.2.3. Le deuxièmement résulte lui de la proposition 1.2.4 ∎

Proposition 1.2.6 *Soient $(E, \mathcal{M})$un espace mesurable et F un espace vectoriel topologique sur K à base dénombrable d'ouverts. Soient f et g deux fonctions mesurables de E dans F.*
1) Pour tous λ et μ dans K, $\lambda f + \mu g$ est mesurable.
2) Si de plus F est R, $\overline{\mathrm{R}}$ ou C, si fg est définie, elle est mesurable.
3) Si F est un espace normé, pour tout $p \in \mathrm{R}_+^*$, la fonction $\|f\|^p$ (resp. $|f|^p$ si F est $\overline{\mathrm{R}}$ ou C) est mesurable. De plus, si F est $\overline{\mathrm{R}}$ ou C, et si, $\forall x \in E$, $f(x) \neq 0$ le résultat est vrai pour $p \leq 0$.

Demonstration. Le 1) et le 2) résultent de la proposition 1.2.4 et de la continuité de l'addition et du produit. Le 3) résulte lui de la proposition 1.2.3 ∎

Remarque 1.2.7 *Soient f et g deux fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}_+$. Si on pose comme convention que $0(+\infty) = 0$, alors fg est partout définie et mesurable.*

Proposition 1.2.8 *Soient $(E, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$. Alors les quatre fonctions*

$$x \longmapsto \sup_n f_n(x), \quad x \longmapsto \inf_n f_n(x),$$

$$x \longmapsto \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x), \quad x \longmapsto \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x),$$

sont mesurables. En particulier:
(a) si f est mesurable, f^+ et f^- le sont;
(b) $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ étant une suite de fonctions mesurables à valeurs dans R, $\overline{\mathrm{R}}$ ou C qui converge simplement vers une fonction f, celle-ci est aussi mesurable.

Demonstration. En effet, $\forall \alpha \in \mathrm{R}$, on a $\left\{\sup_n f_n > \alpha\right\} = \bigcup_n \left(\left\{f_n > \alpha\right\}\right)$ et $\left\{\inf_n f_n \geq \alpha\right\} = \bigcap_n \left(\left\{f_n \geq \alpha\right\}\right)$. La mesurabilité des deux premières fonctions résulte donc de la proposition 1.2.5. La mesurabilité des deux suivantes en résulte car si (u_n) est une suite de nombres réels, on a $\overline{\lim}\, u_n = \inf_{p \geq 0} \left(\sup_{n \geq p} u_n\right)$ et $\underline{\lim}\, u_n = \sup_{p \geq 0} \left(\inf_{p \geq n} u_n\right)$. Enfin les (b) et (a) de la proposition 1.2.8 résultent de ce qui précède et de la proposition 1.2.5 ∎

Remarque 1.2.9 *Soit $(E, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Pour qu'une partie A de E appartiennent à $\mathcal{M}$, il faut et il suffit que la fonction caractéristique χ_A de A soit mesurable. C'est pour cette raison que les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les* **ensembles mesurables**.

1.2.2 Fonctions étagées

Les fonctions mesurables que nous allons maintenant définir sont fondamentales pour la définition de l'intégrale que nous verrons au chapitre suivant.

Définition 1.2.10 *Soient $(E, \mathcal{M})$ et $(F, \mathcal{M}')$ deux espaces mesurables. On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est* **étagée** *si elle est mesurable et si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs qui sont de plus finies dans le cas où $F = \overline{\mathbb{R}}$.*

Proposition 1.2.11 *Soit $(E, \mathcal{M})$ un espace mesurable. pour qu'une application f de E dans un espace vectoriel topologique séparé à base dénombrable d'ouverts F (resp. $\overline{\mathbb{R}}$) soit étagée, il faut et il suffit qu'il existe une partition $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E par des ensembles E_i mesurables, et n éléments de F (resp. $\mathbb{R}$) $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que l'on ait $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, χ_{E_i} désignant la fonction caractéristique de E_i.*

Demonstration. Soient α_i, $1 \leq i \leq n$ les valeurs que prend f. Puisque F est séparé, $E_i = f^{-1}(\alpha_i)$ est mesurable. La conclusion résulte donc de la proposition 1.2.6 ∎

Remarque 1.2.12 *Dans la proposition1.2.11, l'écriture de f n'est évidement pas unique. Elle l'est si on impose que les α_i soient deux à deux distincts.*

Théorème 1.2.13 *Soit $(E, \mathcal{M})$ un espace mesurable.*
1) Les fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ sont les fonctions qui sont limites simples d'une suite de fonctions étagées.
2) Si f est une fonction mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, il existe une suite **croissante** *de fonctions étagées* **positives** *qui converge simplement vers f.*

Demonstration. D'après la proposition 1.2.8, toute limite simple de fonctions étagées est mesurable . Montrons donc la réciproque.

Soit donc f une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.

1°) Supposons tout d'abord que f est à valeurs dans $[0, M[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $E_k = \left\{x \in E \text{ t.q. } \frac{kM}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{(k+1)M}{2^n}\right\}$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$ sont mesurables et $f_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{kM}{2^n} \chi_{E_k}$ est une fonction étagée sur E. De plus on voit immédiatement que la suite (f_n) est croissante et qu'elle converge uniformément vers f puisque $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{M}{2^n}$.

2°) Supposons maintenant que f soit à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n = \inf(f, n)$. La suite (g_n) est donc une suite croissante de fonctions mesurables (d'après la proposition 1.2.8) positives qui converge simplement vers f. En appliquant le 1°), il existe, pour tout n, une fonction étagée h_n positive telle que $h_n \leq g_n$ et $\|g_n - h_n\|_\infty \leq 1/n$. Posons alors $f_n = \sup_{1 \leq i \leq n} h_i$. Il est alors clair que (f_n) est une suite croissante de fonctions étagées positives telles que $f_n \leq f$ et $\|g_n - f_n\|_\infty \leq 1/n$ et, par suite, qui converge simplement vers f.

3 ◦) Pour les fonctions à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$, on écrit $f = f^+ - f^-$ (proposition 1.2.8) et on applique ce qui précède.

4 ◦) Enfin pour les fonctions à valeurs dans C on sépare partie réelle et imaginaire (proposition 1.2.5) ∎

1.3 Mesures

1.3.1 Définitions et propriétés générales, exemples

Définition 1.3.1 *Soit* $(E, \mathcal{M})$ *un espace mesurable. On appelle* **mesure positive** *(resp.* **mesure complexe**, **mesure réelle***) sur* $(E, \mathcal{M})$ *une application* μ *de* $\mathcal{M}$ *dans* $\overline{\mathrm{R}}_+$ *(resp.* C, R*) qui est* σ*-additive, c'est-à-dire telle que, pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{M}$ *deux à deux disjoints, on a:*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathrm{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathrm{N}} \mu(A_n),$$

la somme ci-dessus étant $\leq +\infty$ *(resp. dans* C, R*).*
De plus, si E *est un* **espace topologique localement compact séparé** *muni de sa tribu des boréliens, une mesure positive (resp. complexe, réelle) sur* E *est appelée une* **mesure de borel positive** *(resp.* **mesure de borel complexe**, **réelle***).*
Une mesure **positive** *est dite* σ**-finie** *(resp.* **finie***) s'il existe une suite* (E_n) *de parties mesurables de* E *telle que* $E = \bigcup_n E_n$ *et* $\mu(E_n) < +\infty, \forall n$ *(resp.* $\mu(E) < +\infty$*).*

Un espace mesurable muni d'une mesure s'appelle un **espace mesuré** *et on le note* $(E, \mathcal{M}, \mu)$*.*

Remarque 1.3.2 *Plaçons nous dans les conditions de la définition*1.3.1*. Si* μ *est une mesure positive, la somme* $\sum_{n\in\mathrm{N}} \mu(A_n)$ *n'est pas nécéssairement convergente (elle est* $\leq +\infty$*). Par contre dans le cas des mesures réelles ou complexes, cette somme est (par définition) nécéssairement commutativement convergente et par suite* **absolument convergente***. Une mesure réelle qui prend ses valeurs dans* R_+ *est une mesure positive finie.*

Exemple 1.3.3 *1) Soit* E *un ensemble. Munissons le de la trubu* $\mathcal{P}(E)$*. Si* $A \subset E$*, posons* $\mu(A) =$*le nombre de points de* A *si* A *est fini,* $+\infty$ *sinon.* μ *est clairement une mesure sur* $(E, \mathcal{P}(E))$*: on l'appelle la* **mesure discrète** *sur* E *ou* **mesure de décompte***.*
2) Soit $(E, \mathcal{M})$ *un espace mesuré, et* $a \in E$*. Si* $A \in \mathcal{M}$*, posons* $\mu(A) = 1$ *si* $a \in A$ *et* $\mu(A) = 0$ *si* $a \notin A$*. Alors* μ *est une mesure sur* $(E, \mathcal{M})$ *que l'on appelle la* **mesure de Dirac au point** a*.*
3) Un exemple fondamental de mesure est celui de la **mesure de Lebesgue** *sur* R^n*. Nous verrons la preuve de son existence au Chapitre 3. Pour l'instant, disons simplement la chose suivante: la mesure de Lebesgue sur* R^n *est l'unique mesure positive* m *sur la tribu des boréliens de* R^n *telle que pourtout pavé* $P = \prod_{i=1}^n I_i$*,* I_i *intervalle de* R*, on a* $m(P) = \prod_{i=1}^n |I_i|$*, où* $|I_i|$ *désigne la longueur de* I_i*.*

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition 1.3.1:

Proposition 1.3.4 *Soit $(R, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et soient A et B deux parties mesurables de E.*
(i) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) = \mu(B) + \mu(A \backslash B)$. En particulier, si μ est positive, et si $A \subset B$, on a $\mu(A) \leq \mu(B)$.
(ii) $\mu(B) = \mu(B \backslash A) + \mu(A \cap B)$. En particulier, lorsque μ est positive, si $\mu(A \cap B)$ est fini, on a $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
(iii) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$. En particulier, si μ est positive et si $\mu(A \cap B)$ est fini, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

Proposition 1.3.5 *Soit $(A_n)_{n \in \mathrm{N}}$ une suite de parties mesurables d'un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \mu)$.*
1) Pour tout $n \in \mathrm{N}$ posons $B_n = A_n \backslash \Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \Big)$. Alors $\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathrm{N}} A_n \Big) = \sum_{n \in \mathrm{N}} \mu(B_n)$. En particulier, si μ est positive, $\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathrm{N}} A_n \Big) \leq \sum_{n \in \mathrm{N}} \mu(A_n)$.
2) Supposons que la suite (A_n) soit **croissante**. *Alors $\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathrm{N}} A_n \Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.*
3) Supposons maintenant que la suite (A_n) soit **décroissante**. *Si μ est une mesure complexe, $\mu\Big(\bigcap_{n \in \mathrm{N}} A_n \Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$; si μ est* **positive et s'il existe** *n* **tel que** *$\mu(A_n) < +\infty$ alors la même formule est vraie.*

Demonstration. Les ensembles B_n étant deux à deux disjoints, le 1) résulte aussitôt de la définition 1.3.1. Vérifions tout d'abord le 2) pour une mesure complexe: on applique la formule du 1) en remarquant que ici $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$, et par suite ((ii) de la proposition 1.3.4), $\mu(B_n) = \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})$; la série $\sum_n \mu(B_n)$ étant absolument convergente (remarque 1.3.2), la conclusion s'obtient immédiatement. Supposons maintenant que μ soit positive: s'il existe M tel que $\sup_n \mu(A_n) \leq M$, le résultat s'obtient comme ci-dessus; si par contre ce sup est infini, par le (i) de la proposition 1.3.4 on obtient $\mu\Big(\bigcup_n A_n \Big) = +\infty$.

Vérifions maintenant le 3). La suite $(A_0 \backslash A_n)_{n \in \mathrm{N}}$ est croissante, donc d'après le 2), on a

$$\mu\left(A_0 \backslash \bigcap_n A_n \right) = \lim_n \mu(A_0 \backslash A_n)$$

et la conclusion résulte du (ii) de la proposition 1.3.4 ∎

Remarque 1.3.6 *La seconde partie du 3) de la proposition1.3.5peut être fausse si $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathrm{N}$. Par exemple, avec la mesure de Lebesgue sur R et $A_n = [n, +\infty[$.*

Proposition 1.3.7 *Soit $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, la mesure μ étant* **positive***,et soit $(A_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite de parties mesurables de E. Par definition, on pose: $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{p\in\mathrm{N}} \Big(\bigcup_{n\geq p} A_n \Big)$ et $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{p\in\mathrm{N}} \Big(\bigcap_{n\geq p} A_n \Big)$.*
1) Alors $\mu\Big(\underline{\lim}_{n\in\mathrm{N}} A_n\Big) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
2) De plus s'il existe $p\in\mathrm{N}$ tel que $\mu\Big(\bigcup_{n\geq p} A_n\Big) < +\infty$, alors $\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu(A_n) \leq \mu\Big(\overline{\lim_{n\in\mathrm{N}}} A_n\Big)$.

Demonstration. En effet, d'après le 1) de la proposition 1.3.5, on a $\mu\Big(\underline{\lim}_{n} A_n\Big) = \lim_{p\to\infty} \mu\Big(\bigcap_{n\geq p} A_n\Big)$, et, d'après le (i) de la proposition 1.3.4 $\mu\Big(\bigcap_{n\geq p} A_n\Big) \leq \inf_{n\geq p} \mu(A_n) \leq \underline{\lim}_{n} \mu(A_n)$. Le deuxiemement s'obtient de la même manière en appliquant le 2) de la proposition 1.3.5 ■

Remarque 1.3.8 *Lorsque μ est une mesure positive, le 2) de la proposition*1.3.5 *peut être faux si on ne suppose pas que l'un des A_n est de mesure finie.*

1.3.2 Mesures positives: ensembles négligeables, complétion

Dans tout ce sous-paragraphe, nous ne considérerons que des **mesures positives**.

Définition 1.3.9 *Soit $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, μ étant une mesure* **positive***. On dit qu'une partie A de E est* **négligeable** *s'il existe une partie mesurable B telle que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$. On dit qu'une proppriéte est vraie* **presque partout** *s'il existe un sous-ensemble négligeable A de E tel qu'elle soit vraie en tout point de $E\backslash A$.*

On dit qu'un espace mesuré est **complet** *si tout ensemble négligeable est mesurable.*

Théorème 1.3.10 *Soit $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré ($\mu \geq 0$).*
1) L'ensemble $\tilde{\mathcal{M}} = \Big\{A\cup N,\ A \in \mathcal{M},\ N \text{ negligeable}\Big\}$ est une tribu sur E appelée la **tribu complétée** *de $\mathcal{M}$ pour la mesure μ.*
2) Il existe une et une seule mesure $\tilde{\mu}$ sur $\tilde{\mathcal{M}}$ prolongeant μ telle que l'espace mesuré $(E, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mu})$ soit complet. L'espace mesuré $(E, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mu})$ s'appele le **complété** *de $(E, \mathcal{M}, \mu)$.*

Demonstration. Vérifions tout d'abord que $\tilde{\mathcal{M}}$ est une tribu. Pour cela, vérifions les conditions de la proposition 1.1.2: d'après la proposition 1.3.5, les deux premières conditions sont vérifiées. Reste la troisieme: Soit $\tilde{A} = A\cup N$ un élément de $\tilde{\mathcal{M}}$, $A \in \mathcal{M}$, N négligeable. Il existe donc $B \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(B) = 0$ et $N \subset B$. On a donc $\tilde{A} = A \cup (B \cap (B\backslash N)^c)$ et par suite $\tilde{A}^c = (A\cup B)^c \cup (B\backslash N)$, ce qui prouve que $\tilde{A}^c \in \tilde{\mathcal{M}}$ puisque $B\backslash N$ est négligeable.

Démontrons maintenant le 2) du théorème 1.3.10. Tout d'abord, si μ' est une mesure qui prolonge μ, d'après le (i) de la proposition 1.3.4, on a $\mu'(A) = 0$ pour tout ensemble négligeable A, et comme tout élément de $\tilde{\mathcal{M}}$ peut s'écrire $A\cup N$ avec $A \in \mathcal{M}$, N négligeable et $A\cap N = \emptyset$, μ' est entierement déterminée sur $\tilde{\mathcal{M}}$. Montrons maintenant l'existence de $\tilde{\mu}$. Remarquons tout d'abord que si $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$, A_1, $A_2 \in \mathcal{M}$ et N_1, N_2 négligeables, on a $\mu(A_1) = \mu(A_2)$: en effet, si $N_2 \subset B_2$ avec $B_2 \in \mathcal{M}$, $\mu(B_2) = 0$, on a $\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup B_2) \leq \mu(A_2)+\mu(B_2) = \mu(A_2)$, et de même, $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$. Alors si pour $\tilde{A} = A \cup N \in \tilde{\mathcal{M}}$ on pose $\tilde{\mu}(\tilde{A}) = \mu(A)$ on définit bien une application de $\tilde{\mathcal{M}}$ dans $\overline{\mathrm{R}}_+$ qui prolonge μ. Pour conclure, il suffit donc de vérifier que cette application est σ-additive car les ensembles négligeables pour $\tilde{\mu}$ et μ sont les même. Or si $(\tilde{A}_n)$ est une suite d'éléments de $\tilde{\mathcal{M}}$ deux à deux disjoints, $\tilde{A}_n = A_n \cup N_n$, une réunion dénombrable d'ensemble négligeables étant négligeable (proposition 1.3.5), on a $\tilde{\mu}\Big(\bigcup\limits_n \tilde{A}_n\Big) = \mu\Big(\bigcup\limits_n A_n\Big) = \sum\limits_n \mu\Big(A_n\Big) = \sum\limits_n \tilde{\mu}\Big(\tilde{A}_n\Big)$, ce qui achève la preuve du théorème ■

Remarque 1.3.11 *Nous verrons dans le chapitre suivant que deux fonctions mesurables qui sont égales presque partout (i.e. en dehors d'un ensemble négligeable c.f. définition1.3.9) ne peuvent pas être distingués du point de vue de l'intégration. C'est pour cette raison que l'on étend généralement la définition des fonctions mesurables de la manière suivante:*
On dit qu'une fonction f définie sur une partie mesurable A d'un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \mu)$ et à valeurs dans un espace mesurable $(E', \mathcal{M}')$ est une **fonction mesurable** *si $\mu(A^c) = 0$ et si $\forall B \in \mathcal{M}'$, on a $f^{-1}(B) \cap A \in \mathcal{M}$. En particulier, si f est à valeurs dans C ou $\overline{\mathrm{R}}_+$ il revient au même de dire que la fonction $\tilde{f}$ définie sur E tout entier en prolongeant f par zéro est mesurable au sens de la définition1.2.1.*
On appelle parfois les fonctions mesurables au sens ci-dessus les **fonction mesurables définies presque partout**.

On pourra remarquer que si un espace mesuré est complet et si f est une fonction mesurable sur E, elle le reste encore si on la modifie arbitrairement sur un ensemble négligeable.

Théorème 1.3.12 (Theoreme d'Egoroff) *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré $(\mu \geq 0)$* **de mesure finie** *(i.e. $\mu(E) < +\infty$) et $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur E à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$ ou C.*
On suppose que:
-(a) si les f_n sont à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$, pour tout n, l'ensemble $\{f_n =\Leftrightarrow \infty\}$ est négligeable;
-(b) la suite $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ converge simplement presque partout vers une fonction mesurable f;
-(c) si f est à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$, l'ensemble $\{f =\Leftrightarrow \infty\}$ est négligeable.
Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie mesurable A de E telle que: $\mu(E \backslash A) \leq \epsilon$ la suite $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ converge uniformément vers f sur A.

Demonstration. Tout d'abord, dans le cas où les f_n et f sont à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$, il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $\bigcup\limits_n \{f_n =\Leftrightarrow \infty\} \cup \{f =\Leftrightarrow \infty\} \subset A$. Par suite, quitte à raisonner dans $E \backslash A$, on se ramène au cas où toutes les fonctions sont finies, c'est-à-dire lorsqu'elles sont à valeurs dans C. Pour $n \in \mathrm{N}$ et $\delta > 0$ considérons $F_n = \Big\{|f_p(x) - f(x)| < \delta,\ \forall p \geq n\Big\}$: la suite (F_n) est croissante, et d'après le 3) de la proposition 1.3.5, et l'hypothèse, on a $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(E \backslash F_n) = \mu\Big(\bigcap\limits_{n \in \mathrm{N}} (E \backslash F_n)\Big) = 0$. Ceci prouve que pour tout $k \in \mathrm{N}$ il existe $G_k \in \mathcal{M}$ et un entier N_k tels que $\mu(G_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$, et, pour $n \geq N_k$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2^k}$, pour tout $x \in E \backslash G_k$. Posons alors $A = \bigcap\limits_{k \in \mathrm{N}} (E \backslash G_k)$. On a

$\mu(E\backslash A) = \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k\Big) \leq \epsilon$ d'après le 1) de la proposition 1.3.5. Pour tout $\eta > 0$, soit k tel que $\frac{\epsilon}{2^k} \leq \eta$. Alors, pour $x \in A$, et $n \geq N_k$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \eta$, puisque $A \subset E\backslash G_k$, ce qui prouve le théorème ∎

1.3.3 Mesures complexes: variation totale, absolue continuité

Théorème 1.3.13 *Soit μ une mesure* **complexe** *sur un espace mesurable $(E, \mathcal{M})$. Pour tout $E \in \mathcal{M}$, posons*

$$|\mu|(E) = \sup_{\substack{(E_i)_{i\in\mathbb{N}}\text{partition} \\ \text{de } E,\ E_i\in\mathcal{M}}} \sum_{i=0}^{\infty} |\mu(E_i)|. \tag{3.1}$$

Alors, $|\mu|$ est une mesure positive finie sur $(E, \mathcal{M})$ que l'on appelle la **variation totale** *de μ.*

Demonstration. Verifions tout d'abord que la formule 3.1 définit bien une mesure sur $(E, \mathcal{M})$. Pour cela il nous faut montrer que $|\mu|$ ainsi définie est $\sigma-$additive. Soit donc $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables de E deux à deux disjointes, et notons A leur réunion. Pour tout i, soit t_i tels que $t_i < |\mu|(A_i)$, de sorte qu'il existe une partition E_{ij} de A_i telle que $\sum_j |\mu(E_{ij})| > t_i$. Alors les ensembles E_{ij} forment une partition de A et par suite $\sum_i t_i \leq |\mu|(A)$, ce qui entraîne $\sum_i |\mu|(A_i) \leq |\mu|(A)$. Pour voir l'inégalité inverse, soit E_j une partition de A. Les ensembles $E_j \cap A_i$ sont donc tels que, pour j fixé, ils forment une partition de E_j et, pour i fixé, une partition de A_i. Par suite, on a:

$$\begin{aligned}
\sum_j |\mu(E_j)| &= \sum_j \left|\sum_i \mu(E_j \cap A_i)\right| \\
&\leq \sum_j \sum_i |\mu(E_j \cap A_i)| \\
&= \sum_i \sum_j |\mu(E_j \cap A_i)| \leq \sum_i |\mu|(A_i).
\end{aligned}$$

Ceci achève de prouver que $|\mu|$ est une mesure positive.

Il nous faut maintenant démontrer que $|\mu|$ est finie. Raisonnons par l'absurde: supposons que $|\mu|(E) = +\infty$ et montrons, par récurrence qu'il existe deux suites $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 0}$ d'ensembles mesurables telles que:

-pour $n \geq 1$, $A_n \cap B_n = \emptyset$;
-pour $n \geq 1$, $A_n \subset B_{n-1}$;
-pour $n \geq 0$, $|\mu|(B_n) = +\infty$;
-pour $n \geq 1$, $|\mu(A_n)| \geq 1$.

Prenons $B_0 = E$ et supposons A_i et B_i construits pour $1 \leq i \leq n-1$. Puisque $|\mu|(B_{n-1}) = +\infty$, il existe une partition $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de B_{n-1} et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{j=1}^{n} |\mu(E_j)| > 6(1 + |\mu(B_{n-1})|)$.

Nous utilisons maintenant le lemme suivant:

Lemme 1.3.14 *Soient z_i, $1 \leq i \leq n$ des nombres complexes. Alors il existe un sous-ensemble S de $\{1, 2, ..., n\}$ tel que*

$$\left|\sum_{i\in S} z_i\right| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{n} |z_i|.$$

Admettons un instant ce lemme pour finir la preuve du théorème 1.3.13. En appliquant le lemme 1.3.14 au nombres complexes $\mu(E_j)$, on trouve une partie S de $\{1, ..., n\}$ telle que, si on pose $A = \bigcup_{j\in S} E_j$, on a $A \subset B_{n-1}$ et $|\mu(A)| > 1 + |\mu(B_{n-1})| \geq 1$. Alors si $B = B_{n-1} \backslash A$, on a $|\mu(B)| \geq |\mu(A)| - |\mu(B_{n-1})| > 1$. Comme, d'après la première partie de la preuve, on a $|\mu|(B_{n-1}) = |\mu|(A) + |\mu|(B)$, on a soit $|\mu|(A) = +\infty$ soit $|\mu|(B) = +\infty$. Il suffit alors de choisir soit $A_n = A$ et $B_n = B$ soit $A_n = B$ et $B_n = A$. Alors, la suite (A_n) est une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints tel que $|\mu(A_n)| \geq 1$ pour tout n. Mais ceci contredit la σ-additivité de la mesure μ car la série $\sum_n \mu(A_n)$ ne peut pas être convergente ■

*Preuve du lemme*1.3.14. Soit $a = \sum_i |z_i|$. Si on découpe le plan R^2 en quatre quadrants avec les droites $y = \Leftrightarrow x$, l'un des ces quadrant est tel que la somme des $|z_i|$ pour les z_i contenus dans ce quadrant est supérieure à $a/4$. Supposons que ce soit celui défini par $|y| \leq x$. Alors puisque dans ce quadrant on a $\Re\mathrm{e}\, z \geq \frac{|z|}{\sqrt{2}}$, si S désigne l'ensemble des i tels que $z_i \in \{|y| \leq x\}$, il vient

$$\left|\sum_{i\in S} z_i\right| \geq \sum_{i\in S} \Re\mathrm{e}\, z_i \geq \frac{a}{4\sqrt{2}},$$

d'où le lemme ■

Corollaire 1.3.15 *L'ensemble des mesures complexes sur un espace mesurable $(E, \mathcal{M})$ est un espace vectoriel normé pour la norme $\|\mu\| = |\mu|(E)$.*

Proposition 1.3.16 *Soit μ une mesure* **réelle** *sur un espace mesurable $(E, \mathcal{M})$. Alors les formules*

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu),$$

définissent deux mesures positives sur $(E, \mathcal{M})$ appelées respectivement les **variations positives** *et* **négatives de μ.** *De plus ce sont des mesures positives finies telles que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ et $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, l'avant dernière formule étant connue sous le nom de* **décomposition de Jordan de** *μ.*

Définition 1.3.17 *1) Soient μ et λ deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{M})$, μ étant supposée* **positive**. *On dit que λ est* **absolument continue par rapport à** *μ et on écrit $\lambda \ll \mu$, si, pour $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = 0$ implique $\lambda(E) = 0$.*
2) On dit que deux mesures (quelconques) λ_1 et λ_2 sur $(E, \mathcal{M})$ sont **mutuellement singulières**, *et on écrit $\lambda_1 \perp \lambda_2$, s'il existe deux ensembles mesurables A et B disjoints tels que $\forall E \in \mathcal{M}$, on a $\lambda_1(E) = \lambda_1(E \cap A)$ et $\lambda_2(E) = \lambda_2(E \cap B)$.*
3) On dit qu'une mesure μ sur $(E, \mathcal{M})$ est **concentrée** *sur un ensemble mesurable A si $\forall E \in \mathcal{M}$ on a $\mu(E) = \mu(E \cap A)$, ou encore, si $\mu(E) = 0$ lorsque $E \cap A = \emptyset$.*

Proposition 1.3.18 *Soient μ, λ, λ_1 et λ_2 des mesures sur un espace mesuré $(E, \mathcal{M})$, μ étant positive. Alors:*
(a) Si λ est concentrée sur A, il en est de même de $|\lambda|$;
(b) $\lambda_1 \perp \lambda_2$ implique $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$;
(c) $\lambda \ll \mu$ implique $|\lambda| \ll \mu$;
(d) $\lambda_1 \ll \mu$ et $\lambda_2 \perp \mu$ impliquent $\lambda_1 \perp \lambda_2$;
(e) $\lambda \ll \mu$ et $\lambda \perp \mu$ impliquent $\lambda = 0$.

Demonstration. (a): si $E \cap A = \emptyset$ et $F \subset E$ on a $\lambda(F) = 0$. (b): résulte de (a). (c): si $\mu(E) = 0$ et si (E_i) est une partiton de E, on a $\mu(E_i) = 0$ et comme $\lambda \ll \mu$, on a $\lambda(E_i) = 0$ pour tout i. (d): par hypothèse, il existe A mesurable tel que $\mu(A) = 0$ et λ_2 est concentrée sur A. Alors, pour tout $E \subset A$ $\lambda_1(E) = 0$, ce qui montre que λ_1 est concentrée sur le complémentaire de A. (e): par (d), on a $\lambda \perp \lambda$ ce implique $\lambda = 0$ ∎

Proposition 1.3.19 *Soient λ et μ deux mesures sur un espace mesuré $(E, \mathcal{M})$, μ étant positive et λ complexe (donc finie si réelle). Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(a) $\lambda \ll \mu$;
(b) pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) < \delta$ implique $|\lambda(E)| < \epsilon$.

Demonstration. Il est clair que (b) entraîne (a), montrons donc que (a) implique (b). Raisonnons par l'absurde: si (b) est faux, il existe $\epsilon > 0$ et une suite (A_n) d'ensembles mesurables tels que $\mu(A_n) < 2^{-n}$ et $|\lambda(A_n)| \geq \epsilon$ donc $|\lambda|(A_n) \geq \epsilon$. Alors, si on pose $E_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$ et $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, on a $\mu(E_n) < 2^{-n+1}$, et par la proposition 1.3.5 il vient $\mu(E) = 0$ et $|\lambda|(E) \geq \epsilon$. Ainsi $|\lambda|$ n'est pas absolument continue par rapport à μ ce qui contredit le (c) de la proposition 1.3.18 ∎

Remarque 1.3.20 *L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) de la proposition*1.3.19 *n'est plus vraie, en général, pour une mesure positive* **non bornée** *λ. Par exemple, si μ est la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$, et, si, pour E borélien de $]0,1[$ on pose $\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}$, alors, le (b) n'est pas satisfait pour un intervalle $]0,\delta[$, et, $\mu(E) = 0$ implique $\lambda(E) = 0$ par définition de l'intégrale (c.f. Chapitre 2).*

1.3.4 Convergence en mesure

Dans tout ce paragraphe nous ne considérerons que des mesures **positives**.

Définition 1.3.21 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré (μ étant une mesure positive), f_n, $n \in \mathrm{N}$, et f des fonction mesurables de E dans $\overline{\mathrm{R}}$ ou C. On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$* **converge en mesure** *vers f si pour tout $\epsilon > 0$, $\mu\Big(\big\{|f_n - f| \geq \epsilon\big\}\Big)$ tend vers zéro quand $n \longrightarrow +\infty$.*

Proposition 1.3.22 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathrm{R}}$ ou C.*
1) Si $\mu(E) < +\infty$ et si la suite (f_n) converge presque partout vers une fonction (mesurable) f alors elle converge en mesure vers f.
2) Si la suite (f_n) converge en mesure vers une fonction mesurable f alors, il existe une suite extraite (f_{n_k}) de la suite (f_n) qui converge presque partout vers f.

Demonstration. Pour $\epsilon > 0$ soit $A_n(\epsilon) = \bigcup_{p\geq n} \left\{|f_n - f| \geq \epsilon\right\}$. La suite $(A_n(\epsilon))$ est décroissante et par hypothèse $\bigcap_n A_n(\epsilon)$ est négligeable. Comme $\mu(E) < +\infty$, la proposition 1.3.5 montre que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n(\epsilon)) = 0$, ce qui prouve le 1). Montrons maintenant le 2). Par hypothèse, pour tout entier k il existe $n_k \in \mathrm{N}$ et un ensemble mesurable N_k tels que $\mu(N_k) <\frac{1}{2^k}$ et, pour $x \notin N_k$, $|f_n(x) - f(x)| <\frac{1}{k}$ pour $n \geq n_k$. Si alors on pose $N = \overline{\lim_k} N_k$, d'après la proposition 1.3.5, on a $\mu(N) = 0$ et la suite (f_{n_k}) converge simplement vers f sur $E\backslash N$ c'est-à-dire presque partout ∎

Remarque 1.3.23 *Plaçons nous dans les conditions de la proposition1.3.22. Si dans le 1) on retire l'hypothèse $\mu(E) < +\infty$, la conclusion peut être mise en défaut: par exemple, sur R la suite $\chi_{[n,+\infty[}$ converge presque partout vers 0 mais pas en mesure. De même, dans le 2) on ne peut pas espérer qu'en général la suite (f_n) converge presque partout: par exemple, sur $[0, 1]$, la suite $\chi_{[0,1/2]}$, $\chi_{[1/2,1]}$, $\chi_{[0,1/4]}$, $\chi_{[1/4,1/2]}$,..., converge en mesure vers 0, mais en aucun point $f_n(x)$ ne converge vers 0.*

Chapitre 2

INTEGRATION ABSTRAITE

Dans tout ce chapitre, on se place dans un espace mesuré $(E, \mathcal{M}, \mu)$, μ étant une mesure **positive**.

2.1 Intégration des fonctions mesurables positives

2.1.1 Intégration des fonctions étagées

Définition 2.1.1 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré ($\mu \geq 0$) et f une fonction étagée positive sur E.*
1) Soit $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ une écriture de f, (E_i) étant une partition de E (c.f. proposition1.2.11). En adoptant la convention $0(+\infty) = 0$, on appelle **intégrale de** *f le nombre positif, fini ou non, indépendant de l'écriture de f et défini par*

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i). \tag{1.1}$$

2) On dit que f est **intégrable** *si $\int f d\mu < +\infty$.*
3) Si $A \in \mathcal{M}$ on appelle **intégrale de** *f* **sur** *A l'intégrale de la fonction étagée $f\chi_A$, et on la note $\int_A f d\mu$.*

La vérification de l'indépendance de l'intégrale par rapport à l'écriture de f est immédiate: si $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{E_j}$, on a $\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \mu(F_j \cap E_i)$ ■

Remarque 2.1.2 *Pour qu'une fonction étagée soit integrable, il faut et il suffit que $\mu\Big(\{f > 0\}\Big) < +\infty$.*

Exemple 2.1.3 *Soit $(E, \mathcal{M})$ un espace mesuré, et soient $a \in E$ et δ_a le mesure de Dirac au point a. Si f est une fonction étagée, $\int f\delta_a = f(a)$.*

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition 2.1.1.

Proposition 2.1.4 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et f et g deux fonctions étagées positives sur E.*
(i) $\forall \lambda \in \mathrm{R}_+$, on a $\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu$;
(ii) $\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$;
(iii) si $f \leq g$, on a $\int f d\mu \leq \int g d\mu$;
(iv) si A et B sont deux parties mesurables disjointes de E on a $\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$.

Proposition 2.1.5 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite* **croissante** *de fonctions étagées positives et f une fonction étagée positive telles que pour tout $x \in E$, $f(x) \leq \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leq +\infty$. Alors*

$$\int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq +\infty. \tag{1.2}$$

Demonstration. Remarquons tout d'abord que la limite de la formule 1.2 existe car la suite $n \longrightarrow \int f_n d\mu$ est croissante (proposition 2.1.4).

1) *Supposons tout d'abord $\mu(E) < +\infty$.* Soit $\epsilon > 0$, et, pour tout $n \in \mathrm{N}$, posons $E_n = \left\{f_n + \epsilon \leq f\right\}$. La suite (E_n) est une suite décroissante d'ensembles mesurables, d'intersection vide, donc, d'après la proposition 1.3.5, $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. D'après la proposition 2.1.4, on a $\int f d\mu \leq (\mathrm{Max} f)\mu(E_n) + \int f_n d\mu + \epsilon\mu(E)$, et le résultat s'obtient en passant à la limite.

2) *Supposons maintenant $\mu(E) = +\infty$ et f intégrable.* D'après la remarque 2.1.2, si $E_0 = \{f = 0\}$, $E \backslash E_0$ est mesurable de mesure finie, et pour conclure, il suffit d'appliquer le 1) aux restrictions des fonctions à $E \backslash E_0$.

3) *Supposons enfin $\mu(E) = +\infty$ et f non intégrable.* Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ et $E \in \mathcal{M}$ tels que $\forall x \in E \;\, f(x) = \alpha$ et $\mu(E) = +\infty$. Alors si $A_n = \left\{f_n > \alpha/2\right\}$, la suite (A_n) est croissante, et $E \subset \bigcup_n A_n$. D'après la proposition 1.3.5, on a donc $\lim_n \mu(A_n) = +\infty$, et comme $\int f_n d\mu \geq \frac{\alpha}{2}\mu(A_n)$, on conclut aussitôt ■

2.1.2 Intégration des fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$

Définition 2.1.6 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.*
1) On **appelle** *intégrale de f le nombre positif fini ou non défini par*

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{\varphi \text{ étagée positive} \\ \varphi \leq f}} \int \varphi d\mu. \tag{1.3}$$

2) On dit que f est **intégrable** *si $\displaystyle\int f d\mu < +\infty$.*
3) Si A est une partie mesurable de E, avec la convention $0(+\infty) = 0$, la fonction $f\chi_A$ est partout définie et mesurable, et on appelle **intégrale de** *f* **sur** *A l'intégrale de la fonction $f\chi_A$, et on note $\displaystyle\int_A f d\mu$ On dit que f est* **intégrable sur** *A si $\displaystyle\int_A f d\mu < +\infty$.*

Proposition 2.1.7 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, f une fonction mesurable positive et (f_n) une suite* **croissante** *de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f. Alors*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstration. Comme les f_n sont étagées et $f_n \leq f$, la définition 2.1.6 montre que $\displaystyle\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. Comme la suite $n \longrightarrow \displaystyle\int f_n d\mu$ est croissante (proposition 2.1.4), on a $\displaystyle\lim_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. Par ailleurs, si φ est une fonction étagée telle que $0 \leq \varphi \leq f$, on a $\varphi \leq \lim_n f_n$, et par la proposition 2.1.5 on a $\displaystyle\int \varphi d\mu \leq \lim_n \int f_n d\mu$, ce qui, par définition de $\displaystyle\int f d\mu$ achève la démonstration ∎

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition 2.1.6 et des propositions 2.1.7 et 2.1.4.

Proposition 2.1.8 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et f et g deux fonctions mesurables positives sur E.*
(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu$;
(ii) $\displaystyle\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$;
(iii) si $f \leq g$, alors $\displaystyle\int f d\mu \leq \int g d\mu$;
(iv) si Aet B sont deux parties mesurables disjointes de E alors $\displaystyle\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$.

Proposition 2.1.9 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable positive.*
1) Pour tout $\alpha > 0$, $\mu\big(\{f \geq \alpha\}\big) \leq \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int f d\mu$.
2) Si f est intégrable, alors $\mu\big(\{f = +\infty\}\big) = 0$.

Demonstration. Vérifions tout d'abord le 1): si $A = \{f \geq \alpha\}$, d'après la proposition 2.1.8, on a $\alpha\mu(A) \leq \int_A f d\mu \leq \int f d\mu$. Vérifions maintenant le 2): si $A = \{f = +\infty\}$, pour tout entier n, on a $n\chi_A \leq f$ et par suite $n\mu(A) \leq \int f d\mu < +\infty$, ce qui donne le résultat ■

Proposition 2.1.10 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré f et g deux fonctions mesurables positive.*
1) Pour que $\int f d\mu = 0$ il faut et il suffit que $f(x) = 0$ μ-presque partout.
2) Si $f(x) = g(x)$ μ-presque partout, alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Demonstration. Démontrons tout d'abord le 1). Supposons $\int f d\mu = 0$; alors, d'après le 1) de la proposition 2.1.9, pour tout $n \in \mathrm{N}$, on a $\mu\Big(\{f \geq 1/n\}\Big) = 0$, et par la proposition 1.3.5, il vient $\mu\Big(\{f \neq 0\}\Big) = 0$. Supposons maintenant que $f(x) = 0$ μ-presque partout; si $A = \{f > 0\}$, il existe donc $B \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(B) = 0$ et $A \subset B$. Si alors φ_n désigne la fonction étagée qui vaut n sur B et 0 sur B^c, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n \geq f$, d'après la proposition 1.1.7, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \int \varphi_n d\mu \geq \int f d\mu$, et comme, pour tout n, $\int \varphi_n d\mu = 0$, on obtient $\int f d\mu = 0$.

Démontrons maintenant le 2). Posons $h = \inf(f, g)$; d'après la proposition 1.2.8, h est mesurable et, l'hypothèse implique que $f = h + f_1$, $g = h + g_1$, f_1 et g_1 étant des fonctions nulles presque partout; le résultat résulte donc du 1) ■

Nous pouvons maintenant énoncer le premier théorème fondamental de convergence:

Théorème 2.1.11 (Theoreme de Beppo-levi) *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite* **croissante** *de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathrm{R}}_+$, et f une fonction mesurable de E dans $\overline{\mathrm{R}}_+$ telles que $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ presque partout. Alors*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{1.4}$$

Demonstration. D'après le 2) de la proposition 2.1.10, il suffit de montrer ceci pour la fonction f définie par $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ qui est mesurable d'après la proposition 1.2.8. D'après le théorème 1.2.13, pour tout n, il existe une suite croissante $(f_n^k)_{k\in\mathrm{N}}$de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f_n. Pour tout entier $k \in \mathrm{N}$, posons $g_k = \sup\limits_{n\leq k} f_n^k$ de sorte que $(g_k)_{k\in\mathrm{N}}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives, et soit $g = \lim\limits_{k\to\infty} g_k$ (g est mesurable d'après la proposition 1.2.8). Si $n \leq k$, on a $f_n^k \leq f_n \leq f_k$, et, par suite, $f_n^k \leq g_k \leq f_k \leq f$, et, en passant à la limite quand $k \to +\infty$, il vient $f_n \leq g \leq f$, puis, en faisant tendre n vers l'infini, $f = g$. D'après la proposition 2.1.7, on a donc $\int f d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int g_k d\mu$. Puisque $g_n \leq f_n$, on a $\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu$ (proposition 2.1.8) d'où $\int f d\mu \leq \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ et comme $f_n \leq f$, la preuve est achevée ■

Remarque 2.1.12 *Il faut noter que ce théorème est en général* **faux** *pour les suites décroissantes. Par exemple, si $A_n = [n, +\infty[$, la suite χ_{A_n} est décroissante et pour tout n on a $\int \chi_{A_n} d\mu = +\infty$ alors que χ_{A_n} tend vers zéro. Néanmoins, nous verrons plus tard (théorème 2.2.4) que le résultat est vrai dans ce cas s'il existe n tel que $\int f_n d\mu < +\infty$.*

Corollaire 2.1.13 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, f_n, $n \in \mathrm{N}$, et f des fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathrm{R}}_+$.*
1) $\int \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n\Big) d\mu = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int f_n d\mu$.
2) Si $(A_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints on a $\int_{\bigcup_{n\in\mathrm{N}} A_n} f d\mu = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu$.

Théorème 2.1.14 (lemme de Fatou) *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathrm{R}}_+$. Alors*

$$\int {}_{n\to\infty} f_n d\mu \le {}_{n\to\infty}\int f_n d\mu. \tag{1.5}$$

Demonstration. En effet, si on pose $g_n = \inf\limits_{k\ge n} f_k$, g_n est mesurable par la proposition 1.2.8, et, par définition de la , on a $\lim\limits_{n\to\infty} g_n =_{n\to\infty} f_n$ et cette dernière fonction est mesurable. Alors, d'après le théorème de Beppo–Lévi (théorème 2.1.11), on a $\int \Big({}_{n\to\infty} f_n\Big) d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int g_n d\mu$, la suite $(g_n)_{n\in\mathrm{N}}$ étant croissante. Comme, pour tout $k \ge n$, on a $\int g_n d\mu \le \int f_k d\mu$ (proposition 2.1.8), il vient $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n d\mu \le_{n\to\infty} \int f_n d\mu$, ce qui achève la preuve ■

2.2 Intégration des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$ et C

Définition 2.2.1 *Soit $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré ($\mu \ge 0$).*
1) On dit qu'une fonction mesurable f à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$ est **intégrable** *si les fonctions mesurables $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = -\inf(f, 0)$ sont intégrables, ou, ce qui revient au même, si la fonction mesurable $|f|$ est intégrable. Si cette condition est remplie, on appelle* **intégrale de** *f le réel* **fini** *$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int |f| d\mu$.*
2) On dit qu'une fonction f à valeurs dans C est **intégrable** *si les fonctions mesurables $\Re\mathrm{e} f$ et $\Im\mathrm{m} f$ sont intégrables, ou, ce qui revient au même, si la fonction mesurable $|f|$ est intégrable. Si cette condition est remplie, on appelle intégrale de f le nombre complexe $\int f d\mu = \int \Re\mathrm{e} f d\mu + \int \Im\mathrm{m} f d\mu$.*

Proposition 2.2.2 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et f et g deux fonctions mesurables sur E.*
1) Si f et g sont égales presque partout, alors, si f est intégrable, g l'est aussi et $\int f d\mu = \int g d\mu$.
2) Si f et g sont intégrables et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, et si $f \leq g$ presque partout, alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
3) Si f est intégrable, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, λf est intégrable et $\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu$.
4) Si f est intégrable, $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$.
5) Si f et g sont intégrables, alors $f+g$ l'est aussi et $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

Demonstration. Le premièrement résulte aussitôt de la définition 2.2.1 et de la proposition 2.1.10. Le 2) résulte lui de la définition 2.2.1 et de la proposition 2.1.8, et il en est de même du 3), et le 4) découle de la définition 2.2.1 . Vérifions maintenant le 5). Si f et g sont à valeurs complexes, en prenant les parties réelles et imaginaires, on se ramène aussitôt au cas où elles sont à valeurs réelles. De plus puisque $f+g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$, il suffit de montrer que, lorsque f et g sont positives on a $\int (f-g) d\mu = \int f d\mu - \int g d\mu$: remarquons tout d'abord que $f-g$ est intégrable car $(f-g)^+ \leq f$ et $(f-g)^- \leq g$. Posons alors $A = \{f \geq g\}$ et $B = \{f < g\}$. D'après la proposition 2.1.8, on a $\int (f-g)\chi_A d\mu + \int g\chi_A d\mu = \int f\chi_A d\mu$ et $\int (g-f)\chi_B d\mu + \int f\chi_B d\mu = \int g\chi_B d\mu$. Comme $(f-g)^+ = (f-g)\chi_A$ et $(f-g)^- = (g-f)\chi_B$, il vient $\int (f-g) d\mu = \int f\chi_A d\mu + \int f\chi_B d\mu - \left(\int g\chi_A d\mu + \int g\chi_B d\mu\right)$ et la conclusion résulte de la proposition 2.1.8 ■

Remarque 2.2.3 *Le 1) de la proposition* 2.2.2 *montre que la définition de fonction mesurable définie presque partout donnée à la remarque* 1.3.11 *est tout-à-fait justifiée du point de vue de l'intégration des fonctions mesurables.*

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Beppo–Levi pour les suites décroissantes:

Théorème 2.2.4 *(*Theoreme de Beppo–Levi pour les suites decroissantes*) Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré ($\mu \geq 0$) et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite* **décroissante** *de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. S'il existe un entier n tel que f_n soit intégrable, alors pour toute fonction mesurable f telle que $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ presque partout, on a:*

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstration. D'après la proposition 2.2.2 (et la remarque 1.3.11), nous pouvons supposer que $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ pour tout $x \in E$. Supposons alors par exemple que $\int f_1 d\mu < +\infty$. La suite $(f_1 - f_n)$ étant croissante, d'après le théorème de Beppo–Levi (théorème 2.1.11), on a $\int (f_1 - f) d\mu = \lim_{n \to \infty} \int (f_1 - f_n) d\mu$. Puisque $0 \leq f \leq f_n \leq f_1$, d'après la proposition 2.1.4, f ainsi que les f_n sont intégrables, et, la proposition 2.2.2 donne $\int (f_1 - f) d\mu = \int f_1 d\mu - \int f d\mu$ et $\int (f_1 - f_n) d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_n d\mu$, ce qui prouve le théorème ■

Corollaire 2.2.5 (theoreme de Beppo−Levi pour les suites monotones reelles) *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in \mathrm{N}}$ une suite* **monotone** *de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathrm{R}}$. S'il existe $n \in \mathrm{N}$ tel que f_n soit intégrable, alors, pour toute fonction mesurable f telle que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ presque partout, on a*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstration. Ceci résulte aussitôt des théorèmes 2.1.11 et 2.2.4 car si (f_n) est monotone, les suites (f_n^+) et (f_n^-) le sont aussi ■

Définition 2.2.6 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré ($\mu \geq 0$) et A une partie mesurable de E. On dit qu'une fonction mesurable f de E dans $\overline{\mathrm{R}}$ ou C est* **intégrable sur** *A si la fonction mesurable $f\chi_A$ est intégrable. Si cette condition est remplie, on appelle intégrale de f sur A le nombre complexe $\int_A f d\mu = \int f\chi_A d\mu$.*

Proposition 2.2.7 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, A et B deux parties mesurables de E et f une fonction mesurable de E dans $\overline{\mathrm{R}}$ ou C. Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) f est intégrable sur A et B;
(ii) f est intégrable sur $A \cup B$.
De plus, si ces conditions sont remplies, on a:

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu - \int_{A\cap B} f d\mu.$$

Demonstration. Puisque $|f|\chi_A \leq |f|\chi_{A\cup B}$ et$|f|\chi_B \leq |f|\chi_{A\cup B}$, la proposition 2.1.4 montre que (ii) implique (i). D'autre part, $|f|\chi_{A\cup B} = |f|\chi_A + |f|\chi_B - |f|\chi_{A\cap B} \leq |f|\chi_A + |f|\chi_B$, et la même proposition montre la réciproque. Enfin la dernière assertion résulte de la proposition 2.2.2 puisque $f\chi_{A\cup B} = f\chi_A + f\chi_B - f\chi_{A\cap B}$ ■

Nous pouvons maintenant énoncer le principal théorème de convergence du chapitre:

Théorème 2.2.8 (Theoreme de convergence dominee de Lebesgue) *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré ($\mu \geq 0$) et $(f_n)_{n\in \mathrm{N}}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$ ou C. On suppose que:*
-(i) il existe une fonction mesurable f de E dans $\overline{\mathrm{R}}$ ou C telle que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ presque partout;
-(ii) il exsite une fonction **intégrable** *g de E dans $\overline{\mathrm{R}}_+$ telle que, $\forall n \in \mathrm{N}$, on ait $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout.*
Alors les fonctions f_n et f sont intégrables et

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{2.6}$$

Demonstration. D'après la proposition 2.2.2, il suffit de faire la preuve dans le cas où les propriétés (i) et (ii) ont lieu partout, et cette même proposition implique que les fonctions f_n et f sont intégrables. Démontrons donc la formule 2.6.

1 °) *Cas où les fonctions sont à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}$. Les fonctions $g+f_n$ étant à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, la lemme de Fatou (théorème 2.1.14) donne $\int(f+g)d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\int(f_n+g)d\mu$, et, d'après la proposition 2.2.2, on donc $\int fd\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\int f_n d\mu$. De la même manière, en considérant les fonctions positives $g-f_n$, on obtient $\overline{\lim}_{n\to\infty}\int f_n d\mu \leq \int fd\mu$, ce qui donne la formule cherchée.

2 °) *Cas général.* En remarquant que $|\Re e f| \leq \sqrt{2}g$ et $|\Im m f| \leq \sqrt{2}g$, on voit aussitôt qu'il suffit d'appliquer le 1 °) aux fonctions mesurables $\Re e f$ et $\Im m f$ ∎

Corollaire 2.2.9 *Soient $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré, f une fonctionintégrable de E dans $\mathbb{C}$, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$ deux à deux disjoints. Alors*

$$\int_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n} fd\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n} fd\mu.$$

2.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème 2.3.1 *Soient $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré ($\mu \geq 0$), Λ un espace métrique et f une application de $E\times\Lambda$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que:*
-(i) pour tout $\lambda\in\Lambda$, la fonction $x\longmapsto f(x,\lambda)$ est mesurable;
-(ii) pour presque tout $x\in E$, la fonction $\lambda\longmapsto f(x,\lambda)$ est continue au point $\lambda_0\in\Lambda$;
-(iii) il existe une fonction intégrable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que pour tout $\lambda\in\Lambda$ on ait $|f(x,\lambda)|\leq g(x)$ presque partout.
Alors, pour tout $\lambda\in\Lambda$, la fonction $x\longmapsto f(x,\lambda)$ est intégrable et la fonction $F:\lambda\longmapsto \int f(x,\lambda)d\mu(x)$ est continue au point λ_0.

Demonstration. La première assertion du théorème est une conséquence de la proposition 2.2.2 et la seconde résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue (théorème 2.2.8) en considérant une suite (λ_n) dans Λ qui converge vers λ_0, et la suite de fonctions $\varphi_n(x)=f(x,\lambda_n)$ ∎

Théorème 2.3.2 *Soient $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $E\times I$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que:*
-(i) pour tout $\lambda\in I$, la fonction $x\longmapsto f(x,\lambda)$ est intégrable;
-(ii) pour presque tout $x\in E$, la fonction $\lambda\longmapsto f(x,\lambda)$ est dérivable en tout point de I et, pour tout $\lambda\in I$, il existe une fonction mesurable $x\longmapsto f'_\lambda(x,\lambda)$, telle que chaque fois que $\lambda\longmapsto f(x,\lambda)$ est dérivable, on ait, pour tout $\lambda\in I$, $f'_\lambda(x,\lambda)=\dfrac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}$;

-*(iii) il existe une fonction intégrable g de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que, pour tout $\lambda \in I$, on ait $|f'_\lambda(x,\lambda)| \leq g(x)$, presque partout.*
Alors, pour tout $\lambda \in I$, la fonction $x \longmapsto f'_\lambda(x,\lambda)$ est intégrable et la fonction $F : \lambda \longmapsto F(\lambda) = \int f(x,\lambda)d\mu(x)$ est dérivable en tout point de I, et sa dérivée $F'(\lambda)$ au point $\lambda \in I$ est donnée par $F'(\lambda) = \int f'_\lambda(x,\lambda)d\mu(x)$.

Demonstration. La première assertion résulte de la proposition 2.2.2. Montrons que F est dérivable en un point $\lambda_0 \in I$. Soit (h_n) une suite de nombres réels qui tend vers 0, et définissons la fonction φ_n par: $\varphi_n(x) = \frac{1}{h_n}\Big[f(x,\lambda_0 + h_n) - f(x,\lambda_0)\Big]$. D'après le théorème des accroissements finis, l'hypothèse (ii) implique que pour presque tout x, on a $|\varphi_n(x)| \leq g(x)$. Comme, par hypothèse, $\varphi_n(x)$ tend presque partout vers $f'_\lambda(x,\lambda_0)$, la conclusion résulte aussitôt du théorème de convergence dominée de Lebesgue (théorème 2.2.8 ∎

Remarque 2.3.3 *1) Le théorème* 2.3.2*, qui est connu sous le nom de théorème de dérivation sous le signe somme, s'étends immediatement aux intégrales dépendant de plusieurs paramètres et aux dérivées partielles.*
2) En particulier, si on remplace dans le théorème l'intervalle I par un ouvert de $\mathbb{C}$ et la condition $f(x,\lambda)$ dérivable par $f(x,z)$ holomorphe en z pour presque tout x, on obtient que la fonction F est holomorphe.

Chapitre 3

ESPACES L^{p}

Comme dans le chapitre précédent, les espaces mesurés que nous considérons dans ce chapitre sont toujours munis d'une mesure **positive**.

3.1 Les espaces $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ et $L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$

Définition 3.1.1 *Soit $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, μ étant une mesure positive. L'espace vectoriel sur* C *des fonctions intégrables (à valeurs complexes) sur E est noté $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)$. Cet espace sera toujours muni de la semi-norme $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. De plus, l'application $f \longmapsto \int f d\mu$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ muni de $\|f\|_1$.*

Le fait que $\|f\|_1$ soit une semi-norme résulte de la proposition 2.2.2, et il en est de même de la continuité de $f \longmapsto \int f d\mu$ ∎

Remarque 3.1.2 *Il faut noter que, en général, $\|f\|_1$ n'est pas une norme. Pour que $\|f\|_1$ soit une morme, il faut et il suffit que le seul ensemble négligeable soit $\emptyset$ (proposition* 2.1.10*).*

Exemple 3.1.3 *1) Si on prend pour espace mesuré* R *muni de la mesure de Lebesgue, $\|f\|_1$ n'est pas une norme.*
2) Si on prend $\mathcal{M} = \mathcal{P}(E)$ et μ la mesure discrète, alors $\|f\|_1$ est une norme.

Proposition 3.1.4 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $(u_n)_{n \in \mathrm{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}_1(E, \mathcal{M}, \mu)$ telle que la série $\sum u_n$ soit* **normalement convergente** *(i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_1 < +\infty$). Alors, pour presque tout $x \in E$ la série $\sum u_n(x)$ est absoluement convergente (i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)| < +\infty$) et la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|$ est intégrable.*

Demonstration. Pour tout $x \in E$ posons $f(x) = \sum_{n+0}^{\infty} |u_n(x)|$ de sorte que f est une fonction mesurable positive (proposition 1.2.8). D'après le corollaire 2.1.13, on a $\int f d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_1 < +\infty$, et la conclusion résulte de la proposition 2.1.9 ∎

Théorème 3.1.5 (Theoreme de Riesz-Fischer) *Soit $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Alors l'espace semi-normé $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ est complet.*

Demonstration. Pour cela nous allons montrer que toute série dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ qui est normalement convergente est convergente. Soit donc $\sum u_n$ une série dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ qui est normalement convergente. D'après la proposition 3.1.4, pour presque tout $x \in E$ la série $\sum u_n(x)$ est convergente, et, d'après la remarque 1.3.11, la formule $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ définie une fonction mesurable sur E, qui, d'après la proposition 3.1.4, est intégrable. La conclusion s'obtient alors immédiatement puisque $\left\| U - \sum_{k=0}^{n} u_k \right\|_1 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_n\|_1$ (proposition 2.2.2) qui tend vers zéro quand $n \longrightarrow +\infty$ ∎

Une autre manière d'énoncer le théorème 3.1.5 est la suivante:

Théorème 3.1.6 (Espace de Banach $L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$) *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{N}_1$ le noyau de la semi-norme $\| \ \|_1$. Alors l'espace normé quotient $L^1(E, \mathcal{M}, \mu) = \mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)/\mathcal{N}_1$ est un espace de Banach.*

Proposition 3.1.7 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)$.*
1) Si la série $\sum f_n$ est normalement convergente, il existe $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ telle que la série $\sum f_n$ converge, dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)$, vers f et telle que, pour presque tout $x \in E$, on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
2) Si la suite $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)$, alors il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k \in \mathrm{N}}$ de la suite $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ qui converge presque partout vers f.

Demonstration. Le 1) n'est autre que la l'expression précise de la preuve de du théorème 3.1.5. Montrons le 2). Puisque la suite (f_n) converge vers f il résulte du critère de Cauchy qu'il existe une suite extraite (f_{n_k}) de (f_n) telle que $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < +\infty$. Alors la série $f_{n_0} + \sum_{k \geq 1} (f_{n_k} - f_{n_{k-1}})$ vérifie les hypothèses du 1) et il existe $u \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ telle que cette série converge normalement et presque partout vers u. Puisque les sommes partielles de cette série sont f_{n_k}, on a nécéssairement $u = f$ (proposition 2.1.10) ce qui achève la preuve ∎

Remarque 3.1.8 *1) Dans les conditions de la proposition* 3.1.7, *il est* **faux en général** *que la suite* (f_n) *converge presque partout vers* f.
Par exemple, considérons la suite définie sur $[0,1]$ *comme suit:* $f_1 = \chi_{[0,1]}, f_2 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_3 = \chi_{[1/2,1]}$, $f_4 = 2\chi_{[0,1/2^2]}$, $f_5 = 2\chi_{[1/2^2,2/2^2]}$, $f_6 = 2\chi_{[2/2^2,3/2^2]}$, $f_7 = \chi_{[3/2^2,1]}$, $f_8 = 3\chi_{[0,1/2^3]}$, $,f_{17} = 4\chi_{[0,1/2^4]}$, . *Il est clair que* (f_n) *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{M},\mu)$ *bien qu'elle ne converge pas simplement vers* 0 *et, même, que l'on ne puisse pas la majorer (indépendamment de* n*) par une fonction intégrable.*
2) De la même façon, si une suite (f_n) *converge partout vers une fonction* f, *toutes ces fonctions étant intégrables, il est faux, en général, que la suite* (f_n) *converge vers* f *en norme* $\| \ \|_1$.
Par exemple, la suite (f_n) *définie sur* $[0,1]$ *par*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } x \in [0,1/n], \\ 2n - n^2x & \text{si } x \in [1/n,2/n], \\ 0 & \text{si } x \in [2/n,1], \end{cases}$$

converge simplement vers 0 *bien que, pour tout* n, $\int f_n d\mu = 1$ *(*μ *étant la mesure de Lebesgue).*

Le théorème de convergence dominée donne, à partir d'une hypothèse de convergence presque partout, une condition suffisante (non nécéssaire) de convergence dans $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{M},\mu)$:

Théorème 3.1.9 *(*Theoreme de convergence dominee de Lebesgue*) Soient* $(E,\mathcal{M},\mu)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* E *dans* $\overline{\mathrm{R}}$ *ou* C. *On suppose que:*
(i) la suite (f_n) *converge presque partout vers une fonction (nécessairement mesurable)* f;
(ii) il existe une fonction intégrable g *de* E *dans* $\overline{\mathrm{R}}_+$ *telle que, pour tout* n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *presque partout.*
Alors les f_n *et* f *appartiennent à* $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{M},\mu)$ *et la suite* (f_n) *converge vers* f *dans* $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{M},\mu)$.

Demonstration. En effet, si on pose $h_n = \sup_{k\geq n} |f_k - f|$, la suite (h_n) est une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui tend vers zéro presque partout, et, comme $h_n \leq 2g$, $\forall n$, d'après le théorème de Beppo-Levi pour les suites décroissantes (théorème 2.2.4), $\int h_n d\mu$ tend vers zéro ce qui prouve le théorème ∎

Proposition 3.1.10 *Soit* $(E,\mathcal{M},\mu)$ *un espace mesuré.*
1) Soient f *et* g *deux fonctions de* $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{M},\mu)$ *à valeurs réelles. Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(a) $f \leq g$ *presque partout;*
(b) $\forall A \in \mathcal{M}$, $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$.
2) Soit $f \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{M},\mu)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) $f = 0$ *presque partout;*
(ii) $\forall A \in \mathcal{M}$, $\int_A f d\mu = 0$.

Demonstration. Le 2) résulte du 1) en considérant parties réelles et imaginaires, car si f est réelle, $f = 0$ presque partout équivaut à $f \leq 0$ presque parout et $-f \leq 0$ presque partout. Par ailleurs, nous savons déjà que (a) entraîne (b) (Proposition 2.2.2), il nous suffit donc de vérifier que (b) implique (a). Soit alors, pour tout $n \in \mathrm{N}$, $A_n = \left\{f - g \geq \frac{1}{n}\right\}$. D'après la proposition 2.2.2, on a $\frac{1}{n}\mu(A) \leq \int_{A_n} f d\mu - \int_{A_n} g d\mu$, et l'hypothèse donne donc $\mu(A_n) = 0$, et par suite $\mu(\{f - g \geq 0\}) = 0$, ce qui achève la preuve ∎

Proposition 3.1.11 *Soit $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré.*
1) Soit $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:
(a) $\left|\int f d\mu\right| = \|f\|_1$;
(b) Il existe $\alpha \in \mathrm{C}$, $|\alpha| = 1$, tel que $\alpha f = |f|$ presque partout.
2) Supposons $\mu(E) < +\infty$. Soit S un sous-ensemble fermé de C. Si, pour tout $A \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(A) \neq 0$, on a $\frac{1}{\mu(A)}\int_A f d\mu \in S$, alors, pour presque tout $x \in E$, $f(x) \in S$.

Demonstration. Il est clair que (b) implique (a), montrons donc la réciproque. Soit $\alpha \in \mathrm{C}$, $|\alpha| = 1$, tel que $\alpha\left(\int f d\mu\right) = \left|\int f d\mu\right|$. Alors, $\left|\int f d\mu\right| = \int \mathfrak{Re}(\alpha f) d\mu = \int |f| d\mu$, et comme $\mathfrak{Re}(\alpha f) \leq |f|$, on a $|f| - \mathfrak{Re}(\alpha f) = 0$ presque partout, ce qui donne la conclusion. Démontrons maintenant le 2). Il suffit de voir que si $D = D(\alpha, r)$ est un disque ouvert contenu dans $\mathrm{C}\backslash S$ et si $A = f^{-1}(D)$, on a $\mu(A) = 0$. Or si $\mu(A) > 0$, on a

$$\left|\frac{1}{\mu(A)}\int_A f d\mu - \alpha\right| \leq \frac{1}{\mu(A)}\int_A |f - \alpha| d\mu \leq r,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse ∎

3.2 Des inégalités de convexité

Théorème 3.2.1 (Inegalite de Jensen) *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré* **de mesure finie** *(i.e. $\mu(E) < +\infty$) et $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ à valeurs dans un intervalle $]a, b[$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Si φ est une fonction* **convexe** *de $]a, b[$ dans R, et si $\varphi \circ f$ est intégrable, on a:*

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(E)}\int f d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(E)}\int (\varphi \circ f) d\mu. \tag{2.1}$$

Demonstration. Quite à remplacer μ par $\frac{1}{\mu(E)}\mu$, on peut supposer $\mu(E) = 1$. Remarquons tout d'abord que, toute fonction convexe sur un intervalle ouvert étant continue, la fonction $\varphi \circ f$ est mesurable (proposition 1.2.3). Posons $c = \int f d\mu$ de sorte que $a < c < b$ (propositions 2.2.2 et 2.1.10). φ étant convexe, il existe un nombre β tel que, pour $a < s < c < u < b$, on ait

$$\frac{\varphi(c) - \varphi(s)}{c - s} \leq \beta \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(c)}{u - c},$$

c'est-à-dire, $\varphi(s) \geq \varphi(c) + \beta(s - c)$ pour $a < s < b$. Par conséquent, pour $x \in E$, on a $\varphi(f(x)) - \varphi(c) - \beta(f(x) - c) \geq 0$, et la formule 2.1 s'obtient en intégrant cette dernière inégalité ∎

Remarquons que le fait que $\varphi \circ f$ soit intégrable n'est pas une conséquence des autres hypothèses. Mais si tel n'est pas le cas, la dernière inégalité de la preuve reste valable, $(\varphi \circ f)^-$ est intégrable, et, par suite, on peut considérer que la formule 2.1 reste valable, le second membre étant égal à $+\infty$.

Corollaire 3.2.2 *Soit $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie.*
a) Si f est intégrable à valeurs réelles, on a:

$$\exp\left\{\frac{1}{\mu(E)} \int f d\mu\right\} \leq \frac{1}{\mu(E)} \int e^f d\mu. \tag{2.2}$$

b) Si g est mesurable à valeurs dans $]0, +\infty[$, on a:

$$\exp\left\{\frac{1}{\mu(E)} \int (\log g) d\mu\right\} \leq \frac{1}{\mu(E)} \int g d\mu. \tag{2.3}$$

Demonstration. La formule 2.2 est clairement un cas particulier de la formule 2.1. La formule 2.3 s'en déduit aussitôt dans le cas où $\log g$ est intégrable. Si g n'est pas intégrable, 2.3 est trivialement vraie; si par contre g est intégrable mais $\log g$ ne l'est pas alors le premier membre de 2.3 est égal à $-\infty$ et la formule est encore vraie ∎

Corollaire 3.2.3 *Soient x_i et α_i, $1 \leq i \leq n$, des nombres réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Alors*

$$\begin{aligned} (x_1 x_2 x_n)^{1/n} &\leq \tfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + + x_n), \\ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_n^{\alpha_n} &\leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + + \alpha_n x_n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Demonstration. Soit $E = \{p_1, , p_n\}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(E)$ et $\mu(\{p_i\}) = 1/n$. Alors la formule 2.2 appliquée à la fonction $f(p_i) = y_i$ donne

$$\exp\left\{\frac{1}{n}(y_1 + + y_n)\right\} \leq \frac{1}{n}(e^{y_1} + + e^{y_n}),$$

et on obtient la première formule en prenant $x_i = e^{y_i}$. De la même manière, la seconde formule de 2.4 s'obtient en prenant $\mu(\{p_i\}) = \alpha_i$ et en appliquant 2.3 à la fonction $g(p_i) = x_i$ ∎

Définition 3.2.4 *On dit que deux nombres réels strictement positifs p et q sont des* **exposants conjugués** *si*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

En particulier, on a $1<p<+\infty$ et $1<q<+\infty$.

Théorème 3.2.5 *Soient $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré et p et q deux exposants conjugués. Alors si f et g sont deux fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, on a:*

$$\int fgd\mu \leq \Big(\int f^p d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int g^q d\mu\Big)^{1/q} \tag{2.5}$$

(inegalite de Hölder) *et*

$$\Big(\int (f+g)^p d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int f^p d\mu\Big)^{1/p}+\Big(\int g^p d\mu\Big)^{1/p} \tag{2.6}$$

(inegalite de Minkowski).
De plus on a égalité dans 2.5 *si et seulement si*

$$\frac{f^p}{\int f^p d\mu}=\frac{g^q}{\int g^q d\mu}$$

presque partout.

Demonstration. Montrons tout d'abord l'inégalité de Hölder. Si l'une des fonctions f^p ou g^q n'est pas intégrable, l'inégalité est évidente. Supposons donc qu'elles le sont toutes les deux. Si $\int f^p d\mu = 0$ ou si $\int g^q d\mu = 0$ le résultat est à nouveau évident (proposition 2.1.10). Alors, en supposant ces intégrales non nulles, la seconde formule de 2.4 donne

$$\frac{f(x)g(x)}{\Big(\int f^p d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int g^q d\mu\Big)^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\frac{f(x)^p}{\int f^p d\mu}+\frac{1}{q}\frac{g(x)^q}{\int g^q d\mu},$$

et, pour conclure, il suffit d'intégrer les deux membres de cette dernière inégalité. Vérifions maintenant l'inégalité de Minkowski. En remarquant que $|f+g|^p \leq |f||f+g|^{p-1}+|g||f+g|^{p-1}$, et que $q(p-1)=p$, l'inégalité de Hölder donne

$$\int (f+g)^p d\mu \leq \Big(\int f^p d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int (f+g)^p d\mu\Big)^{1/q}+\Big(\int g^p d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int (f+g)^p d\mu\Big)^{1/q},$$

ce qui montre 2.6. Enfin la dernière assertion de la proposition 3.2.5 résulte du fait que dans l'inégalité de convexité $u^{1/p}v^{1/q} \leq \frac{1}{p}u+\frac{1}{q}v$ on a égalité si et seulement si $u=v$ ∎

3.3 Les espaces $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{M},\mu)$ et $L^p(E,\mathcal{M},\mu)$

Définition 3.3.1 *Soient $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré ($\mu \geq 0$) et $p \in [1,+\infty[$. On note $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{M},\mu)$ l'espace vectoriel sur* C *des fonctions mesurables de E dans* C *telles que $|f|^p$ soit intégrable. Pour toute $f \in \mathcal{L}^p(E,\mathcal{M},\mu)$, on note $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.*

Théorème 3.3.2 *Soient $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré et p et q deux exposants conjugués (définition 3.2.4).*
*1) (*inegalite de Hölder*) Si $f \in \mathcal{L}^p(E,\mathcal{M},\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(E,\mathcal{M},\mu)$, on a $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$.*
*2) (*inegalite de Minkowski*) Si f et g sont dans $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{M},\mu)$, on a $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. En particulier, l'application $f \longmapsto \|f\|_p$ est une semi-norme dans $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{M},\mu)$.*

Demonstration. Ceci est exactement le théorème 3.2.5 ∎

Proposition 3.3.3 *Soit $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré.*
1) Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}_+$, on a:

$$\left(\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int f_n^p d\mu\right)^{1/p} \leq +\infty.$$

2) Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ d'éléments de $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{M},\mu)$ $(1 \leq p < +\infty)$, on a $\left\|\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|\right\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty}\|f_n\|_p$.

Demonstration. Le 2) étant un cas particulier du 1), montrons ce dernier. D'après l'inégalité de Minkowski (théorème 3.2.5), si $g_n = \sum_{n=0}^{n} f_k$, on a $\left[\int g_n^p d\mu\right]^{1/p} \leq \sum_{k=0}^{n}\left[\int f_k^p d\mu\right]^{1/p} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int f_k^p d\mu\right]^{1/p}$, et comme la suite (g_n) est croissante et converge simplement vers $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, le théorème de Beppo-Levi (théorème 2.1.11) donne la conclusion ∎

Théorème 3.3.4 (Theoreme de Riesz-Fischer) *$(E,\mathcal{M},\mu)$ étant un espace mesuré, pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace semi-normé $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{M},\mu)$ est complet.*

Demonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{M},\mu)$ telle que la série $\sum f_n$ soit normalement convergente, et montrons qu'elle est convergente. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}|f_n(x)|$, f est mesurable (proposition 1.2.8), et la proposition 3.3.3 montre que f^p est intégrable. Par suite, la série $\sum f_n$ est presque partout absolument convergente, et si A est l'ensemble des points de E où elle n'est pas absoluement convergente, A est mesurable ($A = \{f = +\infty\}$) et $\mu(A) = 0$. Posons alors $u_n = f_n\chi_A$ et $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. Alors U est mesurable (proposition 1.2.8), et d'après la proposition 3.3.3, on a

$$\left\|U - \sum_{k=0}^{n} f_k\right\|_p = \left\|U - \sum_{k=0}^{n} u_k\right\|_p = \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right\|_p \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\|f_k\|_p,$$

ce qui montre que $U \in \mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$ et que la série $\sum f_n$ converge vers U ∎

Une autre manière d'énoncer le théorème de Riesz-Fischer est la suivante:

Théorème 3.3.5 (theoreme de Riesz-Fischer) *Soit $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Si $\mathcal{N}_p$ désigne le noyau de la semi-norme $\| \, \|_p$, $1 \leq p < +\infty$, sur $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$, l'espace normé quotient $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)/\mathcal{N}_p$ est un espace de Banach que l'on note $L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$.*

Corollaire 3.3.6 *Soit $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. L'espace $L^2(E, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire hermitien étant donne par $< f, g >= \int f\overline{g}d\mu$.*

Demonstration. En effet, il est clair, d'après l'inégalite de Hölder (théorème 3.3.2), que $< f, g >$ est un produit saclaire bien défini sur $L^2(E, \mathcal{M}, \mu)$. La conclusion résulte donc du théorème de Riesz-Fischer puisque la norme associée à ce produit scalaire est la norme $\| \, \|_2$ ∎

La proposition 3.1.7 se généralise sans difficultés aux espaces $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$, $p < +\infty$:

Proposition 3.3.7 *Soit $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$.*
1) Si la série $\sum f_n$ est normalement convergente dans $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$, il existe $f \in \mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$ telle que la série $\sum f_n$ converge dans $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$ vers f et telle que, pour presque tout $x \in E$, on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
2) Si la suite $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \in \mathrm{N}}$ de la suite $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ qui converge presque partout vers f.

Demonstration. Compte tenu de la preuve du théorème de Riesz-Fischer, il suffit de reprendre pas à pas la preuve de la proposition 3.1.7 ∎

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut aussi s'exprimer en terme de convergences dans $L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$:

Théorème 3.3.8 (Theoreme de convergence dominee de Lebesgue) *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$, une suite de fonctions mesurables de E dans C. Soit $p \in [1, +\infty[$. On suppose que:*
(i) il existe une fonction mesurable de E dans C telle que pour persque tout $x \in E$, on a $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$;
(ii) il existe une fonction mesurable g de E dans $\overline{\mathrm{R}}_+$ telle que g^p est intégrable et telle que, pour tout $n \in \mathrm{N}$, on ait $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout.
Alors, les fonctions f_n et f appartiennent à $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$.

Demonstration. Il résulte aussitôt de (ii) que les f_n et f sont dans $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$. Pour tout n, posons $h_n = \sup_{k \geq n} |f_n - f|$. Il est clair que $h_n^p \leq 2^p g^p$, et par suite $h_n \in \mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$; par ailleurs, la suite $(h_n^p)_{n \in \mathrm{N}}$ est décroissante et tend vers zéro persque partout, donc, d'après le théorème de Beppo–Levi pour les suites décroissantes (theorème 2.2.4) on a $\lim_{n \to \infty} \|h_n\|_p = 0$, et comme $|f_n - f| \leq h_n$, la preuve est terminée ■

Proposition 3.3.9 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. L'espace des fonctions étagées intégrables est un sous–espace dense de $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$. En d'autres termes, l'ensemble des fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables de mesures finies est total dans $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$.*

Demonstration. En effet, il résulte des théorèmes 1.2.13 et 3.3.8 que toute fonction positive de $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$ est limite, dans $L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$, de fonctions étagées. Pour conclure, il suffit alors, pour les fonctions réelles de séparer parties positives et négatives et, pour les fonctions complexes parties réelles et imaginaires ■

Par exemple, dans le cas de la mesure de Lebesgue sur R ce résultat se traduit par:

Corollaire 3.3.10 *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions caractéristiques d'intervalles ouverts bornés est total dans $\mathcal{L}^p(\mathrm{R})$; ou encore, l'espace vectoriel des fonctions en escalier à support compact est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathrm{R})$.*

En général, il n'y a pas de relations d'inclusions entre deux espaces $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$. Par exemple, la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ appartient à $\mathcal{L}^2(\mathrm{R}) \backslash \mathcal{L}^1(\mathrm{R})$ et la fonction $g(x) = \dfrac{1}{|x|^{1/2}(1+|x|)}$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathrm{R}) \backslash \mathcal{L}^2(\mathrm{R})$. De même, si $1 \leq r < p \leq q < s < +\infty$, $\mathcal{L}^p(\mathrm{R}) \cap \mathcal{L}^q(\mathrm{R})$ n'est pas contenu dans $\mathcal{L}^r(\mathrm{R}) \cup \mathcal{L}^s(\mathrm{R})$. Dans certains cas particuliers, il y a toutefois des relations faciles à obtenir:

Proposition 3.3.11 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $p, q \in [1 + \infty[$.*
1) Si $p \leq r \leq q$, on a $\mathcal{L}^r(E, \mathcal{M}, \mu) \supset \mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu) \cap \mathcal{L}^q(E, \mathcal{M}, \mu)$.
2) Si $\mu(E) < +\infty$, et si $p \leq q$, on a $\mathcal{L}^q(E, \mathcal{M}, \mu) \subset \mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$ (en d'autres termes, les $\mathcal{L}^p$ sont décroissants).
3) Si $(E, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace discret (i.e. μ est la mesure discrète), et si $p \leq q$, on a $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu) \subset \mathcal{L}^q(E, \mathcal{M}, \mu)$ (i.e. les $\mathcal{L}^p$ sont croissants).

Demonstration. Vérifions tout d'abord le 1): si $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$, si $A_1 = \{|f| < 1\}$ et $A_2 = \{|f| \geq 1\}$, on a $f = f_1 + f_2$ avec $f_i = f\chi_{A_i}$; alors, $|f_1|^r \leq |f_1|^p$ et $|f_2|^r \leq |f_2|^q$, ce qui montre que $f \in \mathcal{L}^r$. Vérifions maintenant le 2): si $f \in \mathcal{L}^q$, en reprenant les même notations, on a $|f_1|^p \leq 1$, donc, $f_1 \in \mathcal{L}^p$ (puisque $\mu(E) < +\infty$) et $|f_2|^p \leq |f_2|^q$, et $f_2 \in \mathcal{L}^p$. Enfin le 3) se voit de manière similaire: si $f \in \mathcal{L}^p$, avec les même notations, on a $|f_1|^q \leq |f_1|^p$, donc $f_1 \in \mathcal{L}^q$, et, puisque $|f|^p \geq \chi_{\{|f| \geq 1\}}$, A_2 est un ensemble fini ce qui implique que $f_2 \in \mathcal{L}^q$ ■

3.4 Les espaces $\mathcal{L}^\infty(E,\mathcal{M},\mu)$ et $L^\infty(E,\mathcal{M},\mu)$

Définition 3.4.1 *Soit $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré.*
1) On dit qu'une fonction mesurable de E dans $\mathbb{C}$ est **essentiellement bornée** *s'il existe un réel positif M tel que l'ensemble $\{|f| > M\}$ est négligeable. Si cette condition est réalisée, on dit que M est un* **majorant essentiel** *de f.*
2) L'ensemble des majorants essentiels d'une fonction mesurable f est de la forme $[\alpha,+\infty[$ et α s'appele la **borne supérieure essentielle** *de f et se note $\|f\|_\infty$.*
3) L'ensemble des fonctions essentiellement bornées de E dans $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel noté $\mathcal{L}^\infty(E,\mathcal{M},\mu)$, et l'application $f \longmapsto \|f\|_\infty$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^\infty(E,\mathcal{M},\mu)$.

En effet, il est clair que l'ensemble des majorants essentiels de f est une demi-droite réelle. Si α est la borne inf de cette demi-droite,, il existe une suite M_n de majorants essentiels de f qui converge vers α. Alors $\{|f| > \alpha\} = \bigcup\limits_n \{|f| > M_n\}$ est négligeable ∎

Remarque 3.4.2 *Notons que $\| \ \|_\infty$ n'est une norme que si le seul ensemble négligeable est l'ensemble vide.*

L'inégalité de Hölder se généralise immédiatement au couple $(1,\infty)$:

Proposition 3.4.3 *Soient $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré $f \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{M},\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^\infty(E,\mathcal{M},\mu)$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{M},\mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$ (*inegalite de Hölder*).*

Demonstration. En effet, fg est mesurable et $|fg| \leq |f|\|g\|_\infty$, ce qui donne le résultat ∎

Le théorème de Riesz–Fischer se généralise lui aussi au cas $\mathcal{L}^\infty$:

Théorème 3.4.4 (Theoreme de Riesz–Fischer) *Soit $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré. Alors l'espace semi-normé $\mathcal{L}^\infty(E,\mathcal{M},\mu)$ est complet.*

Demonstration. Si (f_n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^\infty(E,\mathcal{M},\mu)$, soit, pour tout n, f'_n une fonction mesurable presque partout égale à f_n telle que, pour tous n, m et tout $x \in E$, on ait $|f'_n(x) - f'_m(x) \leq \|f_n - f'_m\|_\infty$. Alors, la suite (f'_n) converge uniformément vers une fonction mesurable f qui appartient à $\mathcal{L}^\infty(E,\mathcal{M},\mu)$, et puisque $\|f_n - f\|_\infty = \|f'_n - f\|_\infty$, f_n tend vers f dans $\mathcal{L}^\infty(E,\mathcal{M},\mu)$ ∎

Comme dans les deux paragraphes précédents, on peut exprimer ce théorème de la manière suivante:

Théorème 3.4.5 (Theoreme de Riesz-Fischer) *$(E, \mathcal{M}, \mu)$ étant un espace mesuré, si $\mathcal{N}_\infty$ désigne le noyau de la semi-norme $\| \ \|_\infty$ sur $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{M}, \mu)$, l'espace normé quotient $L^\infty(E, \mathcal{M}, \mu) = \mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{M}, \mu)/\mathcal{N}_\infty$ est un espace de Banach.*

Proposition 3.4.6 *$(E, \mathcal{M}, \mu)$ étant un espace mesuré, l'espace vectoriel des fonctions étagées de E dans* C *est dense dans $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{M}, \mu)$.*

Demonstration. En effet, soit $f \in \mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{M}, \mu)$ et soit $B = \{|z| \leq \|f\|_\infty\}$. Soit $\epsilon > 0$ fixé, et soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un recouvrement fini de B par des disques ouverts de diamètres inférieurs à ϵ. Pour tout i soit $B_i = f^{-1}(A_i)$, et soit $\alpha_i \in A_i$. Les B_i étant des parties mesurables de E, la fonction $h_\epsilon = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{B_i}$ est une fonction étagée, et, par contruction, on a $\|f - h_\epsilon\|_\infty \leq \epsilon$ ∎

Remarque 3.4.7 *Dans la proposition ci-dessus, contrairement au cas des espaces $\mathcal{L}^p$ $p < +\infty$, on ne peut pas, si $\mu(E) = +\infty$, considérer seulement les fonctions étagées intégrables.*

Proposition 3.4.8 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré de* **mesure finie** *(i.e. $\mu(E) < +\infty$) et $p \in [1, +\infty[$. Alors $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{M}, \mu) \subset \mathcal{L}^p(E, \mathcal{M}, \mu)$. De plus, pour tout $f \in \mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{M}, \mu)$, on a $\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p$.*

Demonstration. En effet, la première assertion étant évidente, nontrons la seconde. Il est clair que $\|f\|_p \leq \mu(E)^{1/p} \|f\|_\infty$. Si $\mu(E) = 0$, le résultat est évident ainsi que si $\|f\|_\infty = 0$. Supposons donc $\mu(E) > 0$ et $\|f\|_\infty > 0$. De l'inégalité précédente, on tire $\overline{\lim}_{p \to \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$. Par ailleurs, si $0 < a < \|f\|_\infty$, $A = \{|f| > a\}$ est mesurable, $\mu(A) < +\infty$, et $a^p \chi_A \leq |f|^p$ soit $a\mu(A)^{1/p} \leq \|f\|_p$. Comme $\mu(A) > 0$, on a $\underline{\lim}_{p \to \infty} \|f\|_p \geq a$, ce qui donne la conclusion ∎

3.5 Le théorème de Radon-Nikodym et son application a la dualité entre espaces L^p.

Dans ce paragraphe, ainsi que dans la suite du texte, nous utiliserons la notation suivante: si $(E, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré, et si $f \in L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$, $f\mu$ désignera la mesure sur $(E, \mathcal{M})$ définie par

$$f\mu(A) = \int_A f d\mu, \ \forall A \in \mathcal{M}.$$

Le fait que $f\mu$ est bien une mesure résulte du corollaire 2.2.9.

3.5.1 Le théorème de Radon-Nikodym

Le but de ce sous-paragraphe est de démontrer le théorème fondamental suivant:

Théorème 3.5.1 *(*theoreme de decomposition de Lebesgue et theoreme de Radon-Nikodym*)*
*Soit $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, μ étant une mesure positive σ-**finie**.*
*1) Soit λ une mesure complexe sur $(E, \mathcal{M})$. Alors, il existe une unique paire (λ_a, λ_s) de mesures complexes sur $\mathcal{M}$ telles que $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \ll \mu$ et $\lambda_s \perp \mu$ (*theoreme de decomposition de Lebesgue*). De plus, il existe une unique fonction $f \in L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$, positive si λ est positive, réelle si λ est réelle, telle que $\lambda_a = h\mu$ (*theoreme de Radon-Nikodym*).*
2) Si E_n sont des parties mesurables de E, deux à deux disjointes, telles que, pour tout n, $\mu(E_n) < +\infty$, et si λ est une mesure positive σ-finie telle que $\lambda(E_n) < +\infty$, $\forall n$, il existe une unique fonction mesurable positive h, intégrable sur chaque E_n, et une unique mesure λ_s singulière par rapport à μ, telle que $\lambda_s(E_n) < +\infty$, $\forall n$, telles que $\lambda = h\mu + \lambda_s$.

Avant de faire la preuve du théorème, nous pouvons remarquer que le théorème de Radon- Nikodym **caractérise** les mesures complexes absolument continues par rapport à μ. La fonction h du théorème s'appelle la **dérivée de Radon-Nikodym de λ_a par rapport à** μ et se note parfois $h = \frac{d\lambda_a}{d\mu}$.

Demonstration. Tout d'abord, remarquons que l'unicité pour la décomposition $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ résulte du (e) de la proposition 1.3.18, et que l'unicité de h résulte elle de la proposition 3.1.10.Pour prouver l'existence, nous allons procéder en quatre étapes.

1) Supposons tout d'abord λ et μ **positives finies**. Posons $\nu = \lambda + \mu$. Pour toute $f \in L^2(E, \mathcal{M}, \nu)$, par l'inégalité de Hölder (théorème 3.3.2), il vient

$$\left|\int f d\lambda\right| \leq \int |f| d\nu \leq \left(\int |f|^2 d\nu\right)^{1/2} \nu(E)^{1/2}.$$

L'application $f \longmapsto \int f d\lambda$ est donc une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert $L^2(E, \mathcal{M}, \nu)$, et il existe donc $g \in L^2(E, \mathcal{M}, \nu)$ telle que, pour toute $f \in L^2(E, \mathcal{M}, \nu)$ on ait

$$\int f d\lambda = \int f g d\nu. \tag{5.7}$$

En particulier, si $A \in \mathcal{M}$ est tel que $\nu(A) \neq 0$, la formule 5.7 appliquée à χ_A donne $0 \leq \frac{1}{\nu(A)} \int_A g d\nu = \frac{\lambda(A)}{\nu(A)} \leq 1$, ce qui entraîne d'après la proposition 3.1.11 $0 \leq g \leq 1$ ν-presque partout. Quitte à changer g sur un ensemble ν-négligeable, on a donc montré l'existence d'une fonction $g \in L^2(E, \mathcal{M}, \nu)$ telle que

$$0 \leq g \leq 1 \text{ sur } E, \text{ et, } \int (1-g) f d\lambda = \int f g d\mu, \ \forall f \in L^2(E, \mathcal{M}, \nu). \tag{5.8}$$

Posons alors $A = \left\{0 \leq g < 1\right\}$, $B = \left\{g = 1\right\}$, $\lambda_a(F) = \lambda(F \cap A)$ et $\lambda_s(F) = \lambda(F \cap B)$, pour tout $F \in \mathcal{M}$. En appliquant la formule 5.8 à $f = \chi_B$, il vient $\mu(B) = 0$ ce qui montre que $\lambda_s \perp \mu$.

Appliquons maintenant la formule 5.8 à la fonction $f = (1 + g + ... + g^n)\chi_F$: puisque $1 - g^{n+1}$ vaut zéro sur B et que g^{n+1} tend vers zéro en décroissant sur A, le théorème de Beppo-Levi (théorème 2.2.4) montre que le premier membre de 5.8 tend vers $\lambda(F \cap A) = \lambda_a(F)$ quand $n \to \infty$. D'autre part, quand $n \to \infty$, $(g + g^2 + +g^{n+1})$ tend en croissant vers une fonction mesurable positive h, et le second membre de la formule 5.8 tend, d'après le théorème de Beppo-Levi (théorème 2.1.11) vers $\displaystyle\int h d\mu$, ce qui termine la preuve dans ce cas.

2) Supposons maintenant $\lambda \geq 0$ finie et μ σ-finie. Par hypothèse, il existe donc $E_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathrm{N}$, tels que $E = \displaystyle\bigcup_n E_n$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et $\mu(E_n) < +\infty$ pour tout n. Le cas précédent montre alors qu'il existe $h_n \in \mathcal{L}^1(E_n, \mathcal{M} \cap E_n, \mu_{|E_n})$ telle que $\lambda_{|E_n} = h_n \mu_{|E_n} + \lambda_s^n$. On définit alors $h = \displaystyle\sum_n h_n \chi_{E_n}$, $\lambda_s = \displaystyle\sum_n \lambda_s^n$ et la conclusion en découle puisque $h \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ puisque $\lambda(E) < +\infty$.

3) Le cas où λ est complexe et μ σ-finie se déduit aisément du cas précédent en écrivant $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, λ_i réelles, puis $\lambda_i = \lambda_i^+ - \lambda_i^-$ (proposition 1.3.16).

4) Supposons maintenant que λ et μ sont toutes deux positives et σ-finies. Comme dans le cas 2), il existe donc une suite E_n de parties mesurables de E telles que, pour tout n, $\lambda(E_n) < +\infty$ et $\mu(E_n) < +\infty$. D'après le cas 1) il existe donc, pour tout n une fonction positive $h_n \in \mathcal{L}^1(E_n, \mathcal{M} \cap E_n, \mu_{|E_n})$ telle que $\lambda_{|E_n} = h_n \mu_{|E_n} + \lambda_s^n$ avec $\lambda_s^n \perp \mu_{|E_n}$. Pour conclure, il suffit donc de considérer $h = \displaystyle\sum_n h_n \chi_{E_n}$ et $\lambda_s = \displaystyle\sum_n \lambda_s^n$ ∎

Remarque 3.5.2 *Si on enlève une des hypothèses de σ-finitude dans le théorème* 3.5.1 *alors les conclusions peuvent être mises en défaut. Par exemple, si μ est la mesure de Lebesgue sur* $]0,1[$ *et λ la mesure discrète sur la tribu des boréliens de* $]0,1[$ *alors λ n'a pas de décomposition de Lebesgue par rapport à μ, et bien que $\mu \ll \lambda$, il n'existe pas de fonction $h \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ telle que $\mu = h\lambda$.*

Proposition 3.5.3 *Soient $(E, \mathcal{M})$ un espace mesurable et μ une mesure complexe sur $(E, \mathcal{M})$. Alors, il existe une fonction mesurable h de E dans* C, *$h \in L^1(E, \mathcal{M}, |\mu|)$, telle que $|h(x)| = 1$, pour tout $x \in E$ et telle que $\mu = h|\mu|$.*

Demonstration. Puisque $\mu \ll |\mu|$, le théorème de Radon-Nikodym nous prouve qu'il existe $h \in L^1(E, \mathcal{M}, |\mu|)$ telle que $\mu = h|\mu|$. Si $A \in \mathcal{M}$ est tel que $|\mu|(A) > 0$, on a donc

$$\left| \frac{1}{|\mu|(A)} \int_A h d|\mu| \right| = \frac{|\mu(A)|}{|\mu|(A)} \leq 1,$$

et, la proposition 3.1.11 montre que $|h| \leq 1$ presque partout. Pour $r < 1$, soit $A_r = \{|h| < r\}$. Si $(E_i)_{i \in \mathrm{N}}$ est une partition de A_r par des ensembles mesurables, on a alors

$$\sum_i |\mu(E_i)| = \sum_i \left| \int_{E_i} h d|\mu| \right| \leq \sum_i r|\mu|(E_i) = r|\mu|(A_r),$$

et, par définition de $|\mu|$, il vient $|\mu|(A_r) \leq r|\mu|(A_r)$ ce qui n'est possible que si $|\mu|(A_r) = 0$. Par suite, $|h| \geq 1$ presque partout ∎

La proposition ci-dessus permet en particulier de définir tout naturellement l'intégration par rapport à une mesure complexe:

Définition 3.5.4 *Soit $(E,\mathcal{M})$ un espace mesurable et μ une mesure complexe sur $(E,\mathcal{M})$. Soit h la fonction définie par la proposition 3.5.3 c'est-à-dire telle que $\mu = h|\mu|$. Pour toute $f \in L^1(E,\mathcal{M},|\mu|)$, on appelle intégrale de f par rapport à μ le nombre complexe $\int f d\mu = \int f h d|\mu|$.*

Proposition 3.5.5 *Soient $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré et $f \in L^1(E,\mathcal{M},\mu)$. Soit $\lambda = f\mu$. Alors, $|\lambda| = |f|\mu$.*

Demonstration. En effet, d'après la proposition 3.5.3, il existe une fonction mesurable h de module presque partout égal à 1 telle que $h|\lambda| = \lambda$. Par suite, $|\lambda| = \overline{h} f\mu$, et comme $|\lambda|$ et μ sont positives, il résulte de la proposition 3.1.10 que $\overline{h}f \geq 0$ presque partout, et donc $\overline{h}f = |f|$ presque partout ∎

Proposition 3.5.6 (theoreme de decomposition de Hahn) *Soient $(E,\mathcal{M})$ un espace mesurable et μ une mesure réelle sur $(E,\mathcal{M})$. Il existe deux ensembles mesurables A et B tels que $A \cup B = E$, $A \cap B = \emptyset$, et, pour tout $F \in \mathcal{M}$, $\mu^+(F) = \mu(F \cap A)$ et $\mu^-(F) = \mu(F \cap B)$*

Demonstration. Appliquons à nouveau la proposition 3.5.3 pour écrire $\mu = h|\mu|$ avec $|h| = 1$ presque partout. Comme μ est réelle, il résulte de la proposition 3.1.10 que h est réelle, et par suite on peut supposer que, pour tout $x \in E$, on a $h(x) =\Leftrightarrow 1$. Posons $A = \{h = 1\}$ et $B = \{h = -1\}$. Puisque $\frac{1}{2}(1+h)$ vaut h sur A et 0 sur B, pour tout $F \in \mathcal{M}$, on a

$$\mu^+(F) = \frac{1}{2}\int_F (1+h)d|\mu| = \int_{F\cap A} hd|\mu| = \mu(F \cap A),$$

et comme $\mu(F) = \mu(F \cap A) + \mu(F \cap B)$, $\mu = \mu^+ - \mu^-$, on a montré la proposition ∎

Corollaire 3.5.7 *Dans les conditions de la proposition ci-dessus, si $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$, λ_i étant des mesures positives, on a $\lambda_1 \geq \mu^+$ et $\lambda_2 \geq \mu^-$.*

Demonstration. En effet, comme $\mu \leq \lambda_1$, pour $F \in \mathcal{M}$, on a $\mu^+(F) = \mu(F \cap A) \leq \lambda_1(F \cap A) \leq \lambda_1(F)$ ∎

3.5.2 Relations de dualité entre les espaces L^p

Soit $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in [1, +\infty]$. Soit q l'exposant conjugué de p ($q = +\infty$ si $p = 1$ et $q = 1$ si $p = +\infty$). L'inégalité de Hölder montre que si $g \in L^q(E, \mathcal{M}, \mu)$, l'application $\Phi_g : L^p(E, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\Phi_g(f) = \int f g d\mu$ est une forme linéaire continue sur $L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$ de norme $\leq \|g\|_q$. La question se pose alors de savoir si toute forme linéaire continue sur $L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$ s'écrit de cette manière.

Si $p = +\infty$, la réponse est non. Si $1 < p < +\infty$ la réponse est oui, et si $p = 1$ elle est aussi affirmative si on suppose la mesure σ-finie:

Théorème 3.5.8 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré ($\mu \geq 0$) et $p \in [1, +\infty[$.*
1) Supposons $1 < p < +\infty$. L'application $g \longmapsto \Phi_g$ où Φ_g est définie par $\Phi_g(f) = \int f g d\mu$, $f \in L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$, est un isomorphisme isométrique de $L^q(E, \mathcal{M}, \mu)$ sur le dual de $L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$.
2) Supposons $(E, \mathcal{M}, \mu)$ σ-fini. Alors, l'application $g \longmapsto \Phi_g$, définie comme ci-dessus, est un isomorphisme isométrique de $L^\infty(E, \mathcal{M}, \mu)$ sur le dual de $L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$.

Demonstration. Nous allons faire la démonstration en trois étapes.
Première étape: $\mu(E) < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$.

Tout d'abord, il est clair que $g \longmapsto \Phi_g$ est injective car, si $\Phi_g = \Phi_h$, on a, $\forall A \in \mathcal{M}$, $\int_A (g-h) d\mu = 0$, ce qui, d'après la proposition 3.1.10, implique $g = h$ presque partout. De plus, comme nous l'avons déjà dit, l'inégalité de Hölder (théorème 3.3.2 et proposition 3.4.3) montre que

$$\|\Phi_g\| \leq \|g\|_q. \tag{5.9}$$

Il nous reste donc à montrer que si Φ est une forme linéaire continue sur $L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$ il existe $g \in L^q(E, \mathcal{M}, \mu)$ tel que $\Phi = \Phi_g$ et que l'on a égalité dans la formule 5.9.

Pour tout $A \in \mathcal{M}$, posons $\lambda(A) = \Phi(\chi_A)$. Alors λ est une mesure complexe sur $(E, \mathcal{M}, \mu)$: en effet, la seule propriété à vérifier est la σ-additivité. Or, si (A_i) est une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints, et si $A = \bigcup_i A_i$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a, en posant $E_k = \bigcup_{0 \leq i \leq k} A_i$, $\|\chi_A - \chi_{E_k}\|_p = (\mu(A \backslash E_k))^{1/p}$, ce qui montre que χ_{E_k} tend vers χ_A dans $L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$, et par suite $\lambda(E_k) = \sum_{0 \leq i \leq k} \lambda(A_k)$ tend vers $\lambda(A)$. De plus, si $\mu(A) = 0$, on a clairement $\lambda(A) = 0$ ce qui signifie que $\lambda \ll \mu$. Alors, d'après le théorème de Radon-Nikodym (théorème 3.5.1), il existe $g \in L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{M}$,

$$\Phi(\chi_A) = \int_A g d\mu. \tag{5.10}$$

D'après les propositions 3.4.6 et 3.4.8, il en résulte que

$$\Phi(f) = \int f g d\mu, \tag{5.11}$$

pour toute $f \in L^\infty(E, \mathcal{M}, \mu)$ (noter que la convergence dans L^∞ entraîne ici la convergence dans L^p). Montrons maintenant que $g \in L^q(E, \mathcal{M}, \mu)$ et que l'on a égalité dans la formule 5.9. Séparons deux cas:

a): $p = 1$. Il résulte de la formule 5.10 que, pour tout $A \in \mathcal{M}$,

$$\left|\int_A g d\mu\right| \leq \|\Phi\| \mu(A).$$

La proposition 3.1.11 montre donc que $\|g\|_\infty \leq \|\Phi\|$.

b): $1 < p < +\infty$. Soit α une fonction mesurable, $|\alpha| = 1$, telle que $\alpha g = |g|$. Posons alors $A_n = \{|g| \leq n\}$ et $f_n = \chi_{A_n} |g|^{q-1} \alpha$. On a donc $|f_n|^p = |g|^q$ sur A_n, $f \in L^\infty(E, \mathcal{M}, \mu)$, et la formule 5.11 donne

$$\int_{A_n} |g|^q d\mu = \int f g d\mu = \Phi(f) \leq \|\Phi\| \Big(\int_{A_n} |g|^q d\mu \Big)^{1/p},$$

c'est-à-dire $\displaystyle\int_{A_n} |g|^q d\mu \leq \|\Phi\|^q$, et le théorème de Beppo-Levi (theorème 2.1.11) donne $\|g\|_q \leq \|\Phi\|$.

On a donc bien $g \in L^q(E, \mathcal{M}, \mu)$ et $\|g\|_q = \|\Phi\|$. Le second membre de la formule 5.11 est donc une forme linéaire continue sur $L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$ et comme $L^\infty(E, \mathcal{M}, \mu)$ est dense dans $L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$ (propositions 3.3.9 et 3.4.8) la démonstration est achevée dans le cas $\mu(E) < +\infty$.

Deuxieme étape: $1 < p < +\infty$.

Soit $\mathcal{M}_1$ l'ensemble des $A \in \mathcal{M}$ tels que $\mu(A) < +\infty$, et, pour $A \in \mathcal{M}_1$, notons L^p_A l'espace des fonctions$f \in L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$ qui sont nulles sur $E \backslash A$ muni de la norme $\| \ \|_p$. Il résulte de la proposition 3.3.7 que L^p_A est fermé et par suite s'identifie à $L^p(A, \mathcal{M} \cap A, \mu)$. Soit Φ_A la restriction de Φ à L^p_A. La première étape de la démonstration montre donc qu'il existe $g_A \in L^q_A$ telle que, pour toute $f \in L^p_A$ on a $\Phi_A(f) = \displaystyle\int g_A f d\mu$, $\|g_A\|_q = \|\Phi_A\| \leq \|\Phi\|$. Par l'unicité de la première étape, si A et B sont dans $\mathcal{M}_1$, on a $g_{A|A\cap B} = g_{B|A\cap B} = g_{A\cap B}$ presque partout sur $A \cap B$. Par suite, l'application $A \longmapsto \|g_A\|_q^q = \|\Phi_A\|^q$ est croissante (pour l'inclusion) et il existe une suite croissante (A_n) dans $\mathcal{M}_1$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi_{A_n}\| = \sup_{A \in \mathcal{M}_1} \|\Phi_A\| \leq \|\Phi\|. \tag{5.12}$$

De plus, d'après ce qui précède, la suite g_{A_n} converge presque partout vers une fonction mesurable g, nulle sur $F = E \backslash \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, et, d'après le théorème de Beppo-Levi (théorème 2.1.11), on a

$$\|g\|_q = \lim_{n\to\infty} \|g_{A_n}\|_q = \sup_{A \in \mathcal{M}_1} \|g_A\|_q = \sup_{A \in \mathcal{M}_1} \|\Phi_A\|. \tag{5.13}$$

Remarquons maintenant que si $A \in \mathcal{M}_1$ est tel que $A \cap F = \emptyset$, on a $\|g_{A\cup A_n}\|_q^q = \|g_A\|_q^q + \|g_{A_n}\|_q^q$, et, d'après la formule 5.13, $g_A = 0$. Par conséquent, si $A \in \mathcal{M}_1$, on a $g_A = g_{A\cap F} + g_{A\backslash F} = g_{A\cap F} = g$ presque partout. Ceci implique que si $A \in \mathcal{M}_1$, on a, pour $f \in L^p_A$,

$$\begin{aligned} \Phi(f) = \Phi_A(f) &= \int_A g_A f d\mu \\ &= \int g f d\mu. \end{aligned}$$

Puisque les deux membres extrèmes de l'égalité ci-dessus sont continus sur $L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$, et puisque $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{M}_1} L^p_A$ est dense dans $L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$ (proposition 3.3.9), la démonstration de la deuxième étape est achevée à l'unicité près. Or, si $\Phi_g = \Phi_h$, g et h étant dans $L^q(E, \mathcal{M}, \mu)$, en posant $A_\epsilon = \{|g-h| \geq \epsilon\}$, on a $\mu(A_\epsilon) < +\infty$, et, pout tout $A \in \mathcal{M}$, on a donc $\int_A (g-h)\chi_{A_\epsilon} d\mu = 0$, ce qui, d'après la proposition 3.1.10, implique $g = h$ presque partout.

Troisieme étape: $p = 1$, μ étant σ−finie.

Soit (E_n) une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints tels que $E = \bigcup_{n\in\mathrm{N}} E_n$ et $\mu(E_n) < +\infty$. Reprenons les notations de la deuxième étape: d'après la première étape, pour tout n, il existe $g_n \in L^\infty(E, \mathcal{M}, \mu)$ nulle sur $E \backslash E_n$, $\|g_n\|_\infty \leq \|\Phi_{E_n}\| \leq \|\Phi\|$, telle que pour toute $f \in L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$, on ait

$$\Phi(\chi_{E_n} f) = \int_{E_n} f g_n d\mu. \tag{5.14}$$

Posons $g = \sum_{n\in\mathrm{N}} g_n$, de sorte que $g \in L^\infty(E, \mathcal{M}, \mu)$. Si $A_k = \bigcup_{0\leq n\leq k} E_k$, on a, pour $f \in L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$,

$$\Phi(\chi_{A_k} f) = \int_{A_k} f(g_1 + ... + g_k) d\mu = \int_{A_k} f g d\mu. \tag{5.15}$$

Comme $\chi_{A_k} f$ tend vers f dans $L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$, la formule 5.15 et le théorème de convergence dominée de Lebesgue (théorème 2.2.8) montrent que $\Phi(f) = \int f g d\mu$ pour toute $f \in L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$. Par ailleurs, la formule 5.15 et la première partie montrent que $\|g_1 + ... + g_k\|_\infty \leq \|\Phi_{A_k}\| \leq \|\Phi\|$, et on obtient donc $\|g\|_\infty \leq \|\Phi\|$ ce qui achève la preuve du théorème, à ceci près qu'il nous faut encore montrer l'unicité. Mais ceci est immédiat, car si $\Phi_g = \Phi_h$, pour tout $A \in \mathcal{M}$ et tout n, on a $\int_{E_n \cap A} (g - h) d\mu = 0$, et il suffit encore une fois d'appliquer la proposition 3.1.10 Ξ

3.5.3 Convergence faible dans les espaces L^p.

Rappelons tout d'abord que si E est un espace normé, on dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ **converge faiblement** vers $x \in E$ si, pour toute forme linéaire Φ continue sur E, la suite $(\Phi(x_n))_{n\in\mathrm{N}}$ converge vers $\Phi(x)$.

La propriété suivante est tout à fait générale:

Proposition 3.5.9 *Soit E un espace de Banach. Soit $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite dans E qui converge faiblement vers x. Alors $\sup_{n\in\mathrm{N}} \|x_n\| < +\infty$.*

De plus, si $(\Phi_k)_{k\in\mathrm{N}}$ est une suite dans E' qui converge (en norme) vers zéro, alors la suite $(\Phi_k(x_n)_{k\in\mathrm{N}}$ converge vers zéro uniformément par rapport à n.

Demonstration. En effet, considérons les x_n comme des formes linéaires sur l'espace normé E'. Par hypothèse, pour tout $x' \in E'$ la suite $(x'(x_n))_{n\in\mathrm{N}}$ est bornée. Le théorème de Banach−Steinhaus entraine alors que $\sup_{n\in\mathrm{N}} \sup_{\|x'\|<1} |x'(x_n)| < +\infty$ et la conclusion résulte du théorème de Hahn−Banach. La seconde assertion résulte aussitôt de la première car $|\Phi_k(x_n)| \leq \|\Phi_k\| \|x_n\| \leq M\|\Phi_k\|$ Ξ

Proposition 3.5.10 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré f_n et f des fonctions de $L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$, $1 < p < +\infty$. Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ converge faiblement vers f si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*
(i) $\sup_{n\in\mathrm{N}} \|f_n\|_p < +\infty$;
(ii) pour tout $A \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(A) < +\infty$ on a $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$.

Demonstration. En effet, si f_n tend faiblement vers f, la proposition 3.5.9 dit que la condition (i) est satisfaite, et, puisque pour $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) < +\infty$, la fonction χ_A est dans $L^q(E, \mathcal{M}, \mu)$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}= 1)$ et la seconde condition est satisfaite par hypothèse. Inversement, si les deux conditions sont remplies, pour toute fonction étagée integrable φ, on a $\lim_{n\to\infty} \int \varphi f_n d\mu = \int \varphi f d\mu$ et la conclusion résulte du théorème 3.5.8 et de la proposition 3.3.9 car $\left|\int (\varphi - g) f_n d\mu\right| \leq \|f - g\|_q M$ d'après la condition (i) Ξ

Un résultat analogue s'établit sans difficultés dans le cas $p = 1$:

Proposition 3.5.11 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, μ étant $\sigma-$finie, f_n et f des fonctions de $L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$. Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ converge faiblement vers f si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*
(i) $\sup_{n\in\mathrm{N}} \|f_n\|_1 < +\infty$;
(ii) pour tout $A \in \mathcal{M}$, on a $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$.

Demonstration. C'est exactement la même que celle de la proposition précédente en remplaçant simplement la proposition 3.3.9 par la proposition 3.4.6 Ξ

Il est clair que la convergence en norme dans L^p implique la convergence faible, et, sur des exemples, on peut facilement se convaincre que la réciproque est fausse. La suite du paragraphe est consacrée à donner un résultat qui montre, dans le cas $p = 1$, ce qu'il faut rajouter à la convergence faible pour obtenir la convergence forte.

Si f_n et f sont des fonctions de $L^p(E, \mathcal{M}, \mu)$, $p \in]1, +\infty[$, et si $(A_k)_{k\in\mathrm{N}}$ est une suite dans $\mathcal{M}$ telle que $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$, alors la suite $(\chi_{A_k})_{k\in\mathrm{N}}$ tend vers zéro dans $L^q(E, \mathcal{M}, \mu)$, et la proposition 3.5.9 montre que $\left(\int_{A_k} f_n d\mu\right)_{k\in\mathrm{N}}$ tend vers zéro uniformément par rapport à n. Nous allons tout d'abord généraliser ce résultat au cas $p = 1$.

Théorème 3.5.12 (Theoreme de Vitali) *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré ($\mu \geq 0$) et $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite dans $L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{M}$, on a $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f_0 d\mu$. Soit $(B_k)_{k\in\mathrm{N}}$ une suite de parties mesurables de E vérifiant l'une des deux conditions suivantes:*
(a) la suite $(\chi_{B_k})_{k\in\mathrm{N}}$ converge vers zéro presque partout;
(b) $\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$.
Alors, la suite $\left(\int_{B_k} |f_n| d\mu\right)_{k\in\mathrm{N}}$ tend vers zéro (quand $k \to \infty$) uniformément par rapport à $n \in \mathrm{N}$.

Pour établir ce théorème, nous avons besoin d'un lemme:

Lemme 3.5.13 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $(g_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite dans $L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$. Pour tout n, posons, pour A et B dans $\mathcal{M}$, $d_n(A, B) = \int |g_n||\chi_A - \chi_B| d\mu$, et*

$$d(A, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(A, B)}{2^n(1 + d_n(A, B))}.$$

Alors, d est un écart sur $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ muni de cet écart est complet.

Demonstration du lemme. Il est immédiat que les d_n sont des écarts, et, par suite, d est aussi un écart. Soit donc $(A_k)_{k\in\mathrm{N}}$ une suite de Cauchy pour d. Alors, pour chaque n (A_k) est une suite de Cauchy pour d_n ce qui signifie que $(g_n\chi_{A_k})$ est une suite de Cauchy dans $L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ et donc converge vers $h_n \in L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ (théorème 3.1.6). D'après la proposition 3.1.7, pour tout n il existe une suite $(k_l^{(n)})_{l\in\mathrm{N}}$ telle que la suite $\left(g_n\chi_{A_{k_l^{(n)}}}\right)_{l\in\mathrm{N}}$ converge presque partout. De plus, on peut supposer que la suite $(k_l^{(n+1)})_{l\in\mathrm{N}}$ est extraite de la suite $(k_l^{(n)})_{l\in\mathrm{N}}$ de sorte que si l'on pose $A'_l = A_{k_l^{(l)}}$, pour tout $n \in \mathrm{N}$, la suite $\left(g_n\chi_{A'_l}\right)_{l\in\mathrm{N}}$ converge dans $L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ vers h_n ainsi que presque partout. Alors, si on pose $G_n = \{g_n \neq 0\}$, ce qui précède implique que la suite $(\chi_{A'_l\cap G_n})$ converge presque partout vers la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable B_n et que $h_n = g_n\chi_{B_n}$. Posons alors $B = \bigcup_{n\in\mathrm{N}} B_n$, et montrons que, pour tout n, $\lim_{l\to\infty} d_n(A'_l, B) = 0$. Pour cela, il suffit de voir que $h_n = g_n\chi_B$ presque partout. Or, si $x \in B \cap G_n$, il existe m tel que $x \in B_m$, et, en raisonnant à un ensemble de mesure nulle près, si $\chi_{A'_l\cap G_m}(x)$ converge, on a $\chi_{A'_l\cap G_n}(x) = 1$ pour l assez grand ce qui montre que $x \in B_n$.

Ainsi, on a bien $\lim_{l\to\infty d}(A'_l, B) = 0$ et comme la suite (A_k) est de Cauchy pour d, on a $\lim_{k\to\infty} d(A_k, B) = 0$ Ξ

Demonstration du theoreme 3.5.12. Plaçons nous en premier dans le cadre de l'hypothèse (a). Remarquons tout d'abord que, pour tout n, l'application $B \longmapsto \int_B f_n d\mu$ est continue sur $\mathcal{M}$ pour l'écart d défini dans le lemme 3.5.13 avec $g_n = f_n$. Par suite, pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble

$$F_n(\epsilon) = \left\{B \in \mathcal{M},\ \text{tels que} \left|\int_B (f_m - f_0) d\mu\right| \leq \epsilon \text{ pour tout } m \geq n\right\},$$

est fermé pour d dans $\mathcal{M}$. Comme l'hypothèse implique $\mathcal{M} = \bigcup_{n\geq 1} F_n(\epsilon)$, d'après le théorème de Baire, il existe $n_0 \geq 1$ tel que l'intérieur de $F_{n_0}(\epsilon)$ soit non vide. Autrement dit, il existe $B_0 \in \mathcal{M}$ et $\eta > 0$ tels que $d(B, B_0) < \eta$ implique $B \in F_{n_0}(\rho)$. Remarquons maintenant que, pour tout n, d'après le théorème de convergence dominée (théorème 2.2.8), on a $\lim_{k\to\infty} d_n(B_0, B_0 \cup B_k) = 0$ et $\lim_{k\to\infty} d_n(B_0, B_0\backslash B_k) = 0$, ce qui signifie qu'il existe k_0 tel que pour $k \geq k_0$, $B_0 \cup B_k$ et $B_0\backslash B_k$ appartiennent à $F_{n_0}(\epsilon)$. Comme

$$\left|\int_{B_k} f_n d\mu\right| \leq \left|\int_{B_k} f_0 d\mu\right| + \left|\int_{B_0\cup B_k} (f_n - f_0) d\mu\right| + \left|\int_{B_0\backslash B_k} (f_n - f_0) d\mu\right|,$$

pour $n \geq n_0$ et $k \geq k_0$, on a

$$\left|\int_{B_k} f_n d\mu\right| \leq \left|\int_{B_k} f_0 d\mu\right| + 2\epsilon.$$

Le théorème de convergence dominée entrainant aussi que $\lim_{k\to\infty} \int_{B_k} f_0 d\mu = 0$, pour $k \geq k_1$ et $n \geq n_0$, on a $\left|\int_{B_k} f_n d\mu\right| \leq 3\epsilon$. Une autre application du théorème de convergence dominée montre que $\int_{B_k} f_n d\mu$ tend vers zéro quand $k \to +\infty$ uniformément par rapport à $n \in \mathrm{N}$. Reste à voir que l'on peut mettre des valeurs absolues dans cette dernière intégrale. Or, si cela était faux, il existerait $\epsilon_0 > 0$ et une suite n_l telle que, pour tout l on ait $\int_{B_{n_l}} f_{n_l}^+ d\mu \geq \epsilon_0$. En posant alors $A_l = \{f_{n_l} \geq 0\}$, on aurait $\int_{B_{n_l}\cap A_l} f_{n_l} d\mu \geq \epsilon_0$, et comme la suite $l \longmapsto \chi_{B_{n_l}\cap A_l}$ tend vers zéro presque partout, ceci contredirait le résultat établi sans les valeurs absolues.

Supposons maintenant que l'on a l'hypothèse (b) et raisonnons par l'absurde. Si cela était faux, il existerait $\epsilon_0 > 0$ et une suite k_l tendant vers $+\infty$ tels que, pour tout $l \in \mathrm{N}$, $\exists n_l \in \mathrm{N}$ tel que $\int_{B_{k_l}} |f_{n_l}| d\mu \geq \epsilon_0$. Mais ceci contredit le théorème de Vitali (3.5.12) avec l'hypothèse (a) car, d'après la proposition 3.3.7, il existe une suite d'entiers k_p extraite de la suite k_l telle que la suite des fonctions caractéristiques des B_{k_p} tende vers zéro presque partout Ξ

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat auquel nous voulions aboutir:

Théorème 3.5.14 *Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré de mesure σ-finie et f_n, $n \in \mathrm{N}$ et f des fonctions de $L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$. Pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ converge vers f dans $L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites (en posant $E = \bigcup_{k\in\mathrm{N}} B_k$ avec $B_{k+1} \supset B_k$ et $\mu(B_k) < +\infty$):*
(i) pour tout $A \in \mathcal{M}$, $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$ (ou bien, la suite $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ converge faiblement vers f);
(ii) la suite (f_n) converge en mesure vers f sur chaque B_k;

Demonstration. En effet, les conditions étant clairement nécéssaires, vérifions qu'elles sont suffisantes. D'après le théorème de Vitali (théorème 3.5.12) avec l'hypoyhèse (a), $\int_{E\backslash B_k} |f_n - f| d\mu$ tend vers zéro quand $k \to \infty$ uniformément par rapport à n. Soit k_0 tel que $\int_{E \setminus B_{k_0}} |f_n - f| d\mu \leq \epsilon$ pour tout n.

Pour tout $\epsilon > 0$, soit $A_n(\epsilon) = \{|f_n - f| \geq \epsilon\} \cap B_{k_0}$. L'hypothèse (ii) signifie que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n(\epsilon)) = 0$. Posons par ailleurs $F_n = \{f_n - f \geq 0\}$ et $G_n = \{f_n - f < 0\}$. Le théorème de Vitali appliqué avec l'hypothèse (b) montre que lorsque $k \to +\infty$ les intégrales $\int_{A_k(\epsilon)\cap F_n} (f_n - f) d\mu$ et $\int_{A_k(\epsilon)\cap G_n} (f_n - f) d\mu$ tendent vers zéro uniformément par rapport à n. Il en résulte qu'il en est de même de l'intégrale $\int_{A_k(\epsilon)} |f_n - f| d\mu$. Par suite, $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n(\epsilon)} |f_n - f| d\mu = 0$, et, comme $\int_{B_{k_O} \setminus A_n(\epsilon)} |f_n - f| d\mu \leq \epsilon\mu(B_{k_0})$, la théorème est démontré Ξ

Remarque 3.5.15 *Le théorème précédent ne s'étend pas sans changements au cas $p > 1$. Par exemple, si on prends une suite de fonctions f_n de $L^1 \cap L^2$ telles que $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$ et $\|f_n\|_2 = 1$, pour tout n, cette suite converge en mesure vers zéro ainsi que faiblement aussi bien dans L^1 que dans L^2 (propositions* 3.5.10 *et* 3.5.11*).*

Chapitre 4

MESURES DE RADON ET MESURES DE BOREL

4.1 Espaces topologiques localement compacts

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques compléments de topologie qui seront nécéssaires par la suite.

Définition 4.1.1 *Soit X un espace topologique. On dit que X est* **localement compact** *si tout point de X posséde un voisinage compact.*

Proposition 4.1.2 *Soit X un espace topologique séparé. Soient K une partie compacte de X et x un point du complémentaire de K. Alors, il existe deux ouverts disjoints U et V de X tels que $K \subset U$ et $x \in V$.*

Demonstration. En effet, puisque X est séparé, pour tout $y \in K$, il existe deux ouverts U_y et V_y disjoints tels que $y \in U_y$ et $x \in V_y$. K étant compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de tels U_y. Pour conclure, il suffit donc de prendre pour U la réunion de ces U_y et pour V l'intersection des V_y correspondants Ξ

Proposition 4.1.3 *Soient X un espace topologique localement compact séparé, K un compact de X et U un ouvert de X contenant K. Alors, il existe un ouvert V tel que $\overline{V}$ soit compact et que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$. En particulier, tout point de X admet un système fondamental de voisinages compacts.*

Demonstration. Si $U = X$, il suffit de recouvrir K par un nombre fini de voisinages compacts de points de K ce qui est possible puisque K est compact; en d'autres termes, on peut toujours trouver un ouvert G relativement compact tel que $K \subset G$. Supposons donc $U \neq X$, et soit $A = X \backslash U$. D'après la proposition 4.1.2, pour tout point $x \in A$, il existe un ouvert W_x contenant K tel que $x \notin \overline{W}_x$. Lorsque x parcourt A, la famille $A \cap \overline{G} \cap \overline{W}_x$ est une famille d'ensembles compacts d'intersection vide, et par suite, il existe $x_i \in A$, $1 \leq i \leq n$, tels que $A \cap \overline{G} \bigcap_{1\leq i\leq n} \overline{W}_{x_i} = \emptyset$. Pour conclure, il suffit donc de prendre $V = G \bigcap_{1\leq i\leq n} W_{x_i}$ Ξ

Avant d'énoncer le principal résultat de ce paragraphe, rappelons des notations. Si X est un espace topologique, et f une application de X dans $\mathbb{C}$, on appelle **support de** f la fermeture de l'ensemble $\{x \in X \text{ t.q. } f(x) \neq 0\}$. Par ailleurs, A étant une partie de $\mathbb{C}$, nous noterons $\mathcal{K}(X; A)$ l'espace des fonctions continues de X dans A à support compact.

Le principal résultat de ce paragraphe est le suivant:

Théorème 4.1.4 (lemme d'Urysohn) *Soient X un espace topologique séparé localement compact, K un sous-ensemble compact de X et V un ouvert de X contenant K. Alors il existe $f \in \mathcal{K}(X; [0,1])$, telle que $f_{|K} \equiv 1$ et $\operatorname{supp}(f) \subset V$.*

Demonstration. D'après la proposition 4.1.3, il existe un ouvert W tel que $\overline{W}$ est compact et $K \subset W \subset \overline{W} \subset V$. Il suffit alors de construire une fonction $g \in \mathcal{C}(X, [0,1])$ telle que $g_{|K} \equiv 0$ et $g_{|X\backslash W} \equiv 1$. Pour cela, construisons une famille $(U_t)_{t\in[0,1]}$ d'ouverts de X vérifiant les conditions suivantes:

-(i) $K \subset U_0$;
-(ii) $U_1 \subset W$;
-(iii) pour $0 \leq t \leq t' \leq 1$, on a $\overline{U}_t \subset U_{t'}$.

Commençons tout d'abord par construire les U_t lorsque t est un nombre dyadique c'est-à-dire de la forme $t = \frac{k}{2^n}$, $0 \leq k \leq 2^n$, et ceci par récurrence sur n. Pour $n = 0$ on pose $U_1 = W$, et, d'après la proposition 4.1.3 il existe U_0 tel que $K \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset U_1$. Supposons donc les $U_{k/2^p}$ construits pour $0 \leq p \leq n-1$. Il nous faut ainsi définir les $U_{(2k+1)/2^n}$, et comme $\frac{k}{2^{n-1}} < \frac{2k+1}{2^n} < \frac{k+1}{2^{n-1}}$, il suffit d'appliquer encore la proposition 4.1.3 pour trouver un ouvert tel que $\overline{U}_{k/2^{n-1}} \subset U_{(2k+1)/2^n}$ et $\overline{U}_{(2k+1)/2^n} \subset U_{k+1/2^{n-1}}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on pose alors $U_t = \bigcup_{r\leq t, r \text{dyadique}} U_r$. Il est clair que les conditions (i) et (ii) sont satisfaites. D'autre part, si $t < t'$ il existe deux nombres dyadiques r et r' tels que $t < r < r' < t'$ et la condition (iii) est aussi satisfaite.

On définit alors la fonction g en posant $g(x) = 1$ si $x \in X \backslash U_1$ et $g(x) = \inf_{x\in U_t} \{t\}$ si $x \in U_1$. Il est alors clair que g est égale à 0 sur K et à 1 sur le complémentaire de W. Pour conclure, il suffit de voir que g est continue. Soit $x \in X$, et posons $a = f(x)$. Séparons trois cas:

a) $0 < a < 1$. Soit alors $\epsilon > 0$ assez petit de sorte que $a - \epsilon$ et $a + \epsilon$ soient dans $]0,1[$. Alors, par définition de g, $U_{a+\epsilon} \cap (X \backslash \overline{U}_{a-\epsilon})$ est un voisage de x sur lequel g est comprise entre $a - \epsilon$ et $a + \epsilon$, ce qui montre que g est continue au point x.

b) $a = 0$. Dans ce cas, pour $\epsilon > 0$, U_ϵ est un voisinage de x sur lequel g est comprise entre 0 et ϵ.

c) $a = 1$. De la même manière, pour $\epsilon > 0$, $X \backslash \overline{U}_{1-\epsilon}$ est un voisinage de x sur lequel g est comprise entre $1 - \epsilon$ et 1 Ξ

Proposition 4.1.5 *Soient X un espace topologique séparé localement compact, K un sous-ensemble compact de X et $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ un recouvrement ouvert fini de K (i.e. $K \subset \bigcup_{1\leq i\leq n} V_i$). Alors il existe des fonctions $h_i \in \mathcal{K}(X,[0,1])$, $\text{supp}(h_i) \subset V_i$ telles que $\sum_{i=1}^{n} h_i(x) = 1$ pour tout $x \in K$ (existence d'une partition de l'unite subordonnée à un recouvrement donné d'un compact).*

Demonstration. En effet, pour chaque $x \in K$, il existe i et W_x un voisinage relativement compact de x tels que $\overline{W}_x \subset V_i$. Recouvrons K par un nombre fini de ces voisinages: W_{x_j}, $1 \leq j \leq m$. Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, notons H_i la réunion des W_{x_j} qui sont contenus dans V_i. Par le lemme d'Urysohn (théorème 4.1.4) il existe $g_i \in \mathcal{K}(X;[0,1])$ telle que $g_{i|H_i} = 1$ et $\text{supp}(g_i) \subset V_i$. Posons alors $h_1 = g_1$, $h_i = \prod_{1\leq j\leq i-1}(1-g_j)g_i$, $1 \leq i \leq n$. On vérifie alors aussitôt que $\sum_{i=1}^{n} h_i = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1-g_j)$ ce qui termine la preuve, puisque pour tout $x \in K$, il existe au moins un j tel que $g_j(x) = 1$ Ξ

4.2 Mesures de Borel positives et mesures de Radon sur un espace topologique localement compact

Nous avons déjà donné au chapitre 1 la définition de mesure de Borel sur un espace topologique localement compact (définition 1.3.1). On notera qu'une mesure de Borel peut être définie sur une tribu plus grande que la tribu des boréliens.

C'est dans ce paragraphe que nous allons donner le théorème fondamental d'existence de mesures de Borel positives (théorème 4.2.4). De plus, nous dégagerons les propriétés essentielles de régularité de ces mesures et nous verrons sous quelles conditions elles sont satisfaites. Introduisons tout d'abord une nouvelle définition:

Définition 4.2.1 *Soient X un espace topologique séparé localement compact et μ une mesure de Borel positive sur X définie sur une tribu $\mathcal{M}$ contenant les boréliens. Soit $E \in \mathcal{M}$. On dit que E est* **extérieurement régulier pour** *μ (resp.* **intérieurement régulier pour** *μ) si $\mu(E) = \inf\Big\{\mu(V) : \ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\Big\}$ (resp. $\mu(E) = \sup\Big\{\mu(K) : \ K \subset E,\ K \text{ compact}\Big\}$. De plus, si tout élément de $\mathcal{M}$ est à la fois extérieurement et intérieurement régulier pour μ, on dit que μ est* **régulière sur** *$\mathcal{M}$ ou simplement que μ est* **régulière**.

Proposition 4.2.2 *Soient X un espace topologique localement compact séparé et μ une mesure de Borel positive sur X régulière. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X tels que $\mu(U_i) = 0$, $\forall i \in I$. Alors $\mu\Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big) = 0$.*

Demonstration. Posons $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Puisque μ est régulière, il suffit de voir que pour tout compact $K \subset U$ on a $\mu(K) = 0$. Mais ceci est évident car on peut recouvrir K par un nombre fini d'ouverts U_i Ξ

Cette proposition permet de définir la notion de support d'une mesure de Borel positive régulière:

Définition 4.2.3 *Soient X un espace topologique localement compact séparé et μ une mesure de Borel positive sur X régulière. On appelle* **support de** *μ, et on note* $\mathrm{Supp}(\mu)$, *le plus petit fermé F de X tel que $\mu(X \backslash F) = 0$.*

Si μ est une mesure de Borel positive finie sur les compacts, alors l'aplication $\Lambda : f \longmapsto \int f d\mu$ de $\mathcal{K}(X, \mathrm{C})$ est une forme linéaire positive (i.e. $\Lambda(f) \geq 0$ si $f \geq 0$). Le principal résultat de ce paragraphe dit que la réciproque est vraie:

Théorème 4.2.4 *(*theoreme de representation de Riesz*) Soient X un espace topologique séparé localement compact et Λ une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(X; \mathrm{C})$ (i.e. $\Lambda(f) \geq 0$ si $f \geq 0$). Alors il existe une $\sigma-$algèbre $\mathcal{M}$ sur X contenant les boréliens de X et une unique mesure de Borel positive μ définie sur $\mathcal{M}$, telle que:*
1) Pour toute $f \in \mathcal{K}(X; \mathrm{C})$ on a

$$\Lambda(f) = \int f d\mu,$$

2) Les propriétés suivantes sont satisfaites:
(i) pour tout compact K de X, $\mu(K) < +\infty$;
(ii) tout élément de $\mathcal{M}$ est extérieurement régulier (pour μ), et, s'il est ouvert ou de mesure finie, il est aussi intérieurement régulier pour μ;
(iii) si $E \in \mathcal{M}$ est tel que $\mu(E) = 0$, alors $A \subset E$ implique $A \in \mathcal{M}$ (i.e. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est complet au sens de la définition 1.3.9*).*

Le théorème ci-dessus est à l'origine de la terminologie suivante:

Définition 4.2.5 *Soit X un espace topologique séparé localement compact. On appelle* **mesure de Radon sur** *X toute forme linéaire Λ sur $\mathcal{K}(X; \mathrm{C})$ telle que, pour tout compact K de X, il existe une constante C_K telle que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{K}(X; \mathrm{C})$,* $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$, *on a*

$$|\Lambda(\varphi)| \leq C_K \sup_{x \in K} |\varphi(x)|.$$

Si Λ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(X; \mathrm{C})$, et si $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$, alors, si $\psi \in \mathcal{K}(X; \mathrm{R}^+)$ est telle que $\psi_{|K} \equiv 1$ (théorème 4.1.4 et proposition 4.1.3), on a $\varphi \leq \|\varphi\|_\infty \psi$ et par suite $\Lambda(\varphi) \leq \Lambda(\psi)\|\varphi\|_\infty$. Ainsi:

Remarque 4.2.6 *Soit X un espace topologique séparé localement compact. Toute forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(X; \mathrm{C})$ est une mesure de Radon sur X.*

Demonstration du theoreme 4.2.4 . Vérifions tout d'abord l'unicité de μ. Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures vérifiant les conditions du théorème, il résulte de (i) et (ii) que les ensembles de mesures finies sont les même pour μ_1 et μ_2, et il suffit de voir que μ_1 et μ_2 sont égales sur les compacts. Si K est un compact, soit V un ouvert contenant K et tel que $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \epsilon$, $\epsilon > 0$. Alors si $f \in \mathcal{K}(X; [0,1])$ est telle que $f = 1$ sur K et $\mathrm{supp}(f) \subset V$ (lemme d'Urysohn, théorème 4.1.4), on a

$$\mu_1(K) \leq \int f d\mu_1 = \Lambda(f) = \int f d\mu_2 \leq \mu_2(V) < \mu_2(K) + \epsilon,$$

ce qui montre que $\mu_1 \leq \mu_2$, et on obtient l'autre inégalité en échangeant les rôles de μ_1 et μ_2.

Nous allons maintenant démontrer l'existence de μ et $\mathcal{M}$ en les construisant. Posons tout d'abord pour tout ouvert V de X

$$\mu(V) = \sup\{\Lambda(f);\ f \in \mathcal{K}(X; [0,1]),\ \mathrm{supp}(f) \subset V\}, \tag{2.1}$$

puis, pour toute partie E de X

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V);\ V \text{ ouvert, } E \subset V\}. \tag{2.2}$$

De plus, soit $\mathcal{M}_F$ l'ensembles des parties E de X telles que

$$\mu(E) < +\infty, \text{ et, } \mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \text{ compact, } K \subset E\}. \tag{2.3}$$

Enfin, soit $\mathcal{M}$ l'ensembles des parties E de X telles que, pour tout compact K de X, on a $E \cap K \in \mathcal{M}_F$.

Nous allons démontrer que μ et $\mathcal{M}$ ainsi définis possèdent les propriétés requises.

Tout d'abord, il est clair que μ est monotone et que $\mu(E) = 0$ implique $E \in \mathcal{M}_F \cap \mathcal{M}$. Ceci montre que la dernière condition du théorème est satisfaite, et, la régularité extérieure des éléments de $\mathcal{M}$ est automatique par définition. La démonstration des autres propriétés est assez longue, et nous allons procéder par étapes successives.

1^{ere}etape: *Soit $(E_i)_{i \in \mathrm{N}}$ une suite de parties de X. Alors*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i). \tag{2.4}$$

Demonstration. Remarquons tout d'abord que si V_1 et V_2 sont deux ouverts de X alors on a $\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$: en effet, si $g \in \mathcal{K}(X;[0,1])$ est à support dans $V_1 \cup V_2$, et si h_i, $i = 1, 2$, sont deux fonctions de $\mathcal{K}(X;[0,1])$ à supports dans V_i et telles que $h_1 + h_2 = 1$ sur le support de g (proposition 4.1.5), on a $g = h_1 g + h_2 g$, et par suite

$$\Lambda(g) = \Lambda(h_1 g) + \Lambda(h_2 g) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2),$$

ce qui donne le résultat, par définition de μ.

Par récurrence, cette inégalité s'étend immédiatement à une suite finie V_i, $1 \leq i \leq n$, d'ouverts.

Supposons $\mu(E_i) < +\infty$ pour tout i, le résultat cherché étant trivial dans le cas contraire. Soit $\epsilon > 0$. Par (2.3), il existe des ouverts V_i tels que $E_i \subset V_i$ et $\mu(V_i) \leq \mu(E_i) + \epsilon 2^{-i}$. Si $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, et si $f \in \mathcal{K}(X;[0,1])$ est à support dans V, par compacité, il existe n tel que $\mathrm{supp}(f) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, et, d'après ce qui précède, on a

$$\Lambda(f) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(V_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) + \epsilon.$$

Comme ceci a lieu pour toute f à support dans V et que $\bigcup_i E_i \subset V$, il vient

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \mu(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \epsilon,$$

ce qui prouve la première étape.

2^{eme} etape: *$\mathcal{M}_F$ contient tout les compacts de X. En particulier, la condition (i) du théorème est satisfaite. De plus, tout ouvert de X est intérieurement régulier pour μ. En particulier, $\mathcal{M}_F$ contient les ouverts V tels que $\mu(V) < +\infty$.*

Demonstration. En effet, soit K un compact de X et soit $f \in \mathcal{K}(X,[0,1])$ valant 1 sur K; alors si $V = \{f > 1/2\}$, on a $\mu(K) \leq \mu(V) \leq \Lambda(2f) < +\infty$, d'après (2.1). D'autre part, soit V un ouvert de X, et soit α tel que $\alpha < \mu(V)$; il existe donc $f \in \mathcal{K}(X;[0,1])$ à support contenu dans V telle que $\alpha < \Lambda(f)$ (d'après (2.1)). Si K est le support de f, et si W est un ouvert contenant K, on a $\Lambda(f) \leq \mu(W)$ ((2.1)) , et, d'après (2.2), $\Lambda(f) \leq \mu(K)$, donc $\alpha < \mu(K)$.

3^{eme}etape. *Soit $(E_i)_{i \in \mathrm{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_F$ deux à deux disjoints, et soit $E = \bigcup_{i \in \mathrm{N}} E_i$. Alors, $\mu(E) = \sum_{i \in \mathrm{N}} \mu(E_i)$. De plus, si $\mu(E) < +\infty$, alors $E \in \mathcal{M}_F$.*

Demonstration. Montrons tout d'abord que si K_1 et K_2 sont deux compacts disjoints, on a $\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$. En effet, d'après la proposition 4.1.3, il existe deux ouverts disjoints V_1 et V_2 tels que $K_i \subset V_i$, $i = 1, 2$. Par ailleurs, d'après la deuxieme étape, $\mu(K_1 \cup K_2) < +\infty$, et il existe un ouvert W contenant $K_1 \cup K_2$ tel que $\mu(W) \leq \mu(K_1 \cup K_2) + \epsilon$, $\epsilon > 0$ (par (2.4)) , et, par (2.1, deux fonctions $f_i \in \mathcal{K}(X,[0,1])$ à support dans $W \cap V_i$ telles que $\Lambda(f_i) > \mu(W \cap V_i) - \epsilon$. Alors $f_1 + f_2 \in \mathcal{K}(X;[0,1])$ et est à support dans W, et comme $K_i \subset W \cap V_i$, il vient

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \mu(W \cap V_1) + \mu(W \cap V_2) < \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) + 2\epsilon,$$

puis

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) < \mu(W) + 2\epsilon < \mu(K_1 \cup K_2) + 3\epsilon,$$

ce qui prouve l'assertion.

Poursuivons maintenant la démonstration de la troisième étape. Remarquons tout d'abord que nous pouvons supposer $\mu(E) < +\infty$ car dans le cas contraire, le résultat découle de la première étape. Soit $\epsilon > O$. Comme $E_i \in \mathcal{M}_F$, il existe des compacts H_i contenus dans E_i tels que, pour tout i, $\mu(H_i) > \mu(E_i) - 2^{-i}\epsilon$. En utilisant alors ce que nous avons montré précédement, il vient $\mu(E) \geq \sum_{i=0}^{n} \mu(H_i) > \sum_{i=0}^{n} \mu(E_i) - \epsilon$, et l'égalité cherchée résulte de la première étape.

Pour finir cette étape supposons $\mu(E) < +\infty$, et montrons que $E \in \mathcal{M}_F$: l'égalité que nous venons de montrer implique qu'il existe N tel que $\mu(E) \leq \sum_{i=0}^{N} \mu(E_i) + \epsilon$. Avec les notations ci-dessus, on a donc $\mu(E) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=0}^{N} H_i\Big) + 2\epsilon$, ce qui montre bien que $E \in \mathcal{M}_F$.

4^{eme}etape. *1) Si $E \in \mathcal{M}_F$ et pour $\epsilon > 0$, il existe un compact K et un ouvert V tels que $K \subset E \subset V$ et $\mu(V \backslash K) < \epsilon$.*

2) Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_F$ alors les ensembles $A \backslash B$, $A \cup B$ et $A \cap B$ appartiennent à $\mathcal{M}_F$.

Demonstration. En effet, il existe K et V tels que $\mu(V) - \epsilon/2 < \mu(E) < \mu(K) + \epsilon/2$, et comme, d'après l'étape 2, $V \backslash K \in \mathcal{M}_F$, l'étape 3 montre que $\mu(K) + \mu(V \backslash K) = \mu(V) < \mu(K) + \epsilon$, ce qui montre le 1). D'après le 1), il existe deux compacts K et H et deux ouverts V et W tel que $K \subset A \subset V$, $H \subset B \subset W$ et $\mu(V \backslash K) < \epsilon$, $\mu(H \backslash W) < \epsilon$. Alors

$$A \backslash B \subset (V \backslash K) \cup (K \backslash W) \cup (W \backslash H),$$

et l'étape 1 montre que $\mu(A \backslash B) \leq \mu(K \backslash W) + 2\epsilon$, ce qui montre que $A \backslash B \in \mathcal{M}_F$. Enfin, comme $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$, on a aussi $A \cap B \in \mathcal{M}_F$ et puisque $A \cup B = (A \backslash B) \cup B$, il resulte de la troisième étape que $A \cup B \in \mathcal{M}_F$.

5^{eme}etape. *1) $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre contenant les boréliens de X.*

2) $\mathcal{M}_F$ est exactement l'ensemble des $E \in \mathcal{M}$ tels que $\mu(E) < +\infty$.

3) μ est une mesure sur $\mathcal{M}$.

Demonstration. Vérifions tout d'abord le 1). Si $A \in \mathcal{M}$ et si K est un compact de X alors $(E \backslash A) \cap K = K \backslash (A \cap K)$, et le 2) de l'étape précédente montre que $(E \backslash A) \cap K \in \mathcal{M}_F$ ce qui signifie que $E \backslash A \in \mathcal{M}$. Soit maintenant A_i, $i \in \mathrm{N}$ des éléments de $\mathcal{M}$, et posons $A = \bigcup_{i \in \mathrm{N}} A_i$. Si on pose $B_0 = A_0 \cap K$ et $B_n = (A_n \cap K) \backslash \Big(\bigcap_{0 \leq i \leq n-1} B_i \Big)$, alors les B_i sont des éléments de $\mathcal{M}_F$, deux à deux disjoints, $A \cap K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$, et la troisième étape montre que $A \cap K \in \mathcal{M}_F$ donc $A \in \mathcal{M}$. Enfin, si F est un fermé de X alors $F \cap K$ est un compact donc $F \in \mathcal{M}$, ce qui prouve que $\mathcal{M}$ contient les boréliens de X.

Montrons maintenant le 2). Si $E \in \mathcal{M}_F$, les deuxième et troisième étapes montrent que $E \cap K \in \mathcal{M}_F$ pour tout compact K. Donc $E \in \mathcal{M}$. Inversement, supposons $E \in \mathcal{M}$ et $\mu(E) < +\infty$, et soit V un ouvert tel que $E \subset V$ et $\mu(V) < +\infty$ (d'après 2.2). D'après la deuxième étape, on a donc $V \in \mathcal{M}_F$, et la quatrième étape montre qu'il existe un compact $K \subset V$ tel que $\mu(V \backslash K) < +\epsilon$, $\epsilon > 0$. Puisque $E \cap K \in \mathcal{M}_F$, il existe un compact $H \subset E \cap K$ tel que $\mu(E \cap K) < \mu(H) + \epsilon$, et comme $E \subset (E \cap K) \cup (V \backslash K)$, la première étape montre que $\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V \backslash K) < \mu(H) + 2\epsilon$ ce qui montre que $E \in \mathcal{M}_F$.

Enfin, le 3) résulte aussitôt de l'étape 3 et du 2).

Pour achever la démonstration du théorème, il ne nous reste plus qu'à montrer que la mesure μ représente bien la forme linéaire Λ:

Derniere etape: *pour toute* $f \in \mathcal{K}(X; \mathbb{C})$, $\Lambda(f) = \int f d\mu$.

Demonstration. Il suffit naturellement de le montrer pour f à valeurs réelles, et, en remplaçant f par $-f$, il suffit de voir que

$$\Lambda(f) \leq \int f d\mu. \tag{2.5}$$

Soit K le support de f et soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant l'image de f. Soient $\epsilon > 0$ et y_i $0 \leq i \leq n$ des réels tels que $y_0 < a < y_1 < \ldots < y_n = b$, $y_i - y_{i-1} < \epsilon$, et posons $E_i = \{y_{i-1} < f \leq y_i\} \cap K$. Les E_i sont donc des boréliens de X deux à deux disjoints dont la réunion est K. D'après les étapes précédentes, pour tout i il existe des ouverts $V_i \supset E_i$ tels que $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \epsilon/n$, et $f_{|V_i} < y_i + \epsilon$. D'après la proposition 4.1.5, il existe $h_i \in \mathcal{K}(X; [0,1])$, à support contenu dans V_i tels que $\sum_i h_i = 1$ sur K et par suite $f = \sum_i h_i f$. Puisque $h_i f \leq (y_i + \epsilon) h_i$, on a

$$\Lambda(f) = \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \epsilon)\Lambda(h_i) = \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \epsilon)\Lambda(h_i) - |a| \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i).$$

Or, si $W = \left\{ \sum h_i > \alpha \right\}$, $0 < \alpha < 1$, on a $\mu(K) < \mu(W) \leq \Lambda\left(\frac{1}{\alpha} \sum h_i\right)$, et, en faisant tendre α vers 1, il vient $\mu(K) \leq \Lambda\left(\sum h_i\right)$. Par suite, on a

$$\begin{aligned} \Lambda(f) &\leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \epsilon) \left[\mu(E_i) + \frac{\epsilon}{n}\right] - |a|\mu(K) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \epsilon)\mu(E_i) + 2\epsilon\mu(K) + \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \epsilon). \end{aligned}$$

Comme $y_i - \epsilon < f(x)$ sur E_i, il vient donc

$$\Lambda(f) \leq \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f d\mu + \epsilon(2\mu(K) + |a| + b + \epsilon) = \int f d\mu + \epsilon(2\mu(K) + |a| + b + \epsilon),$$

ce qui donne l'inégalité 2.5 et achève la démonstration Ξ

Remarque 4.2.7 *On notera que l'énoncé du théorème de Riesz ne dit pas que μ est régulière. En fait cela est faux en général. Pour que μ soit régulière, il faut faire une hypothèse supplémentaire sur X.*

Introduisons tout d'abord une définition:

Définition 4.2.8 *On dit qu'un espace topologique X est $\sigma-$***compact** *s'il est réunion dénombrable d'ensembles compacts.*

Proposition 4.2.9 *Plaçons nous dans les hypothèses du théorème de représentation de Riesz (théorème 4.2.4) et supposons de plus que X est $\sigma-$compact. Alors la mesure μ est régulière sur $\mathcal{M}$. De plus, on a les propriétés suivantes:*
1) Pour tout $E \in \mathcal{M}$, et tout $\epsilon > 0$ il existe un fermé F et un ouvert V tels que $F \subset E \subset V$ et $\mu(V \backslash F) < \epsilon$.
2) Pour tout $E \in \mathcal{M}$, il existe un F_σ, A, et un G_δ, B, tels que $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \backslash A) = 0$.
3) Si $\mathcal{B}$ est la tribu des boréliens de X, l'espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est le complété de $(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Demonstration. En effet, supposons $X = \bigcup_{i \in \mathrm{N}} K_i$, les K_i étant compacts. Si $E \in \mathcal{M}$, et $\epsilon > 0$, on a $\mu(E \cap K_i) < +\infty$ et il existe des ouverts V_i contenant $E \cap K_i$ tels que $\mu(V_i \backslash (E \cap K_i)) < \epsilon / 2^{i+2}$. Si $V = \bigcup_{i \in \mathrm{N}} V_i$, alors $\mu(V \backslash E) < \epsilon/2$. En appliquant ceci à $X \backslash E$, on trouve un ouvert W tel que $X \backslash E \subset W$ et $\mu(W \backslash (X \backslash E)) < \epsilon/2$. Le 1) en résulte aussitôt en prenant $F = X \backslash W$. Par ailleurs, si F est fermé, on a $\mu(F) = \lim_{n \to \infty} \mu\Big(\big(\bigcup_{0 \leq i \leq n} K_i\big) \cap F\Big)$ et la régularité de μ en découle. Enfin, pour voir le 2), appliquons le 1) à $\epsilon = 1/j$, $j \in \mathrm{N}^*$. On a ainsi des fermés F_j et des ouverts V_j tels que $F_j \subset E \subset V_j$ et $\mu(V_j \backslash F_j) < 1/j$. Il suffit alors de prendre $A = \bigcup_j F_j$ et $B = \bigcap_j V_j$. Le 3) résulte du 2) car si $A \in \mathcal{M}$ est tel que $\mu(A) = 0$, il existe un borélien B (un G_δ) contenant A et tel que $\mu(B) = 0$ Ξ

Proposition 4.2.10 *Soit X un espace topologique séparé localement compact pour lequel tout ouvert est $\sigma-$compact. Soit λ une mesure de Borel positive sur X finie sur les compacts. Alors λ est régulière.*

Demonstration. Pour toute $f \in \mathcal{K}(X; \mathrm{C})$ posons $\Lambda(f) = \int f d\lambda$ L'hypothèse sur λ implique donc que Λ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(X; \mathrm{C})$. D'après le théorème de représentation de Riesz (théorème 4.2.4), il existe une mesure μ, vérifiant les conclusions de la proposition 4.2.9, telle que, pour $f \in \mathcal{K}(X; \mathrm{C})$, $\int f d\mu = \int f d\lambda$. Soit alors V un ouvert. Par hypothèse, $V = \bigcup_{i \in \mathrm{N}} H_i$, les H_i étant compacts. D'après le lemme d'Urysohn (théorème 4.1.4, on peut trouver une suite croissante de fonctions $f_i \in \mathcal{K}(X; [0,1])$ telles que f_{n+1} vaille 1 sur $\bigcup_{0 \leq i \leq n} H_i \bigcup_{0 \leq j \leq n} \mathrm{supp}(f_j)$ et $\mathrm{supp}(f_{n+1}) \subset$

V. Alors (f_n) tend partout vers la fonction caractéristique de V, et le théorème de Beppo-Levi (théorème 2.1.11) appliqué à λ et à μ donne $\lambda(V) = \mu(V)$. Alors, si E est un borélien de X, d'après la proposition 4.2.9, il existe un fermé F et un ouvert V tels que $F \subset E \subset V$ et $\mu(V \backslash F) < \epsilon$; comme $V \backslash F$ est ouvert, ce qui précède montre que $\lambda(V \backslash F) < \epsilon$ d'où la régularité de λ Ξ

Remarque 4.2.11 *1) On peut donner des exemples d'espaces topologiques séparés compacts pour lesquels la conclusion de la proposition* 4.2.10 *est fausse.*
2) Il est clair que l'espace euclidien R^n *vérifie les hypothèses de le proposition* 4.2.10. *Plus généralement, on peut montrer que tout espace topologique séparé localement compact à base dénombrable d'ouverts vérifie les hypothèses de la proposition* 4.2.10.

4.3 La mesure de Lebesgue

Proposition 4.3.1 *Soit* μ *une mesure de Borel sur* R^n *finie sur les pavés. Alors* μ *est régulière et est entièrement déterminée sur les boréliens de* R^n *par ses valeurs sur les pavés.*

Demonstration. En effet, soit K un compact de R^n. Recouvrons K par un nombre fini de pavés deux à deux disjoints de cotés $1/m$. Soit A_m la réunion de ces pavés. Alors $K \subset A_m$ ce qui montre que μ est finie sur les compacts, et, d'après la proposition 4.2.10, μ est régulière. Comme les pavés de R^n forment une base pour la topologie de R^n, il en résulte que $\mu(K) = \inf_m \mu(A_m)$, et μ est entierement déterminée Ξ

Cette proposition montre l'unicité de la mesure de Lebesgue sur R^n. Nous allons maintenant voir son existence.

Théorème 4.3.2 *Il existe une tribu* $\mathcal{M}$ *sur* R^n *contenant la tribu des boréliens et une mesure de Borel régulière* m *sur* $\mathcal{M}$ *tels que l'espace mesuré* $(\mathrm{R}^n, \mathcal{M}, m)$ *soit complet et possédant de plus les propriétés suivantes:*
(a) pour tout pavé P, $m(P)$ *est égal au volume euclidien de* P;
(b) pour tout $E \in \mathcal{M}$, *il existe un* F_σ, A, *et un* G_δ, B, *tels que* $m(B \backslash A) = 0$;
(c) m *est invariante par translation (i.e.* $\forall E \in \mathcal{M}$, $\forall x \in \mathrm{R}^n$, $m(E + x) = m(E)$*).*
De plus, si μ *est une mesure de Borel positive sur* R^n *finie sur les pavés et invariante par translation alors il existe une constante* C *telle que pour tout borélien* E *de* R^n *on ait* $\mu(E) = Cm(E)$.

Demonstration. Nous allons appliquer le théorème de représentation de Riesz à la forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ donnée par l'intégrale de Riemann. Pour être complet, rappelons cette dernière. Pour cela fixons quelques notations. Notons D_k l'ensemble des points de R^n dont les coordonnées sont des nombres dyadiques de la forme $\frac{m}{2^k}$, et P_k l'ensemble des pavés de R^n de la forme $P = \{x \in \mathrm{R}^n;\ \alpha_i \leq x_i < \alpha_i + 2^{-k},\ 1 \leq i \leq n\}$, où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in D_k$. Alors, si $f \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n; \mathrm{R})$, posons $\Lambda_k(f) = 2^{-kn} \sum_{x \in D_k} f(x)$. La continuité uniforme de f montre que, pour $\epsilon > 0$, il existe un entier M et deux fonctions g et h à support contenu dans un pavé P contenant le support de f telles que, :

(i) g et h sont constantes sur tout pavé de P_M;
(ii) $g \leq f \leq h$;
(iii) $h - g < \epsilon$.

Il est alors à peu près immédiat que pour $k > M$, on a

$$\Lambda_M(g) = \Lambda_k(g) \leq \Lambda_k(f) \leq \Lambda_k(h) = \Lambda_M(h),$$

et, par suite, les limites supérieures et inférieures de la suite $(\Lambda_k(f))_{k \in \mathrm{N}}$ diffèrent au plus de $\epsilon \mathrm{Vol}(P)$. Par conséquent, pour toute $f \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$, la limite $\Lambda(f) = \lim_{k \to \infty} \Lambda_k(f)$ existe: c'est l'intégrale de Riemann de f.

Appliquons donc à Λ le théorème 4.2.4: on a ainsi l'existence d'une tribu $\mathcal{M}$ contenant les boréliens et d'une mesure de Borel m, l'espace $(\mathrm{R}^n, \mathcal{M}, m)$ étant complet, et la proposition 4.2.9 donne le (b) du théorème et la régularité de m.

Soit maintenant P un pavé ouvert de R^n dont les côtés sont de longueur l_i de sorte que le volume de P est $\prod_{1 \leq i \leq n} l_i$. Soit E_k la réunion des pavés de P_k dont l'adhérence est contenue dans P, et soit $f \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n; [0,1])$ telle que $f = 1$ sur E_k et $\mathrm{supp}(f) \subset P$. La construction de Λ montre que $\Lambda(f) \geq \prod_{i=1}^{n} (l_i - 2^{1-k})$, et, en faisant tendre k vers l'infini, (2.1) montre que $m(P) = \mathrm{Vol}(P)$. Alors le (a) du théorème en résulte car tout pavé est intersection d'une suite décroissante de pavés ouverts.

Comme tout ouvert de R^n est réunion dénombrable de pavés deux à deux disjoints, ce qui précède montre que pour tout ouvert V on a $m(V + x) = m(V)$ pour tout $x \in \mathrm{R}^n$. Et comme, pour tout $E \in \mathcal{M}$, on a $m(E) = \inf\{m(V);\ V \text{ ouvert}, \quad E \subset \mathrm{V}\}$, le (c) est démontré.

Reste à voir l'unicité. Soit P_0 un pavé dont les côtés sont tous égaux à 1, et posons $C = \mu(P_0)$. Soit P un pavé de côtés 2^{-k}. Comme P_0 est réunion de 2^{kn} pavés dont les côtés sont 2^{-k}, on a $2^{kn}\mu(P) = \mu(P_0) = 2^{kn} C m(P)$. Par suite (proposition 4.3.1), pour tout ouvert V on a $\mu(V) = Cm(V)$, et la conclusion résulte de la proposition 4.2.9 Ξ

Remarque 4.3.3 *1) La tribu définie dans le théorème* 4.3.2 *s'appelle la* **tribu de Lebesgue** *et ses éléments les* **ensembles Lebesgue-mesurables**. *La proposition* 4.2.9 *montre que la tribu de Lebesgue est la tribu complétée de la tribu des boréliens pour la mesure de Lebesgue.*
2) On peut démontrer, en utilisant l'axiome du choix, qu'il existe des sous-ensembles de R *qui ne sont pas Lebesgue-mesurables. Par exemple, si on définit la relation d'équivalence* $x\mathcal{R}y$ *entre nombres réels par* $x - y \in \mathrm{Q}$*, et si on considère l'ensemble* E *des points de* $[0,1]$ *qui contient exactement un point de chaque classe d'équivalence, il n'est pas très difficile de voir que* E *n'est pas Lebesgue mesurable.*

4.4 Fonctions continues et fonctions mesurables sur un espace localement compact

Dans ce paragraphe, nous allons voir que, sur un espace localement compact muni d'une mesure de Borel régulière, on peut approcher les fonctions mesurables par des fonctions continues de deux manières différentes: d'une part ponctuellement et d'autre part en norme L^p.

Théorème 4.4.1 (theoreme de Lusin) *Soient X un espace topologique localement compact, μ une mesure de Borel régulière finie sur les compacts (définie sur une tribu $\mathcal{M}$ contenant les boréliens) et f une fonction mesurable sur X telle qu'il existe un ensemble mesurable A de mesure finie tel que $f(x) = 0$ si $x \notin A$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction $g \in \mathcal{K}(X; \mathbb{C})$ telle que $\mu(\{f \neq g\}) < \epsilon$ et $\sup_{x\in X} |g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)|$.*

Demonstration. Nous allons tout d'abord construire g de sorte que $\mu(\{f \neq g\}) < \epsilon$. Nous montrerons ensuite comment on peut modifier g pour avoir en plus la condition sur les normes uniformes.

Supposons tout d'abord A compact et $0 \leq f < 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq i \leq 2^n$, soient $E_{n,i} = f^{-1}\Big(\Big[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\Big[\Big)$, $s_n = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}}$, $t_1 = s_1$, et $t_n = s_n - s_{n-1}$. On vérife alors sans difficultée que $2^n t_n$ est la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable T_n contenu dans A et que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n(x)$, $x \in X$. Soient V un ouvert contenant A tel que $\overline{V}$ soit compact et, pour tout n un compact K_n et un ouvert V_n tels que $K_n \subset T_n \subset V_n \subset V$ et $\mu(V_n \backslash K_n) < 2^{-n}\epsilon$. D'après le lemme d'Urysohn (théorème 4.1.4), il existe des fonctions $h_n \in \mathcal{K}(X, [0,1])$ telles que $h_{n|K_n} = 1$ et $\mathrm{supp}(h_n) \subset V_n$. Posons alors

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h_n(x),\ x \in X.$$

Il est clair que cette série converge uniformément sur X de sorte que g est continue et, de plus elle est à support compact puisqu'elle est nulle en dehors de $\overline{V}$. Par ailleurs, $2^{-n}h_n = t_n$ exépté sur $V_n \backslash K_n$, et on a $g = f$ en dehors de $\bigcup \Big(V_n \backslash K_n\Big)$ qui est un ensemble de mesure inférieure à ϵ.

L'existence de g se déduit aussitôt de ce qui précède lorsque A est compact et f mesurable et bornée. On étend immédiatement le résultat au cas $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) < +\infty$ en utilisant la régularité de μ: on choisit un compact $K \subset A$ tel que $\mu(A\backslash K)$ soit assez petit et on remplace f par $f\chi_K$. Enfin le cas général s'obtient aisément car si $B_n = \{|f| > n\}$, par hypothèse B_n est de mesure finie et $\bigcap_n B_n = \emptyset$ donc (proposition 1.3.5) $\lim_{n\to\infty\mu}(B_n) = 0$, et il suffit de remplacer f par $f(1 - \chi_{B_n})$.

Reste à voir que l'on peut modifier g pour avoir $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Il suffit naturellement de le voir si $\|f\|_\infty = R < +\infty$. Si alors φ est la fonction continue de $\mathbb{C}$ dans lui même définie par $\varphi(z) = z$ si $|z| \leq R$ et $\varphi(z) = \frac{Rz}{|z|}$ si $|z| > R$, on voit immédiatement qu'il suffit de remplacer g par $\varphi \circ g$ pour avoir les propriétés voulues Ξ

Corollaire 4.4.2 *Plaçons nous sous les même hypothèses que dans le théorème de Lusin et supposons de plus que $|f| \leq 1$. Alors il existe une suite $(g_n)_{n\in \mathrm{N}}$ de fonctions continues à support compacts, $|g_n| \leq 1$ qui converge presque partout vers f.*

Demonstration. En effet, d'après le théorème de Lusin, pour tout entier n il existe une fonction $g_n \in \mathcal{K}(X, \mathrm{C})$ telle que $|g_n| \leq 1$ et, si $E_n = \{g_n \neq f\}$, $\mu(E_n) < 2^{-n}$. Alors la fonction $h = \sum \chi_{E_n}$ est intégrable et si $A = \{h = +\infty\}$, on a $\mu(A) = 0$ (proposition 2.1.9). Par suite, si $x \in X \backslash A$ il existe un entier n tel que pour $m \geq n$, $x \notin E_m$ c'est-à-dire $f(x) = g_m(x)$ Ξ

Proposition 4.4.3 (Theoreme de Vitali–Caratheodory) *Soient X un espace topologique localement compact séparé et μ une mesure de Borel sur X régulière finie sur les compacts (définie sur une tribu $\mathcal{M}$). Soit $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ à valeurs réelles. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Alors il existe deux fonctions u et v sur X, u semi-continue supérieurement $\sup\limits_X |u| < +\infty$, v semi-continue inférieurement $\inf\limits_X |v| > -\infty$, telles que*

$$u \leq f \leq v, \text{ et, } \int (v-u)d\mu < \epsilon. \tag{4.6}$$

Demonstration. Supposons tout d'abord $f \geq 0$ (et non identiquement nulle). Comme f est limite simple d'une suite croissante (s_n) de fonctions étagées, en considérant la suite $t_n = s_n - s_{n-1}$, on voit qu'il existe une suite (E_i) d'ensembles mesurables et une suite (c_i) de constantes positives telles que $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}(x)$, $x \in X$, et, comme f est intégrable, on a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i \mu(E_i) < +\infty$. Pour tout i soient alors K_i un compact et V_i un ouvert tels que $K_i \subset E_i \subset V_i$ et $c_i\mu(V_i \backslash K_i) < 2^{-i-1}\epsilon$. Posons alors $v = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{V_i}$ et $u = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i \chi_{K_i}$, où N est choisi de sorte que $\sum\limits_{N+1}^{\infty} c_i\mu(E_i) < \epsilon/2$. Il est alors clair que u et v vérifient les conditions de la formule (4.6). Le cas général d'une fonction f à valeurs réelles se déduit du cas précédent en écrivant $f = f^+ - f^-$, en attachant u_1 et v_1 à f^+, u_2 et v_2 à f^-, puis en posant $u = u_1 - v_2$ et $v = v_1 - u_2$ Ξ

Théorème 4.4.4 *Soient X un espace topologique localement compact séparé et μ une mesure de borel sur X, définie sur une tribu $\mathcal{M}$ (contenant la tribu des boréliens), régulière finie sur les compacts. Alors pour, $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{K}(X.\mathrm{C})$ est dense dans $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.*

Demonstration. En effet, d'après la proposition 3.3.9, il suffit de voir que pour toute fonction étagée f il existe $g \in \mathcal{K}(X;\mathcal{C})$ telle que $\|g - f\|_p$ soit aussi petit que l'on veut. Or si on prend pour g la fonction donnée par le théorème de Lusin 4.4.1, on trouve $\|f - g\|_p \leq 2\epsilon^{1/p}\|f\|_\infty$ Ξ

4.5 Le théorème de représentation de Riesz pour les mesures de Borel complexes

Dans la définition 4.2.1 nous avons introduit la notion de mesure de Borel positive régulière. Etendons tout d'abord cette notion aux mesures de Borel complexes:

Définition 4.5.1 *Soient X un espace topologique localement compact séparé et μ une mesure de Borel complexe sur X.*
1) On dit que μ est régulière si la mesure de Borel positive $|\mu|$ est régulière.
2) Si μ est une mesure de borel complexe régulière, on appelle **support de** *μ et on note* $\mathrm{Supp}(\mu)$ *le support de $|\mu|$ (définition* 4.2.3*).*

Si la mesure μ est définie sur une tribu $\mathcal{M}$ contenant la tribu des boréliens, la régularité se rapporte à $\mathcal{M}$ comme pour les mesures positives. Si la tribu n'est pas précisée, il est sous-entendu qu'il s'agit de la tribu des boréliens.

On peut définir de la même manière les ensembles mesurables extérieurement et intérieurement réguliers en disant qu'ils sont réguliers pour la mesure $|\mu|$.

A la définition 3.5.4, si μ est une mesure de Borel complexe sur un espace topologique localement compact séparé X, nous avons donné un sens à l'intégrale d'une fonction de $L^1(X, \mathcal{M}, |\mu|)$ par rapport à μ. Comme $|\mu|$ est de masse totale finie, toutes les fonctions de $\mathcal{K}(X; \mathrm{C})$ sont intégrables par rapport à μ, et l'application $f \longmapsto \int f d\mu$ est clairement une forme linéaire sur $\mathcal{K}(X; \mathrm{C})$ qui est continue pour la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Ceci nous amène à introduire l'espace $\mathcal{C}_0(X; \mathrm{C})$:

Définition 4.5.2 *Soit X un espace topologique localement compact séparé. On note $\mathcal{C}_0(X; \mathrm{C})$ le complété de $\mathcal{K}(X; \mathrm{C})$ pour la norme $\| \ \|_\infty$. $\mathcal{C}_0(X; \mathrm{C})$ est formé des fonctions continues sur X qui sont nulles à l'infini c'est-à-dire telles que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un compact $K \subset X$ tel que $\sup_{x \in X \setminus K} |f(x)| < \epsilon$. De plus, muni de la norme $\| \ \|_\infty$, $\mathcal{C}_0(X; \mathrm{C})$ est un espace de Banach.*

Le résultat de ce paragraphe dit que le dual de $\mathcal{C}_0(X; \mathrm{C})$ s'identifie à l'espace des mesures de Borel complexes sur X:

Théorème 4.5.3 (theoreme de representation de Riesz) *Soit X un espace topologique localement compact séparé. Pour toute forme linéaire continue Φ sur $\mathcal{C}_0(X; \mathrm{C})$ il existe une unique mesure de Borel complexe régulière μ telle que*

$$\Phi(f) = \int f d\mu, \ \forall f \in \mathcal{C}_0(X; \mathrm{C}). \tag{5.7}$$

De plus, on a $\|\Phi\| = |\mu|(X)$.

Demonstration. Vérifions tout d'abord l'unicité de la mesure. Si μ est une mesure de Borel complexe régulière sur X telle que $\int f d\mu = 0$ pour tout $f \in \mathcal{C}_0(X; \mathrm{C})$, d'après la proposition 3.5.3 il existe une fonction borélienne h, $|h| = 1$, telle que $\mu = h|\mu|$ et, si (f_n) est une suite dans $\mathcal{K}(X; \mathrm{C})$ qui converge vers $\overline{h}$ dans $L^1(X, |\mu|)$ (théorème 4.4.4) on a $|\mu|(X) = \int (\overline{h} - f_n) h d|\mu| \leq \int |\overline{h} - f_n| d|\mu|$ ce qui montre que $|\mu| = 0$.

Pour démontrer l'existence de μ, nous allons tout d'abord montrer l'assertion suivante: *Il existe une forme linéaire positive Λ sur $\mathcal{K}(X; \mathrm{C})$ telle que, pour toute $f \in \mathcal{K}(X; \mathrm{C})$ on a* $|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \|\Phi\| \|f\|_\infty$.

Pour toute $f \in \mathcal{K}(X; \mathrm{R}^+)$, on définit $\Lambda(f)$ par

$$\Lambda(f) = \sup\{\, |\Phi(h)| \text{ t.q. } h \in \mathcal{K}(X; \mathrm{C}),\ |h| \leq f \,\}.$$

Il est clair que pour $0 \leq f_1 \leq f_2$, $f_i \in \mathcal{K}(X; \mathrm{R}^+)$, et $c \in \mathrm{R}^+$, on a $0 \leq \Lambda(f_1) \leq \Lambda(f_2)$ et $\Lambda(cf_1) = c\Lambda(f_1)$. Montrons que Λ est additive sur $\mathcal{K}(X; \mathrm{R}^+)$. Soient f_1 et f_2 dans $\mathcal{K}(X; \mathrm{R}^+)$ et $\epsilon > 0$. Si $h_i \in \mathcal{K}(X; \mathrm{C})$ sont telles que $|h_i| \leq f_i$ et $\Lambda(f_i) \leq |\Phi(h_i)| + \epsilon$, $i = 1, 2$, et si $\alpha_i \in \mathrm{C}$ sont tels que $\alpha_i \Phi(h_i) = |\Phi(h_i)|$, on a $\Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) \leq \Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\epsilon$ d'où $\Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) \leq \Lambda(f_1 + f_2) + 2\epsilon$. Inversement, si $h \in \mathcal{K}(X; \mathrm{C})$ est telle que $|h| \leq f_1 + f_2$, posons $h_i(x) = \dfrac{f_i(x) h(x)}{f_1(x) + f_2(x)}$ si $f_1(x) + f_2(x) > 0$ et $h_i(x) = 0$ sinon, $i = 1, 2$. Il est clair que $h_i \in \mathcal{K}(X; \mathrm{C})$, et, comme $|h_i| \leq f_i$ et $h_1 + h_2 = h$, on a $|\Phi(h)| \leq \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$. Finalement on a bien $\Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) = \Lambda(f_1 + f_2)$. On étend alors naturellement Λ à $\mathcal{K}(X; \mathrm{C})$ en séparant tout d'abord pour les fonctions réelles partie positive et partie négative puis pour les fonctions complexes partie réelle et partie imaginaire.

Appliquons maintenant le théorème 4.2.4 à Λ et appelons λ la mesure de Borel positive qu'il nous donne. Puisque $|\Lambda(f)| \leq \|\Phi\|$ si $|f| \leq 1$, on a $\lambda(X) \leq \|\Phi\|$ et λ est régulière (proposition 4.2.9). De plus on a $|\Phi(f)| \leq \int |f| d\lambda$, $f \in \mathcal{K}(X; \mathrm{C})$, ce qui montre que Φ s'étend en une forme linéaire continue sur $L^1(X; \lambda)$ (proposition 4.4.4) de norme ≤ 1. Le théorème 3.5.8 montre alors qu'il existe une fonction borélienne g, $|g| \leq 1$ telle que, pour toute $f \in \mathcal{K}(X; \mathrm{C})$, on a $\Phi(f) = \int f g d\lambda$ et cette égalité s'étend à toute fonction f de $\mathcal{C}_0(X; \mathrm{C})$ puisque λ est de masse totale finie. Ceci démontre la formule (5.7) avec $\mu = g\lambda$.

Reste à voir que $\|\Phi\| = \lambda(X)$. Or la formule (5.7) montre que $\int |g| d\lambda \geq \|\Phi\|$, et comme on a $\lambda(X) \leq \|\Phi\|$ et $|g| \leq 1$, il vient $\lambda(X) = \|\Phi\|$ et $|g| = 1$ λ-presque partout. Finalement, $|\mu| = |g|\lambda = \lambda$ (proposition 3.5.5) et on a bien $|\mu|(X) = \|\Phi\|$ Ξ

Notons μ_Φ la mesure donnée par le théorème précédent. L'application $\Phi \longmapsto \mu_\Phi$ est donc une bijection du dual de l'espace normé $\mathcal{C}_0(X, \mathrm{C})$ sur l'espace des mesures de Borel complexes régulières (cette dernière condition étant automatique si X vérifie certaines conditions topologiques (proposition 4.2.10)). Comme cette bijection est isométrique et clairement linéaire, le théorème de représentation de Riesz peut s'énoncer comme suit:

Remarque 4.5.4 *Dans les conditions du théorème précédent, et avec les notations de ci–dessus, l'application* $\Phi \longmapsto \mu_\Phi$ *est un isomorphisme isométrique du dual de l'espace de Banach* $\mathcal{C}_0(X; \mathbb{C})$ *sur l'espace des mesures de Borel complexes régulières muni de la norme* $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

Chapitre 5

PRODUIT DE MESURES

5.1 Classes monotones

Définition 5.1.1 *Soit E un ensemble. On dit qu'une partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(E)$ est une* **classe monotone** *si $\mathcal{M}$ est stable pour les réunions de suites croissantes et pour les intersections de suites décroissantes.*

Proposition 5.1.2 *Soit E un ensemble.*
1) Toute intersection d'une famille de classes monotones est une classe monotone.
2) Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Il existe une plus petite classe monotone contenant $\mathcal{A}$. On l'appelle la **classe monotone engendrée par** *$\mathcal{A}$ et on la note $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*
3) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre booléenne sur E. Pour que $\mathcal{A}$ soit une classe monotone il faut et il suffit qu'elle soit une tribu.

Demonstration. Les deux premières assertions sont évidentes. La dernière est immédiate car, si (A_n) est une suite de parties de E, la suite $n \longmapsto \bigcup_{k\leq n} A_k$ est croissante Ξ

Proposition 5.1.3 *Soient E un ensemble et $\mathcal{A}$ une algèbre booléenne de parties de E. La tribu $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$ est exactement la classe monotone $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$.*

Demonstration. Puisque $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ est clairement une classe monotone, il nous suffit de voir que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une tribu, et, d'après la proposition 5.1.2, nous devons montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une algèbre booléenne. Soit $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et montrons que le complémentaire A^c de A appartient aussi à $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Soit $\mathcal{M}_1 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \ \texttt{t.q.}\ A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$. Il est clair que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1$, et, pour conclure, il suffit de voir que $\mathcal{M}_1$ est une classe monotone ce qui se vérifie immédiatement. De même, il faut voir que si $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ alors $A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. On considère alors $\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ t.q. $A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$ et on vérifie aussitôt que $\mathcal{M}_A$ est une classe monotone. Ainsi si $A \in \mathcal{A}$ on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A$ et donc $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Maintenant si $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, on a donc, pour tout $B \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{M}_B$ et donc $B \in \mathcal{M}_A$ ce qui montre que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A$ et achève la preuve Ξ

5.2 Produits finis d'espaces mesurables

Définition 5.2.1 *Soit* $(E_i, \mathcal{M}_i)_{1 \le i \le n}$ *une famille finie d'espaces mesurables.*
1) On appelle **ensembles mesurables élémentaires** *les parties de* $\prod_{i=1}^{n} E_i$ *de la forme* $\prod_{i=1}^{n} A_i$ *où* $A_i \in \mathcal{M}_i$, $1 \le i \le n$. *On appelle* **tribu produit des tribus** $\mathcal{M}_i$ *la tribu* $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$ *sur* $\prod_{i=1}^{n} E_i$ *engendrée par les ensembles mesurables élémentaires.*
2) On appelle **espace mesurable produit des** $(E_i, \mathcal{M}_i)$ *l'espace mesurable* $\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i\right)$, *et on le note* $\prod_{i=1}^{n}(E_i, \mathcal{M}_i)$.

Proposition 5.2.2 *Soit* $(E_i, \mathcal{M}_i)_{1 \le i \le n}$ *une famille finie d'espaces mesurables. Toute réunion finie d'ensembles mesurables élémentaires peut s'écrire comme réunion finie d'ensembles mesurables élémentaires deux à deux disjoints.*

Demonstration. Montrons par récurrence sur n que la réunion de deux ensembles mesurables élémentaires est réunion finie d'ensembles mesurables élémentaires disjoints. Pour $n = 2$ le résultat est évident car

$$(A \times B) \cup (A' \times B') = [(A \backslash A') \times B] \cup [(A \cap A') \le (B \cup B')] \cup [(A' \backslash A) \times B'].$$

Soient $\prod_{i=1}^{n} A_i$ et $\prod_{i=1}^{n} B_i$ deux ensembles mesurables élémentaires. Si on écrit

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} A_i\right) \times E_n\right] \cap \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} E_i\right) \times A_i\right],$$

et de même pour $\prod_{i=1}^{n} B_i$, il vient, en posant $F = \left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\prod_{i=1}^{n} B_i\right)$, $F = F_1 \cap F_2$ où

$$F_1 = \left(\left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup \left(\prod_{i=1}^{n-1} B_i\right)\right] \times E_n\right) \cap \left(\left[\prod_{i=1}^{n-1} E_i\right] \times [A_n \cup B_n]\right),$$

et

$$F_2 = \left(\left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} E_i\right) \times A_n\right] \cup \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} B_i\right) \times E_n\right]\right) \cap \left(\left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} A_i\right) \times E_n\right] \cup \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} E_i\right) \times B_n\right]\right).$$

Remarquons tout d'abord que

$$F_2 = \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} E_i\right) \times (A_n \cup B_n)\right] \cup \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} (B_i \cap A_i)\right) \times E_n\right] \cup \left[\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\prod_{i=1}^{n} B_i\right)\right].$$

D'autre part, l'hypothèse de récurrence dit que

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup \left(\prod_{i=1}^{n-1} B_i\right) = \bigcup_{k=1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{n-1} C_i^k\right),$$

où les ensembles $\prod_{i=1}^{n-1} C_i^k$, $1 \leq k \leq m$, sont des ensembles mesurables élémentaires de $\prod_{i=1}^{n-1} E_i$ deux à deux disjoints. Il vient donc $F = F_3 \cup F_4$ avec

$$F_3 = \left(\bigcup_{k=1}^{m} \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} C_i^k\right) \times (A_n \cup B_n)\right]\right) \cap \left(\left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} E_i\right) \times (A_n \times B_n)\right] \cup \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} (B_i \cap A_i)\right) \times E_n\right]\right),$$

et,

$$F_4 = \left(\bigcup_{k=1}^{m} \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} C_i^k\right) \times (A_n \cup B_n)\right]\right) \cap \left[\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\prod_{i=1}^{n} B_i\right)\right].$$

On vérifie alors aisément que

$$F = \bigcup_{k=1}^{m} \left(\left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} C_i^k\right) \times (A_n \cap B_n)\right] \cup \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} \left(C_i^k \cap A_i\right)\right) \times A_n\right] \cup \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} \left(C_i^k \cap B_i\right)\right) \times B_n\right]\right),$$

ce qui s'écrit encore

$$F = \bigcup_{k=1}^{m} \left\{\left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} C_i^k\right) \times (A_n \cap B_n)\right] \cup \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} \left(C_i^k \cap A_i\right)\right) \times (A_n \backslash B_n)\right] \right.$$
$$\left. \cup \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} \left(C_i^k \cap B_i\right)\right) \times (B_n \backslash A_n)\right]\right\},$$

et le second membre de cette dernière égalité est une réunion finie d'ensembles mesurables élémentaires deux à deux disjoints Ξ

Proposition 5.2.3 *Soit $(E_i, \mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'espaces mesurables.*
1) L'ensemble des réunions finies d'ensembles mesurables élémentaires est une algèbre booléenne sur $\prod_{i=1}^{n} E_i$.
2) La tribu $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$ est la classe monotone engendrée par les réunions finies d'ensembles mesurables élémentaires.

Demonstration. D'après la proposition 5.1.3, le 2) résulte du 1). Vérifions donc ce dernier. L'intersection de deux ensembles mesurables élémentaires étant clairement un ensemble mesurable élémentaire, vérifions la stabilité par passage au complémentaire. Pour cela, d'après ce qui précède, il suffit de voir que le complémentaire d'un ensemble mesurable élémentaire est une réunion d'ensembles mesurables élémentaires ce qui est immédiat Ξ

Avant de poursuivre, rappelons une terminologie de théorie des ensembles:

Définition 5.2.4 *Soit $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'ensembles.*

1) Soit $E \subset \prod_{i=1}^{n} E_i$. On appelle **section d'abcisse** $x_i \in E_i$ **de** *E l'ensemble $E_{x_i} \subset \prod_{j\neq i} E_j$ formé des points $(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ tels que $(y_1, \ldots, x_i, \ldots, y_n) \in E$.*

2) Soit f une application de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans un ensemble F. On appelle **section d'abcisse** $x_i \in E_i$ **de** *f l'application f_{x_i} de $\prod_{j\neq i} E_j$ dans F définie par $f_{x_i}(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n) = f(y_1, \ldots, x_i, \ldots, y_n)$.*

Proposition 5.2.5 *Soient $(E_i, \mathcal{M}_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'espaces mesurables, E un élément de la tribu produit $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$ et f une fonction mesurable de $\prod_{i=1}^{n}(E_i, \mathcal{M}_i)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $x_i \in E_i$. Alors:*

1) E_{x_i} est un ensemble mesurable pour la tribu produit $\prod_{j\neq i} \mathcal{M}_j$.

2) f_{x_i} est une fonction mesurable pour la tribu produit $\prod_{i\neq j} \mathcal{M}_j$.

Demonstration. Vérifions tout d'abord le 1). Si E est un ensemble élémentaire le résultat est évident et il en est donc de même pour une réunion finie d'ensembles élémentaires. Soit alors $\mathcal{M}_0$ l'ensemble des $E \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$ tels que E_{x_i} soit mesurable. D'après la proposition 5.2.3, il suffit, pour conclure, de voir que $\mathcal{M}_0$ est une classe monotone, ce qui est évident. Vérifions maintenant le 2). Il suffit de considérer le cas où f est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si on remarque alors que $\{f_{x_i} \geq \alpha\} = \{f \geq \alpha\}_{x_i}$, la conclusion résulte de la proposition 1.2.5 et du 1) Ξ

Proposition 5.2.6 *Soient E_i, $1 \leq i \leq n$, des espaces topologiques, $\mathcal{B}_i$ la tribu borélienne sur E_i, et $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur l'espace topologique produit $\prod_{i=1}^{n} E_i$. Alors, $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$. De plus, si les E_i sont à bases dénombrables d'ouverts, on a l'égalité $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i = \mathcal{B}$ (i.e. la tribu des boréliens sur $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est la tribu produit $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$).*

Demonstration. Il suffit de faire la démonstration lorsque $n = 2$. En effet, si $A \in \mathcal{B}_1$, alors $A \times E_2 \in \mathcal{B}$ car c'est l'image réciproque par la première projection de A. De même pour $B \in \mathcal{B}_2$, et, par suite $A \times B \in \mathcal{B}$, ce qui prouve l'inclusion. Maintenant, si E_1 et E_2 sont à bases dénombrables d'ouverts, $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$, tout ouvert de $E_1 \times E_2$ est réunion dénombrable d'ouverts élémentaires $O_1 \times O_2$, O_i ouvert de E_i, donc appartient à le tribu produit $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ ce qui montre l'inclusion inverse Ξ

Remarque 5.2.7 *Si on ne fait aucune hypothèse sur les espaces topologiques E_i il se peut que l'inclusion $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$ soit stricte.*

Proposition 5.2.8 *Soient* $(E_i, \mathcal{M}_i)_{1\le i\le n}$ *une famille finie d'espaces mesurés, et* $i_1 = 0$, $1 < i_2 < \ldots < i_p = n$ *des entiers. Pour tout* $j \geq 2$ *posons* $\mathcal{M}^j = \prod_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} \mathcal{M}_i$. *Alors* $\prod_{j=2}^{p} \mathcal{M}^j = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$.

Demonstration. En effet, en raisonnant par récurrence sur p, on est aussitôt ramené à montrer que si $1 \leq m \leq n$, $\mathcal{M}^1 = \prod_{i=1}^{m-1} \mathcal{M}_i$ et $\mathcal{M}^2 = \prod_{i=m}^{n} \mathcal{M}_i$, on a $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i = \mathcal{M}^1 \times \mathcal{M}^2$. Pour le voir, d'après la proposition 5.2.3, il suffit de montrer que si $A^1 \in \mathcal{M}^1$ et $A^2 \in \mathcal{M}^2$, on a $A^1 \times A^2 \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$. Mais ceci résulte de la proposition 5.2.3 car le résultat est évident si A^2 est élémentaire Ξ

5.3 Produits finis d'espaces mesurés

Théorème 5.3.1 *Soit* $(E_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)_{1\le i\le n}$ *une famille finie d'espaces mesurés les mesures* μ_i *étant* $\sigma-$**finies**. *Sur la tribu produit* $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$ *il existe une et une seule mesure* μ *telle que, pour tout ensemble mesurable élémentaire* $\prod_{i=1}^{n} A_i$ *on ait* $\mu\Big(\prod_{i=1}^{n} A_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i)$, *étant entendu que, si l'un des* $\mu_i(A_i)$ *est nul, le produit est nul. La mesure* μ *s'appelle la* **mesure produit des mesures** μ_i *et se note* $\prod_{i=1}^{n} \mu_i$ *et l'espace mesuré* $\Big(\prod_{i=1}^{n} E_i, \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i, \prod_{i=1}^{n} \mu_i\Big)$ *s'appelle* **l'espace mesuré produit des espaces mesurés** $(E_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ *et ce note* $\prod_{i=1}^{n}(E_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$.

Demonstration. Nous allons faire cette démonstration en deux étapes.
1^{ere}etape: *Cas où les mesures* μ_i *sont finies.*

Démontrons tout d'abord l'existence de μ. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions mesurables f de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ telles que, pour tout i, et tout $(x_{i+1}, \ldots x_n) \in \prod_{j=i+1}^{n} E_i$, la fonction

$$x_i \longmapsto \int \ldots \int \left[\int f d\mu_1(x_1)\right] d\mu_2(x_2) \ldots d\mu_{i-1}(x_{i-1})$$

est μ_i-intégrable, et posons $\mathcal{M}_0 = \Big\{E \in \prod_{i=1}^{n} E_i \text{ t.q. } \chi_E \in \mathcal{F}\Big\}$. Il est clair que $\mathcal{M}_0$ contient les ensembles mesurables élémentaires, donc d'après la proposition 5.2.2, les réunions finies d'ensembles mesurables élémentaires. Montrons maintenant que $\mathcal{M}_0$ est une classe monotone. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone dans $\mathcal{M}_0$ et posons $B = \lim_{n\to\infty} B_n$ (i.e. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ si (B_n) est croissante et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ si

(B_n) est décroissante). Comme la suite (χ_{B_n}) converge simplement vers χ_B, et que $\mu_1(E_1) < +\infty$, le théorème de Beppo–Levi (théorèmes 2.1.11 et 2.2.4) donne

$$\lim_{n\to\infty}\int \chi_{B_n} d\mu_1 = \int \chi_B d\mu_1 \leq \mu_1(E_1).$$

Les fonctions $x_2 \longmapsto \displaystyle\int \chi_{B_n} d\mu_1$ étant, par hypothèse mesurables, il en résulte qu'il en est de même de $x_2 \longmapsto \displaystyle\int \chi_B d\mu_1$ (proposition 1.2.8), et, une nouvelle application du théorème de Beppo–Levi donne

$$\lim_{n\to\infty}\int \Big[\int \chi_{B_n} d\mu_1\Big] d\mu_2 = \int \Big[\int \chi_B d\mu_1\Big] d\mu_2.$$

En raisonnant par récurrence, on conclut immédiatement que $\chi_B \in \mathcal{F}$ ce qui prouve que $B \in \mathcal{M}_0$. La proposition 5.2.3 donne alors $\mathcal{M}_0 = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$. Nous définissons alors la mesure μ sur $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$ en posant

$$\mu(F) = \int \Big[\ldots \Big[\int \chi_F d\mu_1\Big] \ldots\Big] d\mu_n.$$

Il nous faut alors vérifier que μ ainsi définie est bien une mesure sur $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i$ qui répond à la question. Comme on a $\mu\Big(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} A_i\Big) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i)$ pour tout ensemble mesurable élémentaire $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} A_i$, il nous suffit de voir que μ est σ–additive. Or, si $(F_m)_{m\in\mathrm{N}}$ est une suite d'éléments de $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$ deux à deux disjoints, d'après le corollaire 2.1.14, on a

$$\int \chi_F d\mu_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \int \chi_{F_m} d\mu_1,$$

puis

$$\int \Big[\int \chi_F d\mu_1\Big] d\mu_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \int \Big[\int \chi_{F_m} d\mu_1\Big] d\mu_2,$$

et ainsi de suite, on a bien $\mu(F) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \mu(F_m)$, ce qui achève de montrer l'existence de la mesure μ.

Montrons maintenant l'unicité de μ. S'il y avait deux mesures μ et λ répondant à la question, elles coïncideraient sur les ensembles mesurables élémentaires donc aussi (proposition 5.2.2) sur leurs réunion finies. Si on pose alors $\mathcal{M}_0 = \Big\{E \in \displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i \text{ t.q. } \mu(E) = \lambda(E)\Big\}$, il nous sufit de voir, pour conclure que $\mathcal{M}_0$ est une classe monotone ce qui résulte aussitôt de la proposition 1.3.5 puisque μ et λ sont de masses totales finies.

2$^{\text{eme}}$ etape: *cas général où les mesures μ_i sont σ–finies.*

Démontrons tout d'abord l'existence de μ. Pour $1 \leq k \leq n$, soit $(B_k^j)_{j\in\mathrm{N}}$ une suite croissante de parties mesurables de E_k telles que $\mu_k(B_k^j) < +\infty$, $\forall j \in \mathrm{N}$, et $E_k = \displaystyle\bigcup_{j\in\mathrm{N}} B_k^j$ et posons $B^j = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} B_k^j$, de sorte que $(B_j)_{j\in\mathrm{N}}$ est une suite croissante de parties mesurables de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} E_k$ telle que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i =$

$\bigcup_{j\in\mathrm{N}} B^j$. D'après la première étape, on peut considérer l'espace mesuré produit $(B^j,\mathcal{M}^j,\mu^j) = \prod_{k=1}^{n}(B_k^j,\mathcal{M}_k^j,\mu_k^j)$ ($(B_k^j,\mathcal{M}_k^j,\mu_k^j)$ étant la restriction de $(E_k,\mathcal{M}_k,\mu_k)$ à B_k^j), et l'unicité de la première étape montre que μ^{j+1} restreint à B^j est μ^j. Soit alors $\mathcal{M}_0$ l'ensemble des parties B de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ telles que, pour tout j on ait $B\cap B^j \in \mathcal{M}^j$. Comme les $\mathcal{M}^j$ sont des tribus, il en est de même de $\mathcal{M}_0$, et comme $B = \bigcup_{j\in\mathrm{N}}(B\cap B^j)$, et, $\mathcal{M}^j \subset \prod_{i=1}^{n}\mathcal{M}_i$, on a $\mathcal{M}_0 \subset \prod_{i=1}^{n}\mathcal{M}_i$. Par ailleurs, pour $B \in \prod_{i=1}^{n}\mathcal{M}_i$, on a $B\cap B^j \in \mathcal{M}^j$, et, par suite, on a $\mathcal{M}_0 = \prod_{i=1}^{n}\mathcal{M}_i$. Alors, pour tout $F \in \prod_{i=1}^{n}\mathcal{M}_i$, on peut considérer la suite croissante $j \longmapsto \mu^j(F\cap B^j)$ et poser, par définition

$$\mu(F) = \lim_{j\to\infty}\mu^j(F\cap B^j).$$

Il est alors clair que pour tout ensemble mesurable élémentaire $\prod_{i=1}^{n} A_i$ on a $\mu\Big(\prod_{i=1}^{n} A_i\Big) = \prod_{i=1}^{n}\mu_i(A_i)$, et, pour conclure, il suffit de prouver que μ est $\sigma-$addditive. Or, si $(F_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\prod_{i=1}^{n}\mathcal{M}_i$, et $F = \bigcup_{n\in\mathrm{N}} F_n$, pour tous j et k, on a, d'après la première partie, $\mu(F) \geq \sum_{n=1}^{k}\mu^j(F_n\cap B^j) \geq \sum_{n=1}^{k}\mu(F_n)$, d'où $\mu(F) \geq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n)$. D'autre part, pour tout j, $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^j(F_n\cap B^j) = \mu^j(F\cap B^j)$, et donc, $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n) \geq \mu(F)$, ce qui achève de montrer l'existence de μ.

Vérifions maintenant l'unicité de μ. Si λ est une autre mesure vérifiant les propriétés du théorème, si λ^j désigne la restriction de λ à $(B^j,\mathcal{M}^j)$, l'unicité de la première partie montre que $\lambda^j = \mu^j$. Or, pour tout $B \in \prod_{i=1}^{n}\mathcal{M}_i$, d'après la proposition 1.3.5, on a $\lambda(B) = \lim_{j\to\infty}\lambda^j(B\cap B^j)$ et $\mu(B) = \lim_{j\to\infty}\mu Uj(B\cap B^j)$, ce qui montre que $\lambda = \mu$ et achève la preuve du théorème Ξ

Corollaire 5.3.2 *Dans les conditions du théorème précédent, pour tout $B \in \prod_{i=1}^{n}\mathcal{M}_i$, et pour toute permutation σ de $\{1,2,\ldots,n\}$, on a*

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\mu_i\right)(B) = \int\Big[\ldots\Big[\int \chi_B d\mu_{\sigma(1)}\Big]\ldots\Big]d\mu_{\sigma(n)}. \tag{3.1}$$

Demonstration. Vérifions tout d'abord la formule lorsque σ est l'identité. En reprenant les notation de la démonstration du théorème, et en remarquant que $\prod_{i=1}^{n}\mu_i$ restreinte à B^j est μ^j, la preuve de la première partie du théorème montre que le formule (3.1) est vraie si on remplace B par $B\cap B^j$ et la conclusion s'obtient en applquant le théorème de Beppo-Levi (théorème 2.1.11).

Considérons maintenant la premutation σ. Soit f la bijection canonique de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ sur $\prod_{i=1}^{n} E_{\sigma(i)}$. f induit donc une bijection de $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$ sur $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_{\sigma(i)}$ (proposition 1.2.1). La mesure produit $\prod_{i=1}^{n} \mu_{\sigma(i)}$ peut donc être considérée comme une mesure sur $\prod_{i=1}^{n} E_i$, et, comme elle satisfait les conditions du théorème, par l'unicité, elle est égale à $\prod_{i=1}^{n} \mu_i$, ce qui achève la démonstration Ξ

Proposition 5.3.3 *Soient $(E_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'espaces mesurés les mesures μ_i étant $\sigma-$finies et $i_1 = 0, 1 < i_2 < \ldots < i_p$ une suite d'entiers et σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. Pour tout $j \geq 2$, posons $\mu^{(j)} = \prod_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} \mu_{\sigma(i)}$. Alors, $\prod_{j=1}^{p} \mu^{(j)} = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$ (c.f. proposition 5.2.8). En particulier, si $B \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$ on a*

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\right)(B) = \int \left[\int \chi_B d\mu_{\sigma(1)}\right] d\left(\prod_{i=1}^{n} \mu_{\sigma(i)}\right).$$

Demonstration. L'égalité des deux mesures résulte aussitôt de l'unicité du théorème 5.3.1, et la dernière assertion résulte du corollaire 5.3.2 Ξ

Proposition 5.3.4 *Soit $(E_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'espaces mesurés, les mesures μ_i étant $\sigma-$finies. Alors la mesure produit $\prod_{i=1}^{n} \mu_i$ est $\sigma-$finie.*

Demonstration. En reprenant les notations de la démonstration du théorème 5.3.1, on remarque que $\left(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\right)(B^j) = \mu^j(B^j) = \prod_{k=1}^{n} \mu_k^j(B_k^j) < +\infty$, puisque les mesures μ_k^j sont finies Ξ

Remarque 5.3.5 *Dans les résultats énoncés dans ce paragraphe, l'hypothèse de $\sigma-$finitude des mesures μ_i est indispensable.*

Par exemple si m est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et ν la mesure discrète sur $[0, 1]$, il est clair que la diagonale Δ de $[0, 1] \times [0, 1]$ est un ensemble mesurable (i.e. dans $\mathcal{B} \times \mathcal{P}([0, 1])$ où $\mathcal{B}$ est la tribu des boréliens). Or, pour tout $x, y \in [0, 1]$, $\nu(\Delta_x)$ et $m(\Delta_y) = 0$, ce qui implique $\int \nu(\Delta_x)dm = 1$ et $\int m(\Delta_y)d\nu = 0$, et la formule (3.1) du corollaire 5.3.2 n'est pas vérifiée Ξ

La proposition 5.2.6 montre que, si $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne sur R, le produit $n-$fois répété de $\mathcal{B}$ par elle même, est égal à la tribu borélienne sur R^n. L'unicité du théorème 5.3.1 montre alors le résultat suivant:

Proposition 5.3.6 *Soit $\mathcal{B}_n$ la tribu borélienne sur R^n. Soit m la mesure de Lebesgue sur R. Le produit $n-$fois répété de m par elle même est égale à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}_n$.*

5.4 Le théorème de Fubini

Proposition 5.4.1 *Soient $(E_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'espaces mesurés, les mesures μ_i étant σ-finies, et f une fonction de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable par rapport à la tribu produit $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$. Alors, pour toute permutation σ de $\{1,\dots,n\}$, on a:*
- la fonction $x_{\sigma(1)} \longmapsto f(x_1,\dots,x_{\sigma(1)},\dots,x_n)$ est $\mathcal{M}_{\sigma(1)}$-mesurable, les variables x_i, $i\neq\sigma(1)$, étant fixés;
- la fonction $x_{\sigma(2)} \longmapsto \int f d\mu_{\sigma(1)}$ est $\mathcal{M}_{\sigma(2)}$-mesurable, les variables x_i, $i\neq\sigma(1)$, $i\neq\sigma(2)$, étant fixées;
-etc....

Demonstration. La première assertion résulte de 5.2.5. Compte tenu de la bijection qui existe entre $\prod_{i=1}^{n} E_i$ et $\prod_{i=1}^{n} E_{\sigma(i)}$, la fonction

$$\Big(x_{\sigma(1)}, \big(x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(n)}\big)\Big) \longmapsto f(x_1,\dots,x_n)$$

est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{M}_{\sigma(1)} \times \prod_{i=2}^{n} E_{\sigma(i)}$. Il résulte alors des propositions 5.3.4, 1.2.13, du corollaire 5.3.2 et du théorème de Beppo-Levi (théorème 2.1.11) que la fonction

$$\big(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}\big) \longmapsto \int f d\mu_{\sigma(1)}$$

est mesurable pour la tribu $\prod_{i=2}^{n} E_{\sigma(i)}$, et la deuxième assertion résulte encore de la proposition 5.2.5. Pour conclure, il suffit de raisonner par récurrence Ξ

Théorème 5.4.2 (theoreme de Fubini-Tonelli) *Soient $(E_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'espaces mesurés, les mesures μ_i étant σ-finies, et f une fonction de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable par rapport à la tribu produit $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$. Alors pour toute permutation σ de $\{1,\dots,n\}$, on a*

$$\int f d\Big(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\Big) = \int \Big[\dots\Big[\int \Big[\dots\Big[\int f d\mu_{\sigma(1)}\Big]\dots\Big] d\mu_{\sigma(i)}\Big]\dots\Big] d\mu_{\sigma(n)} \leq +\infty.$$

Demonstration. Démontrons tout d'abord le théorème lorsque σ est l'identité. En raisonnant par récurrence sur n, les propositions 5.3.3 et 5.3.4 montrent qu'il suffit de faire la preuve lorsque $n=2$. Comme le résulat cherché est vrai pour une fonction étagée d'après le corollaire 5.3.2, le théorème découle dans ce cas de la proposition 1.2.8 et du théorème de Beppo-Levi (théorème 2.1.11). Le cas général pour une permutation σ résulte alors de la proposition 5.3.3 Ξ

Proposition 5.4.3 *Soient $(E_i, \mathcal{M}_i, \mu)_{1\le i\le n}$ une famille finie d'espaces mesurés, les mesures μ_i étant σ-finies, σ une permutation de $\{1,\ldots,n\}$ et f une fonction intégrable pour la mesure produit $\prod_{i=1}^{n}\mu_i$.*
Alors:
-pour presque tout $x_{\sigma(i)} \in E_{\sigma(i)}$, $2\le i\le n$, la fonction $x_{\sigma(1)} \longmapsto f_{(x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)})}$ est $\mu_{\sigma(1)}$-intégrable.
-pour tout $j\in\{2,\ldots,n-1\}$, et presque tout $x_{\sigma(i)} \in E_{\sigma(i)}$, $j+1\le i\le n$, la fonction

$$x_{\sigma(j)} \longmapsto \int\Big[\ldots\Big[\int f_{(x_{\sigma(j+1)},\ldots,x_{\sigma(n)})} d\mu_{\sigma(1)}\Big]\ldots\Big]d\mu_{\sigma(j-1)}$$

est $\mu_{\sigma(j)}$-intégrable.
-la fonction

$$x_{\sigma(n)} \longmapsto \int\Big[\ldots\Big[\int f d\mu_{\sigma(1)}\Big]\ldots\Big]d\mu_{\sigma(n-1)}$$

est $\mu_{\sigma(n)}$-intégrable.

Nota. Dans cet énoncé, le sens de "*presque tout $x_{\sigma(i)} \in E_{\sigma(i)}$, $j+1\le i\le n$*" sera précisé dans la démonstration qui suit.

Demonstration. D'après le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.4.2), on a

$$\int\ldots\Big(\int |f| d\mu_{\sigma(1)}\Big)\ldots d\mu_{\sigma(n)} < +\infty,$$

et il existe donc $A_{\sigma(n)} \in \mathcal{M}_{\sigma(n)}$, $\mu_{\sigma(n)}(A_{\sigma(n)}) = 0$ tel que, pour $x_{\sigma(n)} \notin A_{\sigma(n)}$, on a

$$\int\ldots\Big(\int |f| d\mu_{\sigma(1)}\Big)\ldots d\mu_{\sigma(n-1)} < +\infty.$$

De même, pour tout $x_{\sigma(n)} \notin A_{\sigma(n)}$, il existe $A^{x_{\sigma(n)}}_{\sigma(n-1)} \in \mathcal{M}_{\sigma(n-1)}$, $\mu_{\sigma(n-1)}(A^{x_{\sigma(n)}}_{\sigma(n-1)}) = 0$ tel que $\int\ldots(\int |f| d\mu_{\sigma(1)})\ldots d\mu_{\sigma(n-2)} < +\infty$, et ainsi de suite jusqu'à: pour $x_{\sigma(i)} \notin A^{x_{\sigma(n)},\ldots,x_{\sigma(i-1)}}_{\sigma(i)} \in \mathcal{M}_{\sigma(i)}$, $3\le i\le n$, il existe $A^{x_{\sigma(n)},\ldots,x_{\sigma(3)}}_{\sigma(2)} \in \mathcal{M}_{\sigma(2)}$, $\mu_{\sigma(2)}(A^{x_{\sigma(n)},\ldots,x_{\sigma 3)}}_{\sigma(2)}) = 0$ tel que pour $x_{\sigma(2)} \notin A^{x_{\sigma(n)},\ldots,x_{\sigma(3)}}_{\sigma(2)}$, on a $\int |f| d\mu_{\sigma(1)} < +\infty$.

Considérons tout d'abord le cas où f est réelle. D'après ce qui précède, pour $x_{\sigma(i)} \notin A^{x_{\sigma(n)},\ldots,x_{\sigma(i-1)}}_{\sigma(i)}$, $2\le i\le n$, la fonction $x_{\sigma(1)} \longmapsto f(x_1,\ldots,x_n)$ est $\mu_{\sigma(1)}$-intégrable, et on peut donc considérer la fonction $x_{\sigma(2)} \longmapsto \int f d\mu_{\sigma(1)}$ en la prolongeant par zéro sur $A^{x_{\sigma(n)},\ldots,x_{\sigma(3)}}_{\sigma(2)}$, et, d'après la proposition 5.4.1 (en séparant f^+ et f^-), elle est mesurable, et, puisque $\left|\int f d\mu_{\sigma(1)}\right| \le \int |f| d\mu_{\sigma(1)}$, elle est aussi $\mu_{\sigma(2)}$-intégrable. En raisonnant alors par récurrence sur n on conclut immédiatement.

Si f est à valeurs complexes, en séparant partie réelle et partie imaginaire, et en remarquant que $|\Re e f| + |\Im m f| \le \sqrt{2}|f|$, on se ramène au cas précédent Ξ

Théorème 5.4.4 (Theoreme de Fubini) *Soient $(E_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)_{1\le i\le n}$ des espaces mesurés, les mesures μ_i étant σ-finies, et f une fonction de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ intégrable par rapport à la mesure produit*

$\prod_{i=1}^{n} \mu_i$. *Alors pour toute permutation* σ *de* $\{1,\ldots,n\}$, *on a*

$$\int f d\Big(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\Big) = \int \Big[\ldots\Big[\int f d\mu_{\sigma(1)}\Big]\ldots\Big]d\mu_{\sigma(n)}.$$

Demonstration. Considérons tout d'abord le cas où f est à valeurs réelles. On a $\int f d\big(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\big) = \int f^+ d\big(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\big) - \int f^- d\big(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\big)$, et, d'après le théorème de Fubini–Tonelli (théorème 5.4.2), ces deux dernières intégrales sont respectivement égales à

$$\int \ldots \Big(\int f^+ d\mu_{\sigma(1)}\Big) \ldots d\mu_{\sigma(n)}$$

et

$$\int \ldots \Big(\int f^- d\mu_{\sigma(1)}\Big) \ldots d\mu_{\sigma(n)}.$$

Le théorème découle donc de la proposition 5.4.3. Dans le cas où f est à valeurs complexes, il suffit de séparer partie réelle et partie imaginaire et d'appliquer ce qui précède Ξ

5.5 Complétion des espaces produits

Si $(E_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, sont des espaces mesurés complets, il n'est pas vrai, en général que lespace produit $(E_1, \mathcal{M}_1, \mu_1) \times (E_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ est aussi complet. Par exemple, si $A \in E_1$, $\mu_1(A) = 0$, alors $A \times E_2$ appartient à la tribu produit et est de mesure nulle pour la mesure produit. Par suite si B est une partie quelconque de E_2, $A \times B$ est négligeable pour la mesure produit. Or si $B \notin \mathcal{M}_2$, il résulte de la proposition 5.2.5 que $A \times B$ n'appartient pas à la tribu produit et l'espace produit n'est donc pas complet.

Dans ce paragraphe, nous nous contenterons de montrer le résultat suivant concernant la mesure de Lebesgue:

Proposition 5.5.1 *Pour tout entier* n *notons* $\mathcal{L}_n$ *la tribu de Lebesgue sur* R^n *et* m_n *la mesure de Lebesgue de sorte que l'espace* $(\mathrm{R}^n, \mathcal{L}_n, m_n)$ *est complet. Soient trois entiers non nuls tels que* $k = r + s$. *Alors, l'espace* $(\mathrm{R}^k, \mathcal{L}_k, m_k)$ *est le complété de l'espace produit de* $(\mathrm{R}^r, \mathcal{L}_r, m_r)$ *par* $(\mathrm{R}^s, \mathcal{L}_s, m_s)$.

Demonstration. En effet, d'après la proposition 5.2.6, si $\mathcal{B}_k$ désigne la tribu de Borel sur R^k, on a $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_s$, et, de plus, si $A \in \mathcal{L}_r$ et $B \in \mathcal{L}_s$, $E \times \mathrm{R}^s$ et $\mathrm{R}^r \times B$ appartiennent à $\mathcal{L}_k$ (par régularité de la mesure de Lebesgue), et, par suite, on a $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_s \subset \mathcal{L}_k$. D'autre part, d'après la proposition 5.3.6, m_k et $m_r \times m_s$ sont égales sur $\mathcal{B}_k$. Par suite, par régularité de m_k elles sont aussi nécéssairement égales sur $\mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_s$ ce qui entraine que $\mathcal{L}_k$ est la tribu complétée de $\mathcal{L}_r \times \mathcal{L}_s$ pour la mesure $m_r \times m_s$, ce qui montre le résultat Ξ

Chapitre 6

CHANGEMENT DE VARIABLES

6.1 Image d'une mesure par une application mesurable

6.1.1 Définition et propriétés generales

Définition 6.1.1 *Soient $(E, \mathcal{M})$ et $(F, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables, θ une application mesurable de E dans F et μ une mesure sur $(E, \mathcal{M})$. On appelle* **mesure image de μ par θ** *la mesure $\theta(\mu)$ sur $(F, \mathcal{N})$ définie par: $\forall B \in \mathcal{N}$, $\theta(\mu)(B) = \mu(\theta^{-1}(B))$.*

Il est bien clair que $\theta(\mu)$ est une mesure sur $(F, \mathcal{N})$, la σ−additivité se vérifiant immédiatement. Si μ est positive, $\theta(\mu)$ l'est aussi. Si μ n'est pas identiquement infinie (c'est-à-dire si $\mu(\emptyset) = 0$) alors $\theta(\mu)$ n'est pas non plus identiquement infinie. Il est aussi évident que $\theta(\mu)(F) = \mu(E)$.

Si E et F sont des espaces topologiques munis de leurs tribu boréliennes, et si θ est borélienne, pour toute mesure de Borel μ sur E, $\theta(\mu)$ est une mesure de Borel sur F. Par contre, les espaces E et F étant supposés localement compacts séparés, si μ est finie sur les compacts, il n'est pas vrai en général que $\theta(\mu)$ soit aussi finie sur les compacts. En particulier, l'image d'une mesure régulière n'est pas en general régulière. Par exemple, m étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, et θ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \longmapsto x_1$, $\theta(m)$ n'est pas régulière car non finie sur les compacts de $\mathbb{R}$ puisque si A est un borélien de $\mathbb{R}$ non négligeable alors $\theta(m)(A) = m(A \times \mathbb{R}) = +\infty$.

Proposition 6.1.2 *Soient $(E, \mathcal{M})$, $F, \mathcal{N})$ et $(G, \mathcal{P})$ trois espaces mesurables, θ (resp. ψ) une application mesurable de E dans F (resp. F dans G) et μ une mesure sur $(E, \mathcal{M})$. Alors $(\psi \circ \theta)(\mu) = \psi(\theta(\mu))$.*

Demonstration. Evident Ξ

Proposition 6.1.3 *Soient $(E, \mathcal{M})$ et $(F, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables, θ une application mesurable de E dans F, et μ une mesure positive sur $(E, \mathcal{M})$.*
1) Pour toute fonction mesurable f de F dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, on a

$$\int f d\theta(\mu) = \int f \circ \theta d\mu.$$

2) Soit f une fonction mesurable de F dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$. Pour que f soit $\theta(\mu)$ intégrable, il faut et il suffit que $f \circ \theta$ soit μ-intégrable, et alors on a

$$\int f d\theta(\mu) = \int f \circ \theta d\mu.$$

Demonstration. En effet, la formule du 1) est la définition de $\theta(\mu)$ lorsque f est la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable, le 1) résulte donc du théorème 1.2.13 et du théorème de Beppo-Levi (théorème 2.1.11. Le 2) s'en déduit aussitôt car si f est à valeurs réelles, $(f \circ \theta)^+ = f^+ \circ \theta$ et $(f \circ \theta)^- = f^- \circ \theta$, et, si f est à valeurs complexes, on sépare parties réelles et imaginaire Ξ

Proposition 6.1.4 *Soient X et Y deux espaces topologiques localement compacts séparés, θ une application borélienne de X dans Y et μ une mesure de Borel positive sur X.*
1) Les conditions suivantes sont équivalentes:
a) $\theta(\mu)$ est finie sur les compacts de Y;
b) pour toute $f \in \mathcal{K}(Y; \mathbb{R}_+)$ on a $\int f \circ \theta d\mu < +\infty$.
2) Si μ est finie sur les compacts de X et si θ est une application propre (i.e. l'image réciproque d'un compact est relativement compacte) (par exemple si θ est un homéomorphisme) alors $\theta(\mu)$ est finie sur les compacts de Y.

Demonstration. L'équivalence de a) et b) résulte immédiatement du lemme d'Urysohn (théorème 4.1.4), et le 2) est évident Ξ

Proposition 6.1.5 *Soient $(E, \mathcal{M})$ et $(F, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables, θ une bijection de E sur F mesurable ainsi que son inverse et μ une mesure positive sur $(E, \mathcal{M})$.*
1) Si h est une application mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ on a $\theta(h\mu) = (h \circ \theta^{-1})\theta(\mu)$.
2) Si $h \in L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ alors $h \circ \theta^{-1} \in L^1(F, \mathcal{N}, \theta(\mu))$ et on a $\theta(h\mu) = (h \circ \theta^{-1})\theta(\mu)$.

Demonstration. Vérifions tout d'abord le 1). Soit $A \in \mathcal{N}$ et calculons $a = (h \circ \theta^{-1})\theta(\mu)(A)$. D'après la proposition 6.1.3, puisque $(\chi_A(h \circ \theta^{-1})) \circ \theta = \chi_{\theta^{-1}(A)} h$, on a $a = \int_{\theta^{-1}(A)} h d\mu = h\mu(\theta^{-1}(A))$, ce qui montre la formule cherchée. Pour voir le 2), on remarque tout d'abord que, d'après la proposition 6.1.3, $h \circ \theta^{-1}$ est bien intégrable par rapport à $\theta(\mu)$, puis on vérifie immédiatement que si, h est à valeurs réelles, on a $\theta(h\mu) = \theta(h^+\mu) - \theta(h^-\mu)$ et on applique le 1), et, si h est à valeurs complexes, on sépare parties réelle et imaginaire Ξ

Corollaire 6.1.6 *Soient $(E, \mathcal{M})$ et $(F, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables, θ une bijection de E dans F mesurable ainsi que son inverse et μ une mesure complexe sur $(E, \mathcal{M})$. Alors $|\theta(\mu)| = \theta(|\mu|)$.*

Demonstration. En effet, d'après la proposition 3.5.3, il existe $h \in L^1(E, \mathcal{M}, \mu)$ telle que $|h| = 1$ et $\mu = h|\mu|$. Le 2) de la proposition 6.1.5 montre donc que $\theta(\mu) = (h \circ \theta^{-1})\theta(|\mu|)$, et la conclusion résulte de la proposition 3.5.5 Ξ

Proposition 6.1.7 *Soient $(E, \mathcal{M})$ et $(F, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables, θ une application mesurable de E dans F et μ une mesure sur $(E, \mathcal{M})$.*
1) Si μ est concentrée sur $A \in \mathcal{M}$ et si $B \in \mathcal{N}$ est tel que $\theta(A) \subset B$ alors $\theta(\mu)$ est concentrée sur B.
2) Si μ est positive ou si θ est bijective alors $\theta(\mu)$ concentrée sur $B \in \mathcal{N}$ implique μ concentrée sur $\theta^{-1}(B)$.

Demonstration. Vérifions tout d'abord le 1). Si $C \subset F \backslash B$, $C \in \mathcal{M}$, on a $\theta^{-1}(C) \cap A = \emptyset$ et $\mu(\theta^{-1}(C)) = 0$, c'est-à-dire, $\theta(\mu)(C) = 0$, ce qui montre que $\theta(\mu)$ est concentrée sur B. Vérifions maintenant le 2). Supposons tout d'abord μ positive et soit $C = E \backslash \theta^{-1}(B)$. On a donc $\theta(C) \cap B = \emptyset$ soit $C \subset \theta^{-1}(F \backslash B)$ et donc $\mu(C) \leq \theta(\mu)(F \backslash B) = 0$. Si maintenant μ est quelconque mais θ est bijective il suffit, d'après le corollaire 6.1.6, d'appliquer ce qui précède à $|\theta(\mu)|$ et $|\mu|$ car une mesure est concentrée sur un ensemble si et seulement si sa variation totale l'est Ξ

Remarque. Si on ne fait pas d'hypothèse sur μ et θ le 2) de la proposition ci-dessus peut être faux. Par exemple si f est une fonction continue sur $[0, 1]$ (m mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$), telle que $\int f dm = 0$ et $f \not\equiv 0$, si $\mu = fm$, et si θ est la fonction constante de $[0, 1]$ dans lui même qui vaut $1/2$, alors $\theta(fm) = 0$ alors que fm n'est pas nulle.

Corollaire 6.1.8 *Soient X et Y deux espaces topologiques localement compacts séparés, μ une mesure de Borel régulière sur X et θ une application borelienne de X dans Y telle que $\theta(\mu)$ soit régulière. Alors:*
1) $\mathrm{Supp}(\theta(\mu)) \subset \overline{\theta(\mathrm{Supp}(\mu))}$ (c.f. définitions 4.2.3 et 4.5.1);
2) Supposons que μ soit positive ou que θ soit bijective. Alors si θ est continue, $\mathrm{Supp}(\theta(\mu)) = \overline{\theta(\mathrm{Supp}(\mu))}$.

Demonstration. Le 1) résulte aussitôt de 1) de la proposition 6.1.7. Par ailleurs, sous les hypothèses du 2), le 2) de cette même proposition dit que μ est concentrée sur $\theta^{-1}(\mathrm{Supp}(\theta(\mu))$. Comme cet ensemble est fermé puisque θ est supposée continue, la conclusion est immédiate Ξ

6.1.2 Propriétés particulières à la mesure de Lebesgue

Proposition 6.1.9 *Soit m la mesure de Lebesgue sur R^n. Pour tout endomorphisme u de R^n et tout borélien A de R^n, on a $m(u(A)) = |\det(u)| m(A)$. En particulier, si u est un automorphisme de R^n, $u(m) = \dfrac{m}{|\det(u)|}$ et si u est de plus orthogonal, $u(m) = m$.*

Demonstration. Soit μ l'application définie sur les boréliens par $\mu(A) = m(u(A))$. Il est clair que μ est une mesure de Borel positive sur R^n finie sur les pavés. De plus, si $x \in \mathrm{R}^n$ et A est un borélien, on a $\mu(A + x) = m(u(A) + u(x)) = m(u(A))$, ce qui montre que μ est invariante par translation. D'après le théorème 4.3.2, on a $\mu = Cm_n$. Tout revient à montrer que $C = |\det(u)|$, ce que nous allons faire en trois étapes.

Supposons tout d'abord que u soit une *transformation orthogonale*. On a alors $u(B) = B$ si B est la boule unité de R^n, et il vient aussitôt $C = 1 = |\det(u)|$.

Supposons maintenant que u soit un *endomorphisme hermitien*. Si les éléments de la base canonique de R^n sont des vecteurs propores de u correspondant à des valeurs propres $\lambda_i \geq 0$, le transformé par u du pavé unité P_0 est le pavé $\prod_{i=1}^{n}[0, \lambda_i]$ qui a pour mesure de Lebesgue $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(u)$, d'où $C = \det(u) \geq 0$. Dans le cas général, on sait qu'il existe un endormorphisme v du type précédent et une transformation orthogonale θ tels que $u = \theta^{-1} \circ v \circ \theta$(diagonalisation des endormorphismes hermitiens), ce qui nous ramène aux cas précedement étudiés.

Supposons maintenant u *quelconque*. On se ramène alors aux cas précédents en considérant la décomposition polaire de u, $u = \theta h$ où $h = (u^* \circ u)^{1/2}$est hermitien positif et θ une transformation orthogonale de sorte que $\det(h) = |\det(u)|$ Ξ

6.2 Le théorème de changement de variables

Soient Δ et D deux ouverts de R^n. Si φ est un difféomorphisme de Δ sur D, nous noterons $J_\varphi(\xi)$ le jacobien de φ au point $\xi \in \Delta$ qui est un nombre non nul. Rappelons de plus que $J_{\varphi^{-1}}(\varphi(\xi)) = \dfrac{1}{J_\varphi(\xi)}$. Le théorème de changement de variables est basé sur la détermination de la mesure sur Δ dont l'image par φ est la mesure de Lebesgue sur D:

Théorème 6.2.1 (theoreme de changement de variables) *Soient Δ et D deux ouverts de R^n et φ un difféomorphisme de Δ sur D de classe $\mathcal{C}^1$. Notons m_Δ (resp. m_D) la restriction de la mesure de Lebesgue à Δ (resp. D) c'est-à-dire $m_\Delta = \chi_\Delta m$ (resp. $m_D = \chi_D m$). Alors, $m_D = \varphi(|J_\varphi| m_\Delta)$. En particulier, si f est une fonction borélienne positive, on a*

$$\int_D f dm(x) = \int_\Delta f(\varphi(\xi))|J_\varphi(\xi)| dm(\xi).$$

Demonstration. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer l'inégalité suivante

$$m_D \leq \varphi(|J_\varphi| m_\Delta) \tag{2.1}$$

En effet, si une telle inégalité est prouvée pour tout difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$, en échangeant les rôles de D et Δ, il vient $m_\Delta \leq \varphi^{-1}(|J_{\varphi^{-1}}| m_D)$. Alors, la formule 2.1 et la proposition 6.1.5 donnent

$$m_D \leq (|J_\varphi| \circ \varphi^{-1})\varphi(m_\Delta) \leq (|J_\varphi| \circ \varphi^{-1})|J_{\varphi^{-1}}| m_D = m_D,$$

ce qui donne l'égalité cherchée.

Comme $\varphi(|J_\varphi|m_\Delta)$ est une mesure de Borel finie sur les compacts (proposition 6.1.4), d'après la proposition 4.3.1, tout revient à montrer que, pour tout pavé fermé Q contenu dans Δ dont les côtés sont tous égaux, on a

$$m_D(\varphi(Q)) \leq (|J_\varphi|m_\Delta)(Q) = \int_Q |J_\varphi|m_\Delta. \tag{2.2}$$

Pour établir l'inégalité 2.2, nous utilisons le lemme suivant:

Lemme 6.2.2 *Soit θ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de Δ dans R^n. Si, pour toute matrice $M = \Big(a_{ij}\Big)$, on pose $\|M\| = \sup\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$, alors pour tout pavé Q dont les côtés sont tous égaux contenu dans Δ, on a*

$$m(\theta(Q)) \leq \sup_{t\in Q} \|d\theta(t)\|^n m(Q).$$

Demonstration du lemme 6.2.2. En effet, soit h la longueur des côtés de Q. La formule des accroissements finis montre que si ξ et ζ sont dans Q, pour chaque i il existe $\eta_i \in Q$ tel que

$$\theta_i(\xi) - \theta_i(\zeta) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial\theta_i}{\partial\xi_k}(\eta_i)(\xi_k - \zeta_k),$$

ce qui donne

$$|\theta_i(\xi) - \theta_i(\zeta)| \leq \sup_{\eta\in Q} \|d\theta(\eta)\| h,$$

et le lemme s'en déduit aussitôt Ξ

Reprenons maintenant la démonstration du théorème 6.2.1. Appliquons le lemme 6.2.2 à la fonction $\theta(t) = (d\varphi^{-1}(x) \circ \varphi)(t)$, avec $x = \varphi(\xi) \in \varphi(Q)$. Il vient

$$m\Big((d\varphi^{-1}(x) \circ \varphi)(Q)\Big) \leq \sup_{t\in Q} \Big\|d\varphi^{-1}(x) \circ d\varphi(t)\Big\|^n m(Q).$$

Or, d'après la proposition 6.1.9, le premier membre de l'inégalité ci-dessus est égal à

$$\frac{1}{|J_\varphi(\xi)|} m(\varphi(Q)).$$

On a donc

$$m_D(\varphi(Q)) \leq \sup_{t\in Q} \Big\|d\varphi^{-1}(x) \circ d\varphi(t)\Big\|^n |J_\varphi(\xi)| m_\Delta(Q). \tag{2.3}$$

Remarquons maintenant que pour tout $\xi \in \Delta$, $\|d\varphi^{-1}(\varphi(\xi)) \circ d\varphi(\xi)\| = 1$. Alors la continuité uniforme de $d\varphi$ et de $d\varphi^{-1}$ (φ est supposée de classe $\mathcal{C}^1$) montrent que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de Q par des pavés Q_i, $1 \leq i \leq N(\epsilon)$, deux à deux disjoints, tels que les côtés des Q_i sont égaux et $\sup\limits_{t\in Q_i} \|d\varphi^{-1}(\varphi(\xi_i)) \circ d\varphi(t)\| < 1 + \epsilon$ pour tout $\xi_i \in Q_i$. Choisissons alors ξ_i de sorte que

$$|J_\varphi(\xi_i)| m_\Delta(Q_i) = \int_{Q_i} |J_\varphi(\xi) dm(\xi)|,$$

ce qui est possible puisque $|J_\varphi|$ est continu. Alors en ajoutant les inégalités 2.3 obtenues pour chaque pavé Q_i, il vient

$$m_D(\varphi(Q)) = \sum_i m_D(\varphi(Q_i)) \leq (1+\epsilon)^n \int_Q |J_\varphi(\xi)| dm(\xi),$$

ce qui donne l'inégalite 2.2 en faisant tendre ϵ vers zéro Ξ

Corollaire 6.2.3 (formule de changement de variables) *Soient Δ et D deux ouverts de R^n et φ un difféomorphisme de Δ sur D de classe $\mathcal{C}^1$. Pour qu'une fonction borélienne f sur D soit integrable par rapport à la mesure de Lebesgue, il faut et il suffit que la fonction (borélienne) $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ soit integrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur Δ, et on a alors*

$$\int_D f dm = \int (f \circ \varphi)|J_\varphi| dm.$$

Demonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 6.2.1 Ξ

6.3 Intégration en coordonnées polaires

6.3.1 Mesure invariante sur la sphère unité de R^n

Soit S_{n-1} la sphère unité de R^n: $S_{n-1} = \{x \in \mathrm{R}^n \text{ t.q. } \|x\| = 1\}$, et notons $\varphi : S_{n-1} \times \mathrm{R}_+^* \longrightarrow \mathrm{R}^n \backslash \{0\}$ l'homéomorphisme $\varphi(\xi, r) = r\xi$. Si A est un borélien de l'espace topologique S_{n-1}, alors le cône épointé $\Gamma(A) = \varphi(A \times]0,1])$ est un borélien de R^n car c'est l'image réciproque du borélien $A \times]0,1]$ de $S_{n-1} \times \mathrm{R}_+^*$ par l'application continue φ^{-1}. On pose alors par définition:

Définition 6.3.1 *Soit S_{n-1} la sphère unité de R^n. On appelle* **mesure invariante sur** S_{n-1} *la mesure borélienne régulière σ_{n-1} définie, avec les notations précédentes, par: pour tout borélien A de S_{n-1}, $\sigma_{n-1}(A) = nm(\Gamma(A))$, m désignant le mesure de Lebesgue sur R^n.*

La terminologie "mesure invariante" provient du fait que σ_{n-1} est invariante par les transformations orthogonales d'après la proposition 6.1.9.

Proposition 6.3.2 *Soit f une fonction borélienne sur R^n. Supposons que f est positive ou intégrable sur R^n (i.e. par rapport à la mesure de Lebesgue m). Alors on a*

$$\int f dm = \int_0^{+\infty} r^{n-1} \Big(\int_S f(r\xi) d\sigma(\xi) \Big) dr, \tag{3.4}$$

les deux intégrales de cette égalitée pouvant être égales à $+\infty$ si f est positive.

Demonstration. Remarquons tout d'abord que le second membre de la formule 3.4 a bien un sens lorsque f est positive: ceci résulte du théorème de Fubini–Tonelli (plus précisément de la proposition 5.4.1) appliquée à la fonction borélienne $(\xi, r) \longmapsto r^{n-1} f \circ \varphi(\xi, r)$. Remarquons ensuite qu'il nous suffit de prouver la formule 3.4 lorsque f est positive: en effet, si cela est démontré, lorsque f est réelle ou complexe, le second membre de la formule 3.4 à un sens d'après le théorème de Fubini (plus précisément de la proposition 5.4.3) et la formule s'obtient en séparant partie positive et négative dans le cas réel et partie réelle et imaginaire dans le cas complexe.

Il suffit donc de faire la preuve dans le cas où f est positive ce que nous supposerons maintenant. Dans ce cas, f étant limite croissante de fonctions étagées (proposition 1.2.13), d'après le théorème de Beppo–Levi (théorème 2.1.11), nous pouvons nous restreindre au cas où f est la fonction caractéristique d'un borélien de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, si μ est la mesure définie sur les boréliens E de $\mathbb{R}^n$ par la formule

$$\mu(E) = \int_0^{+\infty} r^{n-1} \Big(\int_S \chi_E(r\xi) d\sigma(\xi) \Big) dr,$$

nous devons montrer que $\mu = m$. Pous cela montrons tout d'abord que ces deux mesures prennent les même valeurs sur les tronc de cônes $E = r_2\Gamma(A) \backslash r_1\Gamma(A)$ (i.e. $E = \varphi(A \times I)$ où A est un borélien de S et $I =]r_1, r_2]$, $0 \le r_1 < r_2 < +\infty$. Or les propriétés de la mesure de Lebesgue (proposition 6.1.9) et la définition de σ donnent $m(E)) = (r_2^n - r_1^n) m(\Gamma(A))$, soit $m(E) = \frac{r_2^n - r_1^n}{n} \sigma(A)$. Par ailleurs, $\mu(E) = \int_0^{\infty} r^{n-1} (\chi_I(r) \sigma(A)) dr$ et on a bien $\mu(E) = m(E)$. Pour conclure, il suffit alors de remarquer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable d'une famille de tronc de cônes deux à deux disjoints et que la mesure de Borel μ est régulière (proposition 4.2.10) Ξ

Corollaire 6.3.3 *Soit F une fonction borélienne sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, posons $f(x) = F(\|x\|)$ (on dit que f est* **radiale***).*
1) Si F est positive, on a

$$\int f dm = s_{n-1} \int_0^{+\infty} r^{n-1} F(r) dr \le +\infty, \tag{3.5}$$

où s_{n-1} désigne la masse totale de la mesure invariante σ sur S_{n-1} c'est-à-dire $\sigma_{n-1}(S_{n-1})$.
2) Si F est réelle ou complexe, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $r \longmapsto r^{n-1}F(r)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et la formule 3.5 *est est alors vraie.*

Demonstration. En effet, le cas où F est positive est un cas particulier de la proposition 6.3.2, et le cas où F est réelle ou complexe s'en déduit aussitôt Ξ

Corollaire 6.3.4 *Soit b_n le volume (i.e. la mesure de Lebesgue) de la boule unite $\{\|x\| \le 1\}$ de $\mathbb{R}^n$. On a les formules*

$$b_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\big(\frac{n}{2} + 1\big)} \text{ et } s_{n-1} = n b_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)},$$

où Γ est la fonction, d'Euler définie par $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$, $\alpha > 0$.

De manière plus explicite, on a

$$b_{2p} = \frac{\pi^p}{p!}, \text{ si } p \geq 1 \text{ et } b_{2p+1} = \frac{2^{p+1}\pi^p}{1.3.\ldots.(2p+1)}, \text{ si } p \geq 0.$$

Demonstration. On applique le corollaire 6.3.3 à la fonction $F(r) = e^{-r^2}$: il vient

$$\pi^{n/2} = \int e^{-\|x\|^2} dm = s_{n-1}\int_0^{+\infty} r^{n-1}e^{-r^2}dr = \frac{1}{2}s_{n-1}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{n}{2}-1}dt,$$

ce qui donne les premières formules compte tenu de la relation de récurrence $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Les dernières formules explicites s'obtiennent en utilisant cette formule de récurrence et la formule $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$ Ξ

Remarque. Pour calculer l'intégrale $\int e^{-\|x\|^2}dm$, on peut procéder de la manière suivante: en appliquant tout d'abord le théorème de Beppo-Levi puis le théorème de Fubini, il vient

$$\int e^{-\|x\|^2}dm = \lim_{R\to+\infty}\int_{[-R,+R]^n} e^{-\|x\|^2}dm = \lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{+R} e^{-t^2}dt\right]^n,$$

et on est ramenè à calculer l'intégrale lorsque $n = 1$. On applique alors le corollaire 6.3.3 à $F(r) = e^{-r^2}$ pour $n = 2$ ce qui donne:

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt\right]^2 = s_1\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt = \frac{s_1}{2} = \pi.$$

6.3.2 Integration en coordonnées polaires dans R^3 et R^n

Les formules

$$x_1 = r\mathrm{sin}u\mathrm{cos}v,\ x_2 = r\mathrm{sin}u\mathrm{sin}v,\ x_3 = r\mathrm{cos}u,$$

définissent un difféomorphisme (de classe $\mathcal{C}^\infty$) du demi-cylindre ouvert

$$\{0 < r < +\infty,\ 0 < u < \pi,\ 0 < v < 2\pi\},$$

sur l'ouvert

$$\mathrm{R}^3\backslash\{x_2 = 0, x_1 > 0\}.$$

Le Jacobien de ce difféomorphisme est $J(r,u,v) = r^2\mathrm{sin}u > 0$. Le théorème de changement de variables (théorème 6.2.1) donne donc le résultat suivant:

Proposition 6.3.5 *Soit f une fonction borélienne sur R^3. Si f est positive ou intégrable, on a la formule suivante:*

$$\int f dm = \int_{\substack{0<r\\0<u<\pi\\0<v<2\pi}} f(r\mathrm{sin}u\mathrm{cos}v, r\mathrm{sin}u\mathrm{sin}v, r\mathrm{cos}u)r^2\mathrm{sin}u\,dr\,du\,dv. \tag{3.6}$$

La formule 3.6 permet de déterminer de manière explicite la mesure invariante σ sur S_2: si A est un borélien de S_2, on a, par définition, $\sigma(A) = 3m(\Gamma(A))$, où $\Gamma(A)$ est le cône $\{r\xi,\ r \in [0,1],\ \xi \in A\}$. Si h désigne l'application

$$h : (u,v) \longmapsto (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

de $U = \{(u,v); 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi\}$ sur la sphère S_2 privée d'un demi méridien M, on a

$$\sigma(A) = 3\int \chi_{\Gamma(A)} dm = \int_{h^{-1}(A)} \sin u du dv.$$

Ainsi:

Proposition 6.3.6 *La restriction de la mesure σ_2 à $S_2 \backslash M$ est l'image par l'application h ci-dessus de la restriction de la mesure $(\sin u)m$ au rectangle U.*

Les résultats que nous venons de décrire dans $\mathbb{R}^3$ peuvent naturellement se généraliser à $\mathbb{R}^n$. Pour cela on définit un difféomorphisme de l'ouvert

$$\{0 < r < +\infty,\ -\pi/2 < \theta_i < \pi/2, 1 \leq i \leq n-2, 0 < \theta_{n-1} < 2\pi\}$$

sur $\mathbb{R}^n$ privé d'un demi-hyperplan fermé par les formules

$$\begin{aligned}
&x_1 = r\cos\theta_1 \\
&x_2 = r\cos\theta_1 \sin\theta_2 \\
&\ldots \\
&x_{n-1} = r\cos\theta_1\cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\
&x_n = r\cos\theta_1\cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}.
\end{aligned}$$

Le jacobien de ce difféomorphisme est

$$r^{n-1}\cos^{n-2}\theta_1 \cos^{n-3}\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-2},$$

et la formule 3.6 se généralise immédiatement.

6.4 Mesure naturelle sur une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n$

6.4.1 Cas des sous-variétés paramétrées

Rappelons tout d'abord qu'on appelle sous-variétée différentiable paramétrée de dimension p de R^n un couple (U, φ) où U est un ouvert de R^p et φ une application différentiable de U dans R^n de rang p en tout point de U.

On notera G_φ le déterminant de Gram des vecteurs dérivées partielles $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i}$, $1 \leq i \leq p$, c'est-à-dire le déterminant (p, p) dont le terme de la i-ieme ligne et la j-ieme colonne est le produit scalaire $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i} \middle| \dfrac{\partial\varphi}{u_j}\right)$. Par définition, on pose alors:

Définition 6.4.1 *On appelle* **mesure naturelle** *sur la variété différentiable paramétrée* (U, φ) *la mesure* $\sigma_{(U,\varphi)} = \sigma = \varphi(\sqrt{G_\varphi} m_U)$, *où* m_U *désigne la restriction à* U *de la mesure de Lebesgue sur* R^p.

La propriété essentielle de cette mesure est:

Proposition 6.4.2 (invariance par changement de parametrage) *Soit* (U, φ) *une variété différentiable paramétrée de dimention* p, *et soit* Δ *un ouvert de* R^p *difféomorphe à* U *et soit* θ *un difféomerphisme de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* Δ *sur* U. *Alors les mesures naturelles sur les variétés paramétrées* (U, φ) *et* $(\Delta, \varphi \circ \theta)$ *sont égales. En d'autres termes,* $\varphi(\sqrt{G_\varphi} m_U) = \varphi \circ \theta\left(\sqrt{G_{\varphi\circ\theta m}}\Delta\right)$.

Demonstration. En effet, un calcul élémentaire montre que, pour $\xi \in \Delta$,

$$G_{\varphi\circ\theta}(\xi) = G_\varphi(\theta(\xi))|J_\theta(\xi)|^2.$$

Il résulte alors du théorème de changement de variables (théorème 6.2.1) et de la proposition 6.1.5 que l'on a:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\sqrt{G_\varphi} m_U\right) =& \varphi\left(\sqrt{G_\varphi}\theta(|J_\theta| m_\Delta)\right) = \varphi\left(\sqrt{G_\varphi}(|J_\theta \circ\ \theta^{-1}|\theta(m_\Delta))\right)\\ =& \varphi\left(\left(\sqrt{G_{\varphi\circ\theta}} \circ \theta^{-1}\right)\theta(m_\Delta)\right) = \varphi\left(\theta\left(\sqrt{G_{\varphi\circ\theta}} m_\Delta\right)\right) = \varphi \circ \theta\left(\sqrt{G_{\varphi\circ\theta}} m_\Delta\right),\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration Ξ

6.4.2 Cas général

Rappelons tout d'abord que l'on appelle sous-variété différentiable de R^n de dimension p une partie V de R^n possédant la propriété suivante: pour tout $x \in V$, il existe un voisinage ouvert ω de x dans R^n et un difféomorphisme h de ω sur un ouvert $h(\omega)$ de R^n tel que $h(\omega \cap V) = h(\omega) \cap \mathrm{R}^p$ (le couple $(\omega \cap V, h_{|\omega\cap V})$ est appelé une carte locale de V au voisinage de x).

La proposition 6.4.2 va nous permettre de définir une mesure de Borel sur V (qui est un espace topologique localement compact pour la topologie induite par celle de R^n).

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des ouverts ω de R^n ayant la propriété qu'il existe un difféomorphisme h de ω sur un ouvert de R^n tel que $h(\omega \cap V) = h(\omega) \cap \mathrm{R}^p$ (nous dirons que h est associé à ω). Pour $\omega \in \mathcal{E}$ et h asocié à ω, soit $U = h(\omega) \cap \mathrm{R}^p$ et appelons φ la restriction à U du difféomorphisme h^{-1}. Considérons alors σ_ω la mesure de Borel sur $V \cap \omega$ définie par

$$\sigma_\omega = \varphi\Big(\sqrt{G_\varphi} m_U\Big).$$

D'après la proposition 6.4.2, cette mesure est indépendante du difféomerphisme h associé à ω. De plus si ω et ω' sont deux ouverts de $\mathcal{E}$ tels que $\omega \cap \omega' \cap V \neq \emptyset$, cette même proposition 6.4.2 montre que les restrictions de σ_ω et $\sigma_{\omega'}$ à $\omega \cap \omega' \cap V$ sont égales.

On en déduit alors facilement l'existence d'une mesure de Borel σ_V sur V telle que, pour tout $\omega \in \mathcal{E}$, la restriction de σ_V à $\omega \cap V$ soit σ_ω (on utilise pour cela un recouvrement dénombrable de V par des éléments de $\mathcal{E}$). C'est cette mesure que l'on appelle la **mesure naturelle sur** V.

Remarque. 1) S'il est bien clair que σ_V est une mesure de Borel sur V, on peut aussi considérer σ_V comme une mesure sur R^n; mais alors, en général, ce n'est plus une mesure de Borel (par exemple: mesure linéaire sur une spirale de longueur infinie dans R^2).

2) A titre d'exercice, on pourra vérifier que l'on retrouve aisément la mesure invariante sur la sphère unité de R^3 par la méthode décrite dans ce paragraphe en utilisant deux cartes locales.

6.4.3 Un théorème d'intégration par tranches

Théorème 6.4.3 *Soit F une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ dans un ouvert Ω de R^n dont le gradient ne s'annule en aucun point de Ω. Soit S_λ la variété différentiable $S_\lambda = \{F = \lambda\}$. Alors pour toute fonction borélienne f de Ω dans $\overline{\mathrm{R}}$ ou C positive ou intégrable dans Ω on a:*

$$\int_\Omega f dm = \int_{\{\lambda; S_\lambda \neq \emptyset\}} \left[\int_{S_\lambda} \frac{f(x)}{\|\nabla F(x)\|} d\sigma_{S_\lambda}(x)\right] d\lambda, \tag{4.7}$$

où $\|\nabla F(x)\|$ désigne la norme euclidienne du gradient de F au point x et σ_{S_λ} la mesure naturelle sur S_λ.

Demonstration. Il suffit naturellement de montrer la formule 4.7 lorsque f est positive. Soit $a \in \Omega$; puisque ∇F ne s'annule pas, on peut supposer par exemple $\dfrac{\partial F}{\partial x_n}(a) \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert U dans R^{n-1}, un intervalle $I =]\lambda_1, \lambda_2[$, $F(a) \in I$, et un difféomorphisme h d'un voisinage ω de a dans R^n sur $U \times I$ de la forme $h_i(x) = x_i$, $1 \leq i \leq n-1$, $h_n(x) = F(x)$. Le difféomorphisme réciproque h^{-1}est de la forme $h_i^{-1}(\xi) = \xi_i$, $1 \leq i \leq n-1$, $h_n^{-1}(\xi) = \varphi(\xi)$, et, entre les dérivée partielles de F et φ on a les relations

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \circ \varphi + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \circ \varphi\right) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = 0,\ 1 \leq i \leq n-1,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \circ \varphi\right) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_n} = 1.$$

Pour $\lambda \in I$ la sous-variété $S_\lambda \cap U$ est l'image de U par l'application φ_λ définie pour $u = (u_1, \ldots u_{n-1}) \in U$ par

$$\varphi_\lambda(u) = (u_1, \ldots, u_{n-1}, \varphi(u_1, \ldots, u_{n-1}, \lambda)).$$

Remarquons maintenant que, pour $u \in U$, $\lambda \in I$ et $1 \leq i, j \leq n-1$, on a

$$< \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial u_i}(u), \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial u_j}(u) >= \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi_\lambda(u)) \frac{\partial F}{\partial x_j}(\varphi_\lambda(u))}{\left|\frac{\partial F}{\partial x_n}(\varphi_\lambda(u))\right|^2}, \ i \neq j,$$

$$\left|\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial u_i}(u)\right|^2 = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}(\varphi_\lambda(u))\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi_\lambda(u))\right)^2}{\left|\frac{\partial F}{\partial x_n}(\varphi_\lambda(u))\right|^2}.$$

Alors un calcul élémentaire montre que le déterminant de Gram G_{φ_λ} est égal à:

$$G_{\varphi_\lambda}(u) = \frac{\|\nabla F(\varphi_\lambda(u))\|^2}{\left|\frac{\partial F}{\partial x_n}(\varphi_\lambda(u))\right|^2}.$$

Par suite, par définition de la mesure σ_{S_λ} et compte tenu du fait que

$$J_{h^{-1}}(\xi) = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(\varphi(\xi))},$$

pour toute fonction borelienne positive nulle hors de ω, on a:

$$\begin{aligned}\int_{S_\lambda \cap \omega} \frac{f(x)}{\|\nabla F(x)\|} d\sigma_{S_\lambda}(x) &= \int_U \frac{f(\varphi_\lambda(u))}{\left|\frac{\partial F}{\partial x_n}(\varphi_\lambda(u))\right|} du_1 \ldots du_{n-1} \\ &= \int_U f(\varphi_\lambda(u)) |J_{h^{-1}}(u, \lambda)| du_1 \ldots du_{n-1}.\end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de cette égalité sur I et en utilisant le théorème de changement de variables (théorème 6.2.1) il vient

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\int_{S_\lambda \cap \omega} \frac{f(x)}{\|\nabla F(x)\|} d\sigma_{S_\lambda}\right] d\lambda &= \int_{\Lambda_1}^{\lambda_2} \left[\int_U f(\varphi_\lambda(u)) |J_{h^{-1}}(u, \lambda)| du_1 \ldots du_{n-1}\right] d\lambda \\ &= \int_{U \times I} f\left(h^{-1}(\xi)\right) |J_{h^{-1}}(\xi)| dm(\xi) = \int_\omega f(x) dm(x).\end{aligned}$$

Ceci démontre la formule 4.7 lorsque f est nulle hors de l'ouvert ω. Pour conclure dans le cas général, il suffit alors de recouvrir Ω par une famille dénombrable d'ouverts ω_m du type précédent et d'utiliser une partition de l'unité adaptée aux ω_m Ξ

Remarque 6.4.4 *Par exemple, dans le cas* $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *et* $F(x) = \|x\|$ *le théorème précédent redonne la formule de la proposition* 6.3.2.

Chapitre 7

CONVOLUTION

7.1 Convolution des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$

Dans tout ce paragraphe la seule mesure que nous considérons est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Pour simplifier l'écriture, nous dirons d'une fonction f qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ si elle appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$ où m est la mesure de Lebesgue et $\mathcal{M}$ la tribu de Lebesgue (c.f. remarque 4.3.3). De même, nous noterons simplement $L^p(\mathbb{R}^n)$ au lieu de $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$. Quand nous parlerons de fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$, il s'agira toujours de fonctions Lebesgue–mesurables (remarque 4.3.3).

7.1.1 Définition et premières propriétés

Definissons tout d'abord une notation: soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans un ensemble E et $a \in \mathbb{R}^n$. On appelle **translatée de** f **par** a l'application $\tau_a f = \tau_a(f)$ définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$. On appelle **symétrique de** f la fonction $f^\vee$ définie par $f^\vee(x) = f(-x)$.

Proposition 7.1.1 *Soit f une application mesurable (ou borélienne) de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$. Alors les applications $\tau_a f$ $(a \in \mathbb{R}^n)$ et $f^\vee$ sont mesurables (ou boréliennes). De plus, si f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ alors $\tau_a f$ et $f^\vee$ le sont aussi.*

Demonstration. La mesurabilité est immediate car $x \longmapsto x + a$ et $x \longmapsto -x$ sont continues et la dernière assertion résulte de la proposition 6.1.9 Ξ

Proposition 7.1.2 *1) Les applications $\tau_a : f \longmapsto \tau_a f$ et $\vee : f \longmapsto f^\vee$ sont des isométries surjectives sur les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$.*
2) Pour $1 \leq p < +\infty$, et pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ on a $\lim\limits_{a \to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$.

Demonstration. Le 1) résulte de la proposition 6.1.9. Verifions le 2). Supposons tout d'abord $f \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$. Alors f est uniformément continue et, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage de zéro relativement compact V dans R^n tel que, pour $a \in V$, on a $\|\tau_a f - f\|_\infty \leq \epsilon$. Comme $\tau_a f - f$ est nulle en dehors d'un compact fixe pour $a \in V$, on a le résultat annoncé. Supposons maintenant $f \in L^p(\mathrm{R}^n)$. D'après le théorème 4.4.4, il existe $\varphi \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ telle que $\|f - \varphi\|_p \leq \epsilon$. D'après le 1) on a donc $\|\tau_a f - f\|_p \leq 2\|f - \varphi\|_p + \|\tau_a \varphi - \varphi\|_p$, et la conclusion résulte de ce qui précède Ξ

Remarque. Le 2) de la proposition 7.1.2 est faux pour $p = +\infty$. Par exemple pour $f = \chi_{[0,1]}$ dans R, on a $\|\tau_a f - f\|_\infty = 1$ pour $a \neq 0$.

Définition 7.1.3 *Soient f et g deux fonctions mesurables sur R^n. On dit que* **le produit de convolution de f par g existe au point** $x \in \mathrm{R}^n$, *et dans ce cas on le note $f * g(x)$, si l'integrale $\int (\tau_x(f^\vee))g dm$ a un sens c'est-à-dire si soit f et g sont toutes deux positives soit $(\tau_x(f^\vee))g \in L^1(\mathrm{R}^n)$).*

Proposition 7.1.4 *Soient f et g deux fonctions mesurables sur R^n et $x \in \mathrm{R}^n$. Si $f * g(x)$ existe alors $g * f(x)$ aussi et $f * g(x) = g * f(x)$.*

Demonstration. En effet, l'hypothèse dit que la fonction $t \longmapsto f(x - t)g(t)$ est integrable; la formule de changement de variables (corollaire 6.2.3) donne alors aussitôt l'intégrabilité de $t \longmapsto f(t)g(x - t)$ et le fait que $f * g(x) = g * f(x)$ Ξ

Cette proposition est la raison pour laquelle au lieu de dire que le produit de convolution de f par g existe au point x , on dit parfois que f **et** g **sont convolables au point** x.

Proposition 7.1.5 *Soient f, g et h trois fonctions mesurables positives sur R^n.*
1) L'application $x \longmapsto f * g(x)$ est mesurable;
2) pour tout $x \in \mathrm{R}^n$ on a $\Big[\big(f * g\big) * h\Big](x) = \Big[f * \big(g * h\big)\Big](x)$.

Demonstration. En effet, la fonction $(x, y) \longmapsto f(x - y)g(y)$est mesurable sur $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$, et le 1) résulte de la proposition 5.4.1. Vérifions maintenant le 2). Par définition, on a

$$[(f * g) * h](x) = \int \left[\int f(x - t - u)g(u)dm(u)\right] h(t)dm(t).$$

Le théorème de Funini–Tonelli (théorème 5.4.2) donne alors

$$[(f * g) * h](x) = \int \left[\int f(x - t - u)h(t)dm(t)\right] g(u)dm(u),$$

et la formule de changement de variables (corollaire 6.2.3) donne a son tour

$$[(f*g)*h](x) = \int \Big[\int f(x-y)h(y-u)dm(y)\Big] g(u)dm(u).$$

Une autre application du théorème de Fubini–Tonelli donne enfin

$$[(f*g)*h](x) = \int f(x-y)\Big[\int h(y-u)g(u)dm(u)\Big] dm(y) = [f*(h*g)](x),$$

et la conclusion résulte de la proposition 7.1.4 Ξ

Proposition 7.1.6 *Soient f et g deux fonctions mesurables sur R^n et A et B deux parties de R^n. Si f est nulle en dehors de A et g nulle en dehors de B, en tout point $x \notin A+B$, $f*g(x)$ est défini et vaut zéro.*

Demonstration. En effet, si $f(x-t)g(t) \neq 0$, on a $x-t \in A$ et $t \in B$ ce qui implique $x \in A+t \subset A+B$ Ξ

7.1.2 Convolution dans les espaces $L^p(\mathrm{R}^n)$

Proposition 7.1.7 *Soient p et q, $1 \leq p,q \leq +\infty$, tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}= 1$ et soient $f \in L^p(\mathrm{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathrm{R}^n)$. Alors f et g sont convolables en tout point de R^n, l'application $x \longmapsto f*g(x)$ est uniformément continue et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_q$. De plus, si $1 < p < +\infty$, $f*g(x)$ tend vers zéro quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$.*

Demonstration. Remarquons tout d'abord que d'après l'inégalité de Hölder (théorème 3.3.2), la fonction $t \longmapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable, ce qui prouve que $f*g$ existe partout, et, en utilisant la proposition 6.1.9 on a $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_q$. Supposons maintenant que $1 \leq p < +\infty$ (ce que l'on peut toujours faire quite à échanger p et q). Le même raisonnement que précédement montre que

$$|f*g(x) - f*g(x')| \leq \|\tau_x(f^\vee) - \tau_{x'}(f^\vee)\|_p \|g\|_q = \|\tau_{x-x'}(f^\vee) - f\|_p \|g\|_q,$$

ce qui prouve, d'après la proposition 7.1.2, que $f*g$ est uniformément continue. Reste à voir la dernière assertion de la proposition. Si f et g sont continues à supports compacts, elle résulte de la proposition 7.1.6. Dans le cas général, il existe φ et ψ continues à supports compacts telles que $\|f-\varphi\|_p < \epsilon$ et $\|g-\psi\|_q < \epsilon$ (théorème 4.4.4), ce qui implique $\|\varphi\|_p \leq \|f\|_p + \epsilon$ et $\|\psi\|_q \leq \|g\|_q + \epsilon$. Alors, d'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathrm{R}^n$, on a

$$|f*g(x)| \leq \epsilon\|g\|_q + \Big(\|f\|_p + \epsilon\Big)\epsilon + |\varphi*\psi(x)|,$$

inégalité qui donne aussitôt le résultat Ξ

Théorème 7.1.8 *Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathrm{R}^n)$. Pour presque tout $x \in \mathrm{R}^n$, le produit de convolution de f par g existe au point x, la fonction $x \longmapsto f * g(x)$ est intégrable sur R^n et on a $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Ainsi, $L^1(\mathrm{R}^n)$ muni du produit de convolution est une algèbre de Banach commutative qui n'a pas d'élément unité.*

Demonstration. Posons $F(x, y) = f(x - y)g(y)$. Alors F est mesurable sur $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$ et, d'après le théorème de Fubini–Tonelli (théorème 5.4.2) et la proposition 6.1.9, F est integrable sur $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$ et $\|F\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. La proposition 5.4.3 montre alors que f et g sont convolables en presque tout point de R^n, que $x \longmapsto f * g(x)$ est intégrable, et le théorème de Fubini–Tonelli (théorème 5.4.2) donne $\|f * g\|_1 \leq \|F\|_1$ ce qui achève de montrer la première partie de l'énoncé. Pour voir que $L^1(\mathrm{R}^n)$ est une algèbre de Banach, il nous faut voir que le produit de convolution est commutatif et associatif ($L^1(\mathrm{R}^n)$ est complet: théorème 3.1.7). La commutativité a été montrée a la proposition 7.1.4; pour vérifier l'associativité, soient f, g et h trois éléments de $L^1(\mathrm{R}^n)$. D'après ce qui précède, la fonction $F(x, u, t) = f(x - t - u)g(u)h(t)$ est intégrable ($\|F\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \|h\|_1$), et, en utilisant le théorème de Fubini (théorème 5.4.4) et la formule de changement de variables (corollaire 6.2.3), il suffit de raisonner exactement comme dans la preuve du 2) de la proposition 7.1.5. Reste à voir que le produit de convolution n'a pas d'élément unité dans $L^1(\mathrm{R}^n)$. Supposons qu'il y en ait un g. Si A est une partie mesurable de R^n de mesure finie, on aurait $\chi_A * g = \chi_A$ presque partout, et, la proposition 7.1.7 impliquerait que χ_A est presque partout égale à une fonction continue ce qui est absurde Ξ

Proposition 7.1.9 *Soient $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathrm{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Pour presque tout $x \in \mathrm{R}^n$ f et g sont convolables au point x et $f * g \in L^p(\mathrm{R}^n)$. De plus, $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.*

Demonstration. Le cas $p = +\infty$ est un cas particulier de la proposition 7.1.7, supposons donc $1 \leq p < +\infty$. D'après le théorème 7.1.8, pour presque tout $x \in \mathrm{R}^n$, on a

$$\int |g(x - t)|^p |f(t)| dm(t) < +\infty,$$

et, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'inégalité de Hölder (théorème 3.3.2) appliqué à la mesure $|f|m$ donne

$$\left[\int |g(x - t)||f(t)| dm(t)\right]^p \leq \left[\int |g(x - t)|^p |f(t)| dm(t)\right]\left[\int |f(t)| dm(t)\right]^{\frac{p}{q}}, \tag{1.1}$$

ce qui montre que $f * g$ existe presque partout. Montrons maintenant que $f * g$ est mesurable. Soit (g_n) unr suite de fonctions continues à supports compacts qui converge vers g dans $L^p(\mathrm{R}^n)$ (théorème 4.4.4). La formule 1.1 appliquée a f et $g_n - g$ montre que pour presque tout $x \in \mathrm{R}^n$ on a

$$|f * g(x) - f * g_n(x)| \leq (|g_n - g|^p * |f|)(x) \|f\|_1^{p/q}.$$

Or le théorème 7.1.8 montre que la fonction $x \longmapsto |g_n - g|^p * |f|(x)$ tend vers zéro dans $L^1(\mathrm{R}^n)$ quand $n \longrightarrow +\infty$. D'après la proposition 3.1.7, il existe alors une suite croissante n_k d'entiers telle que $(|g_{n_k} - g|^p * |f|)(x)$ converge presque partout vers zéro ce qui montre que la suite $f * g_{n_k}$ converge presque partout vers $f * g$. Comme les fonctions $f * g_{n_k}$ sont mesurables d'après le théorème 7.1.8, il en est de même de $f * g$ (proposition 1.2.8). Ceci étant établi, si on intègre $|f * g|^p$, en utilisant l'inégalité 1.1, le théorème de Fubini–Tonelli (théorème 5.4.2) et la proposition 6.1.9 donnent

$$\|f * g\|_p^p \leq \|g\|_p^p \|f\|_1 \|f\|_1^{p/q},$$

ce qui montre l'négalité cherchée puisque $1+\frac{p}{q}= p$ Ξ

7.2 Régularisation des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$

Rappelons tout d'abord que si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{R})$, $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{R}_+)$) l'espace des fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$) qui sont indéfiniment dérivables et à supports compacts.

Définition 7.2.1 *1) On appelle* **suite régularisante sur** $\mathbb{R}^n$ *une suite* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dans* $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$ *telle que:*
(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int \alpha_k dm = 1$;
(ii) pour tout k, $\mathrm{Supp}(\alpha_k) \subset B(0, r_k)$ *avec* $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$ *(*$B(0,r_k)$ *étant la boule dans* $\mathbb{R}^n$ *de centre* 0 *et de rayon* r_k*).*
2) On appelle **suite très régularisante dans** $\mathbb{R}^n$ *une suite régularisante* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que, pour tout* k, $\alpha_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$.

Exemple 7.2.2 $\|\ \|$ *désignant la norme euclidienne dans* $\mathbb{R}^n$, *la fonction*

$$x \longmapsto \rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$ *et, si on pose* $\alpha(x) = \dfrac{\rho(x)}{\int \rho(t)dm(t)}$, *la suite* $\alpha_k(x) = k^n \alpha(kx)$, $k \in \mathbb{N}$, *est très régularisante.*

Proposition 7.2.3 *Soit* f *une fonction localement intégrable de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *ou* $\mathbb{C}$.
1) Pour toute $\alpha \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, *les fonctions* f *et* α *sont convolables en tout point de* $\mathbb{R}^n$ *et la fonction* $x \longmapsto f * \alpha(x)$ *est continue.*
2) De plus, si $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, $f * \alpha$ *est indéfiniment dérivable et pour tout muti–indice* $\beta \in \mathbb{N}^n$ *on a* $D^\beta(f*\alpha)(x) = (f * D^\beta \alpha)(x)$ *(la notation* D^β *signifie* $\dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}$, *si* $\beta = (\beta_1,\ldots\beta_n)$, $|\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$*).*

Notation: la fonction $f * \alpha$ s'appelle la **régularisée de f par** α.

Demonstration. Puisque α est bornée et à support compact, il est immédiat que $f * \alpha$ existe en tout point de R^n. Soit ω un ouvert relativement compact de R^n. Pour tout $x \in \omega$, on a

$$f * \alpha(x) = \int \alpha(x-t) f(t) \chi_{\omega - \mathrm{Supp}(\alpha)}(t) dm(t).$$

Comme $|\alpha(x-t)f(t)| \leq \|\alpha\|_\infty (|f|\chi_{\omega-\mathrm{Supp}(\alpha)})(t)$, la continuité de $f * \alpha$ résulte du théorème 2.3.1. Montrons maintenant le 2). Comme ci-dessus, il nous suffit de voir que $f * \alpha$ est dérivable dans tout ouvert relativement compact ω. Or si x_i désignent les coordonnées dans R^n, pour tout i, on a, pour $x \in \omega$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha(x-t)f(t)\right| \leq \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\right\|_\infty \Big(|f|\chi_{\omega-\mathrm{Supp}(\alpha)}\Big)(t),$$

et, le théorème 2.3.2 montre que $f * \alpha$ est dérivable par rapport à x_i et que $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(f * \alpha\Big)(x) = \Big(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} * f\Big)(x)$. D'après ce qui précède, $f * \alpha$ a donc des dérivées partielles d'ordre 1 continues sur R^n. Par récurrence sur l'ordre des dérivées, on conclut immédiatement Ξ

Corollaire 7.2.4 *Soient K et F deux sous-ensembles de R^n, K compact, F fermé, tels que $K \cap F = \emptyset$. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n; [0,1])$ telle que $f_{|K} = 1$ et $f_{|F} = 0$.*

Demonstration. Soit d la distance de K à F de sorte que $d > 0$. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n; \mathrm{R}_+)$ telle que $\int \alpha dm = 1$ et $\mathrm{Supp}(\alpha) \subset B(0, d/4)$ (exemple 7.2.2). Soit $f = \chi_V$ la fonction caractéristique de l'ensemble $V = \{x \in \mathrm{R}^n \text{ t.q. } d(x,K) < d/2\}$. Montrons que la fonction $f * \alpha$ répond a la question. Tout d'abord cette fonction appartient à $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n; \mathrm{R})$ d'après les propositions 7.2.3 et 7.1.8, et comme $0 \leq f * \alpha \leq \int \alpha dm = 1$, α est à valeurs dans $[0,1]$. Enfin, pour $x \in \mathrm{R}^n$, on a

$$f * \alpha(x) = \int_{B\left(x, \frac{d}{4}\right)} \alpha(x-t) f(t) dm(t),$$

et comme, $B(x, d/4) \subset V$ pour $x \in K$ et $B(x, d/4) \subset \mathrm{R}^n \backslash V$ pour $x \in F$, la conclusion est immédiate Ξ

Définition 7.2.5 *1) On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{K}(\mathrm{R}^n; \mathrm{R}_+)$ est* **riche** *si pour toute $f \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n; \mathrm{R}_+)$ il existe une suite $(f_k)_{k \in \mathrm{N}}$ dans $\mathcal{A}$ telle que:*
(i) les f_k sont nulles en dehors d'un compact fixe (indépendant de k);
(ii) la suite (f_k) converge uniformément vers f.
2) On dit que $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}(\mathrm{R}^n; \mathrm{R}_+)$ est **totale** *si l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs des éléments de $\mathcal{E}$ est riche.*
3) On dit que $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(\mathrm{R}^n; \mathrm{R}_+)$ est **très riche** *si $\mathcal{A}$ contient une partie riche contenue dans $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n; \mathrm{R}_+)$.*

Proposition 7.2.6 *1) Soient $f \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$ et $(\alpha_k)_{k\in\mathrm{N}}$ une suite régularisante sur R^n. Alors la suite $(f * \alpha_k)_{k\in\mathrm{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{K}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$ nuls en dehors d'un compact fixe qui converge uniformément vers f.*
2) $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n;\mathrm{R}_+)$ est une partie très riche de $\mathcal{K}(\mathrm{R}^n;\mathrm{R}_+)$.

Demonstration. Les fonctions $f * \alpha_k$ sont continues d'après la proposition 7.2.3, et comme les α_k sont à support contenu dans un compact fixe il en est de même des $f * \alpha_k$ d'après le proposition 7.1.6. Reste à montrer la convergence uniforme. Puisque $\int \alpha_k dm = 1$ et $\mathrm{Supp}(\alpha_k) \subset B(0, r_k)$, on a, pour tout $x \in \mathrm{R}^n$,

$$|(f * \alpha_k)(x) - f(x)| \le \int_{\{\|t\|<r_k\}} |f(x-t) - f(x)||\alpha_k(t)|dm(t).$$

Comme f est uniformément continue et comme $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$, il existe k_0 tel que pour $k \ge k_0$ et $\|t\| < r_k$ on a $|f(x-t) - f(x)| < \epsilon$ ($\epsilon > 0$ donné à l'avance) ce qui donne $|f * \alpha_k(x) - f(x)| < \epsilon$. Le 2) résulte alors du 1), de la proposition 7.2.3 et de l'exemple 7.2.2 Ξ

Théorème 7.2.7 *1) Soient $p \in [1, +\infty[$, $f \in L^p(\mathrm{R}^n)$ et $(\alpha_k)_{k\in\mathrm{N}}$ une suite régularisante dans R^n. Alors, pour tout k, la fonction $f * \alpha_k$ est dans $L^p(\mathrm{R}^n)$ et la suite $(f * \alpha_k)_{k\in\mathrm{N}}$ converge vers f dans $L^p(\mathrm{R}^n)$*
2) Pour $1 \le p < +\infty$, $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$ est dense dans $L^p(\mathrm{R}^n)$.

Demonstration. Vérifions tout d'abord le 1). Le fait que $f * \alpha_k \in L^p(\mathrm{R}^n)$ a été vu à la proposition 7.1.9. Si f est continue à support compact, le résultat découle de la proposition 7.2.6. Alors, si $f \in L^p(\mathrm{R}^n)$, pour toute $\varphi \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$, on a

$$\|f * \alpha_k - f\|_p \le \|(f-\varphi) * \alpha_k\|_p + \|\varphi * \alpha_k - \varphi\|_p + \|\varphi - f\|_p,$$

et la proposition 7.1.9 et ce qui précède donnent

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \|f * \alpha_k - f\|_p \le 2\|f - \varphi\|_p.$$

Le résultat découle donc du théorème 4.4.4. Le 2) s'obtient aisément: en effet, d'après la proposition 7.2.6, $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$ est dense dans $\mathcal{K}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$ pour la norme de $L^p(\mathrm{R}^n)$, et il suffit d'appliquer a nouveau le théorème 4.4.4 Ξ

7.3 Convolution des mesures boréliennes sur R^n

7.3.1 Convolution des mesures boréliennes positives

Définition 7.3.1 *Soit* $(\mu_i)_{1\leq i\leq m}$ *une suite finie de mesures de Borel positives* σ*−finies sur* R^n*. On appelle* **produit de convolution de la suite** $(\mu_i)_{1\leq i\leq m}$ *l'image par l'application*

$$\Theta : (x_1, \ldots, x_m) \longmapsto \sum_{i=1}^{m} x_i$$

de $(\mathrm{R}^n)^m$ *dans* R^n *de la mesure produit* $\prod\limits_{i=1}^{m} \mu_i$*. On le note* $\mu_1 * \ldots * \mu_m$ *ou* $\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{m} \mu_i$ *et c'est une mesure de Borel positive sur* R^n*.*

Proposition 7.3.2 *Soit* $(\mu_i)_{1\leq i\leq m}$ *une suite de mesures de Borel positives sur* R^n*. Pour toute permutation* σ *de* $\{1, \ldots, m\}$*, on a* $\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{m} \mu_i = \mathop{\ast}\limits_{i=1}^{m} \mu_{\sigma(i)}$*.*

Demonstration. Ceci résulte de l'unicité du théorème 5.3.1 Ξ

Définition 7.3.3 *Soit* $(\mu_i)_{1\leq i\leq m}$ *une suite de mesures de Borel régulières sur* R^n*. On dit que la suite* $(\mu_i)_{1\leq i\leq m}$ *est* **convolable** *si le produit de convolution* $\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{m} \mu_i$ *est régulière (i.e. finie sur les compacts).*

Proposition 7.3.4 *Pour qu'une suite finie* $(\mu_i)_{1\leq i\leq m}$ *de mesures de Borel positives régulières soit convolable, il faut et il suffit que, avec les notations de la définition* 7.3.1 *pour toute* $f \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$*,* $\displaystyle\int f \circ \Theta d\Big(\prod_{i=1}^{m} \mu_i\Big) < +\infty$*.*

Demonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition 7.3.4, de la proposition 6.1.3 et du lemme d'Uryshon (théorème 7.3.4) Ξ

Définition 7.3.5 *Soit* $(\mu_i)_{1\leq i\leq m}$ *une suite de mesures de Borel positives sur* R^n*. On dit que les mesures* μ_i **vérifient la condition des supports** *lorsque l'application* $\Theta_{|\mathrm{Supp}\left(\prod_{i=1}^{m} \mu_i\right)}$ *(*Θ *étant l'application de la définition* 7.3.1*) est propre (c.f. définition* 4.2.3 *et proposition* 6.1.4*).*

Proposition 7.3.6 *Soit* $(\mu_i)_{1\leq i\leq m}$ *une suite de mesures de Borel positives régulières sur* R^n*.*

1) Si les μ_i *sont finies alors la suite* (μ_i) *est convolable et* $\Big(\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{m} \mu_i\Big)(\mathrm{R}^n) = \prod\limits_{i=1}^{m} \mu_i(\mathrm{R}^n)$*.*

2) Si la suite (μ_i) *vérifie la condition des supports alors elle est convolable.*

3) Si $n = 1$ *et si les supports des* μ_i *sont minorés par des réels, alors la suite* (μ_i) *est convolable.*

Demonstration. Compte tenu de la proposition 4.2.10, le 1) est évident et le 2) découle du fait que la mesure $\prod_{i=1}^{n} \mu_i$ est régulière. Le 3) se vérifie immédiatement car si K est un compact et si

$$(x_1, \dots x_n) \in \Theta^{-1}(K) \cap \operatorname{Supp}\left(\prod_{i=1}^{m} \mu_i\right) = \Theta^{-1}(K) \cap \prod_{i=1}^{m} \operatorname{Supp}(\mu_i),$$

on a $\left|\sum_{i=1}^{m} x_i\right| < k$, $x_i \geq a_i$, $\forall i$, et par suite $x_i \leq k - \sum_{j \neq i} a_j$, ce qui montre que $\mathop{>\!\!\!<}_{i=1}^{m} \mu_i$ est fini sur les compacts Ξ

Proposition 7.3.7 *Soit $(\mu_i)_{1 \leq i \leq m}$ une suite de mesures de Borel positives régulières sur* R^n *convolable. Alors*

$$\operatorname{Supp}\left(\mathop{>\!\!\!<}_{i=1}^{n} \mu_i\right) = \overline{\operatorname{Supp}(\mu_1) + \ldots + \operatorname{Supp}(\mu_m)}.$$

Demonstration. En effet, ceci résulte du fait que $\operatorname{Supp}\left(\prod_{i=1}^{m} \mu_i\right) = \prod_{i=1}^{m} \operatorname{Supp}(\mu_i)$ et du corollaire 6.1.8 Ξ

Proposition 7.3.8 *Soit $a \in \mathrm{R}^n$. Toute mesure de borel positive régulière sur R^n est convolable avec la mesure de Dirac δ_a au point a. De plus, τ_a désignant la translation de vecteur a (i.e. $\tau_a(x) = x + a$), on a $\mu * \tau_a = \tau_a(\mu)$.*

Demonstration. En effet, si f est une fonction mesurable positive, on a, d'après les propositions 7.3.4 et 6.1.4, $\int f d(\mu * \tau_a) = \int f(x + a) d\mu(x) = \int f d(\tau_a \mu)$, et $\tau_a(\mu)$ est finie sur les compacts Ξ

On notera en particulier que $\mu * \tau_0 = \tau_0 * \mu = \mu$ pour toute mesure de Borel.

Proposition 7.3.9 *Soient f et g deux fonctions mesurables positives localement intégrables sur R^n et posons $\mu = fm$ et $\nu = gm$. Pour que les mesures μ et ν soit convolables, il faut et il suffit que $f * g$ soit localement intégrable. Si cette condition est réalisée, on a $\mu * \nu = (f * g)m$.*

Demonstration. En effet, en appliquant le théorème de Fubini–Tonelli (théorème 5.4.2 et le théorème de changement de variables (théorème 6.2.1), pour toute fonction mesurable positive, h, on a

$$\int hd(\mu * \nu) = \int g(y)\left[\int h(x + y) f(x) dm(x)\right] dm(y) = \int g(y)\left[\int h(x) f(x - y) dm(x)\right] dm(y),$$

ce qui, en réappliquant le théorème de Fubini–Tonelli donne $\int hd(\mu * \nu) = \int h(x)(f * g)(x) dm(x)$ Ξ

7.3.2 Convolution des mesures de Borel complexes

Introduisons tout d'abord une notation: si $f : E \longrightarrow \mathrm{C}$ et $g : F \longrightarrow \mathrm{C}$ sont deux applications, on note $f \otimes g$ l'application de $E \times F$ dans C définie par $f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$. $f \otimes g$ s'appelle le **produit tensoriel** de f par g.

Soient μ et ν deux mesures de Borel complexes sur R^n, et posons $\mu = h|\mu|$ et $\nu = k|\nu|$ (avec $h \in L^1(\mu)$ et $k \in L^1(\nu)$, proposition 3.5.3). On appelle alors **produit des mesures** μ **et** ν la mesure de Borel complexe $\mu \times \nu = h \otimes k|\mu| \times |\nu|$. Pour toute fonction borelienne positive f sur $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$ on a donc (d'après le théorème de Fubini–Tonelli (théorème 5.4.2)

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int f(x, y)h(x)k(y)d|\mu|(x)d|\nu|(y).$$

Avec ces notations, on défini alors le produit de convolution de deux mesures complexes de la manière suivante:

Définition 7.3.10 *Soient μ et ν deux mesures de Borel complexes sur R^n. On appelle* **produit de convolution de μ par** ν *la mesure de Borel complexe $\mu * \nu$ définie sur tout borélien E de R^n par $\mu * \nu(E) = \mu \times \nu(\Theta^{-1}(E))$ où Θ est l'aplication de $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$ dans R^n définie dans la définition* 7.3.1. *En d'autres termes, $\mu * \nu = \Theta(\mu \times \nu)$.*

Le produit de convolution des mesures complexes se définit donc de la même manière que celui des mesures positives. La différence ici porte sur le fait que la notion de mesures convolables n'a plus de signification puisque toute mesure de Borel complexe sur R^n est régulière. La mesure $\mu * \nu$ est donc automatiquement régulière.

Proposition 7.3.11 *Soient μ et ν deux mesures de Borel complexes sur R^n. Alors $\mu * \nu$ est l'unique mesure de Borel complexe λ sur R^n telle que, pour toute $f \in \mathcal{C}_0(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$, on ait*

$$\int f d\lambda = \int f(x + y)d\mu(x)d\nu(y). \tag{3.2}$$

Demonstration. En effet, ceci résulte de la définition et du théorème de représentation de Riesz (théorème 4.5.3) Ξ

Proposition 7.3.12 *1) Le produit de convolution des mesures de Borel complexes est commutatif et associatif.*
2) Pour tout $a \in \mathrm{R}^n$ et toute mesure de Borel complexe sur R^n on a $\mu * \delta_a = \delta_a * \mu = \tau_a(\mu)$ où τ_a désigne la translation par a (c.f. proposition 7.3.8). En particulier, $\mu * \delta_0 = \mu$.
3) Soit $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$. m désignant la mesure de Lebesgue sur R^n, pour toute mesure de Borel complexe sur R^n, on a $(fm) * \mu = Fm$ où F désigne la fonction de $L^1(\mathrm{R}^n)$ définie par

$$F(x) = \int f(x - t)d\mu(t).$$

En particulier, si $\mu = gm$, avec $g \in L^1(\mathrm{R}^n)$, on a $(fm) * (gm) = (f * g)m$.

Demonstration. Le 1) résulte aussitôt de la définition et des propriétés de commutativité et d'associativité du produit de mesures. En utilisant la proposition 7.3.11, la démonstration du 2) est exactement la même que celle de la proposition 7.3.8. Vérifions maintenant le 3). Pour cela, utilisons la formule 3.2: si $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathrm{R}^n)$, le théorème de Fubini (théorème 5.4.4) donne:

$$\int \varphi d((fm) * \mu) = \int \left[\int \varphi(x+y) f(x) dm(x)\right] d\mu(y).$$

Or, d'après la formule de changement de variables (corollaire 6.2.3), on a

$$\int \varphi(x+y) f(x) dm(x) = \int \varphi(t) f(t-y) dm(t),$$

et, en réappliquant le théorème de Fubini, il vient

$$\int \varphi d((fm) * \mu) = \int \varphi(t) \left[\int f(t-y) d\mu(y)\right] dm(t),$$

ce qui achève la preuve Ξ

Théorème 7.3.13 *Soit $\mathcal{M}(\mathrm{R}^n)$ l'espace vectoriel des mesures de Borel complexes sur R^n muni de la norme $\|\mu\| = |\mu|(\mathrm{R}^n)$ (c.f. remarque 4.5.4). Muni du produit de convolution, $\mathcal{M}(\mathrm{R}^n)$ est une algèbre de Banach commutative unitaire (en particulier ceci signifie que pour μ et ν dans $\mathcal{M}(\mathrm{R}^n)$, $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\|\|\nu\|$). De plus le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(\mathrm{R}^n)$ formé des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue est un idéal de $\mathcal{M}(\mathrm{R}^n)$ isométriquement isomorphe à l'algèbre de Banach $L^1(\mathrm{R}^n)$ (théorème 7.1.8).*

Demonstration. Comme $\mathcal{M}(\mathrm{R}^n)$ est un dual (remarque 4.5.4), c'est un espace de Banach. Compte tenu de la proposition 7.3.12 pour montrer la première assertion du théorème, il suffit de montrer l'inégalité $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\|\|\nu\|$, et celle-ci résulte immédiatement du théorème de représentation de Riesz (théorème 4.5.3), de la formule 3.2, et du théorème de Fubini (théorème 5.4.4. Enfin, la seconde assertion résulte de la proposition 7.3.12 (3)) et du fait que $\|fm\| = \|f\|_1$ pour toute $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ (proposition 3.5.5) Ξ

7.4 Convolution d'une mesure et d'une fonction

Proposition 7.4.1 *Soient f une fonction borélienne positive sur R^n localement intégrable et μ une mesure de Borel régulière positive sur R^n. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
(i) les mesures μ et fm sont convolables;
(ii) la fonction borélienne positive $x \longmapsto \int f(x-t) d\mu(t)$ est localement intégrable.

Demonstration. Ceci résulte de la définition 7.3.3 et du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.4.2 Ξ

Définition 7.4.2 *Dans les conditions de la proposition ci-dessus, lorsque les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, on dit que la fonction f et la mesure μ sont* **convolables**. *Toute fonction égale presque partout à $x \longmapsto \int f(x-t)d\mu(t)$ est appelée la* **convolée de μ par f** *et est notée $f*\mu$. Lorsque l'une des fonctions égales presque partout à $f*\mu$ est continue, c'est la seule possédant cette propriété et c'est alors celle-ci que l'on note $f*\mu$.*

Proposition 7.4.3 *Soient f une fonction borélienne localement intégrable sur R^n et μ une mesure de Borel régulière positive sur R^n. Alors f et μ sont convolables si et seulement si les mesures μ et fm sont convolables et on a $(fm)*\mu = (f*\mu)m$.*

Demonstration. En effet, compte tenu du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.4.2) et de la formule de changement de variables (corollaire 6.2.3), on a, pour toute fonction borélienne positive

$$\int \varphi d((fm)*\mu) = \int \varphi(u)\Big[\int f(u-y)d\mu(y)\Big]dm(u),$$

ce qui donne aussitôt la proposition Ξ

En utilisant la proposition 7.3.12, on peut définir de manière analogue la convolée d'une fonction intégrable et d'une mesure complexe:

Définition 7.4.4 *Soient $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ et μ une mesure de Borel complexe sur R^n. On appelle* **convolée de f par μ**, *l'unique fonction $F \in L^1(\mathrm{R}^n)$ telle que $(fm)*\mu = Fm$ (c.f. proposition* 7.3.12*) et on note $F = f*\mu$.*

Lorsque l'on est dans les conditions de l'une des définitions 7.4.2 ou 7.4.4, la mesure $(\mu * f)m$ est parfois appelée la **régularisée de μ par f**.

Proposition 7.4.5 *Soient μ une mesure de Borel régulière positive (resp.complexe) sur R^n et $f \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n;\mathrm{R}_+)$ (resp. $f \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$).*
1) f et μ sont convolables et $f*\mu$ est continue;
2) si μ est à support compact alors $f*\mu \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n;\mathrm{R}_+)$ (resp. $\mathcal{K}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$);
3) si $f \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n;\mathrm{R}_+)$ (resp. $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$) alors $f*\mu$ est indéfiniment dérivable. Si de plus μ est à support compact alors $f*\mu \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n;\mathrm{R}_+)$ (resp. $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$).

Demonstration. La convolabilité de f et μ dans le cas positif est évidente, et la continuité de $f*\mu$ résulte immédiatement du théorème 2.3.1. Le 2) résulte alors de la proposition 7.3.7 si f et μ sont positives et de la définition dans le cas complexe. Le 3) résulte lui de la même manière du théorème 2.3.2 Ξ

Proposition 7.4.6 *Soient $(\alpha_k)_{k\in \mathrm{N}}$ une suite régularisante sur R^n et μ une mesure de Borel régulière positive (resp. complexe) sur R^n. Alors pour toute $\varphi \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$ (resp. $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$) on a*

$$\int \varphi d\mu = \lim_{k\to\infty}\int \varphi(\alpha_k * \mu)dm.$$

On dit que la suite $((\alpha_k * \mu)m)_{k\in\mathrm{N}}$ **converge vaguement vers** μ.

Demonstration. Remarquons tout d'abord que $\alpha_k * \mu$ existe et est continue d'après la proposition 7.4.5. Remarquons ensuite que, dans le cas positif φ et α_k sont convolables et $\alpha_k * \varphi \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$ (proposition 7.2.6, et que, dans le cas complexe, $\alpha_k * \varphi$ est continue et bornée. Alors les théorèmes de Fubini–Tonelli et de Fubini (théorèmes 5.4.2 et 5.4.4) donnent

$$\int \varphi(x)(\alpha_k * \mu)(x)dm(x) = \int (\alpha_k * \varphi)(x)d\mu(x).$$

Dans le cas où μ est positive la conclusion résulte alors de la proposition 7.2.6. Dans le cas complexe il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 7.2.6, en remarquant que les fonctions de $\mathcal{C}_0(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$ sont uniformément continues, pour constater que dans ce cas $\alpha_k * \varphi$ converge encore uniformément vers φ Ξ

Chapitre 8

TRANSFORMATION DE FOURIER

Dans tout ce chapitre, nous utiliserons les notations données au début du paragraphe 7.1 du chapitre précédent. De plus si f est une fonction intégrable sur R^n, nous noterons $\int f(x)dx$ ou bien $\int_{\mathrm{R}^n} f(x)dx$ son intégrale (par rapport à la mesure de Lebesgue). Si A est une partie mesurable de R^n, nous dirons qu'une fonction $f : A \longrightarrow \overline{\mathrm{R}}$ ou C est mesurable (resp. intégrable) si la fonction $\chi_A f$ est mesurable (resp. intégrable). L'intégrale de f sur A sera notée $\int_A f(x)dx$.

Le produit scalaire euclidien de R^n sera noté $x\xi$; autrement dit, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n)$ sont des éléments de R^n on pose

$$x\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i.$$

Nous utiliserons aussi les notations $f^\vee$ et $\tau_a(f)$ (ou $\tau_a f$) introduites au chapitre précédent. De plus si f est une application de R^n dans C, nous noterons $\tilde{f}$ l'application $\overline{f^\vee}$ c'est-à-dire la fonction $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$.

8.1 Transformation de Fourier des fonctions intégrables

8.1.1 Définition, premières propriétés, exemples

Définition 8.1.1 *Soit $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$. On appelle* **transformée de Fourier** *(resp.* **transformée de Fourier conjuguée***)* **de** *f la fonction $\mathcal{F}f = \mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ (resp. $\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}}(f) = (\widehat{f})^\vee$) définie sur R^n par:*

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

Les applications $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont appelées respectivement la **transformation de Fourier** *et la* **transformation de Fourier conjuguée**.

Proposition 8.1.2 *1) Les aplications $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont des aplications linéaires continues de norme 1 de $L^1(\mathrm{R}^n)$ dans l'espace $\mathcal{CB}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$ des fonction continues bornées de R^n dans C muni de la norme uniforme.*
2) Si $f_i \in L^1(\mathrm{R}^{n_i})$, $1 \le i \le p$, $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$, alors le produit tensoriel $f = \bigotimes_{i=1}^{p} f_i$ appartient à $L^1(\mathrm{R}^n)$ et on a $\mathcal{F}f = \bigotimes_{i=1}^{p} \mathcal{F}f_i$ et $\overline{\mathcal{F}}f = \bigotimes_{i=1}^{p} \overline{\mathcal{F}}f_i$.
3) Pour toute $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ on a: $\mathcal{F}f = \overline{\mathcal{F}}(f^\vee)$, $(\mathcal{F}f)^\vee = \mathcal{F}(f^\vee) = \overline{\mathcal{F}}f$, $\overline{\mathcal{F}f} = \mathcal{F}(\tilde{f}) = \overline{\mathcal{F}}(\overline{f})$, $(\overline{\mathcal{F}f})^\vee = \mathcal{F}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{F}}(\tilde{f})$.
4) Pour tout automorphisme u de R^n et toute fonction $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ on a

$$\mathcal{F}(f \circ u) = \frac{1}{|\det(u)|}\mathcal{F}f \circ \left(u^{-1}\right)^*,$$

$$\overline{\mathcal{F}}(f \circ u) = \frac{1}{|\det(u)|}\overline{\mathcal{F}}f \circ \left(u^{-1}\right)^*,$$

où $(u^{-1})^*$ désigne le transposé de u^{-1}.

Demonstration. En effet, comme il est évident que $\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$, le 1) résulte du théorème 2.3.1. Le 2) résulte lui du théorème de Fubini (théorème 5.4.4). Les formules du 3) résultent elles de la définition et de la formule de changement de variables (corollaire 6.2.3). Enfin, le 4) résulte lui aussi de la formule de changement de variables car celle-ci donne

$$\mathcal{F}(f \circ u)(\xi) = \frac{1}{|\det(u)|}\int f(x) e^{-2i\pi u^{-1}(x)\xi}dx,$$

et il suffit de remarquer que $u^{-1}(x)\xi = x(u^{-1})^*(\xi)$; la seconde formule du 4) résulte de la première et du 3) Ξ

Proposition 8.1.3 *1) Pour tout $\lambda \in \mathrm{R}\backslash\{0\}$ notons H_λ l'homothétie de rapport λ (i.e. $H_\lambda(x) = \lambda x$, $x \in \mathrm{R}^n$). Alors, pour toute $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$, $f \circ H_\lambda \in L^1(\mathrm{R}^n)$ et on a $\mathcal{F}(|\lambda|^n f \circ H_\lambda) = (\mathcal{F}f) \circ H_{1/\lambda}$ et $\overline{\mathcal{F}}(|\lambda|^n f \circ H_\lambda) = (\overline{\mathcal{F}}f) \circ H_{1/\lambda}$.*
2) Pour tout $a \in \mathrm{R}^n$ notons χ_a la fonction définie sur R^n par $\chi_a(x) = e^{2i\pi ax}$. Alors pour toute $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$, on a $\mathcal{F}(\tau_a f) = \chi_{-a}\widehat{f}$, $\mathcal{F}(\chi_a f) = \tau_a \widehat{f}$, et, $\overline{\mathcal{F}}(\tau_a f) = \chi_a \overline{\mathcal{F}}f$, $\overline{\mathcal{F}}(\chi_a f) = \tau_{-a}(\overline{\mathcal{F}}f)$ (formules du retard).

Demonstration. Le 1) est un cas particulier du 4) de la proposition 8.1.2, et, le 2) resulte immédiatement de la définition et de la formule de changement de variables (corollaire 6.2.3) Ξ

Nous allons maintenant voir un exemple fondamental de transformée de Fourier:

Proposition 8.1.4 *Soient $a > 0$ et φ_a la fonction de R^n dans R définie par $\varphi_a(x) = e^{-a\|x\|^2}$ où $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x (i.e. $\|x\|^2 = xx$ dans nos notations). Alors*

$$\mathcal{F}(\varphi_a) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\|x\|^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \varphi_{\pi^2/a}.$$

En perticulier, si $\varphi = \varphi_\pi$ on a $\widehat{\varphi} = \varphi$ et $\overline{\mathcal{F}}\varphi = \varphi$. De plus, pour tout $\lambda \in \mathrm{R}\backslash\{0\}$, on a $\mathcal{F}(|\lambda|^n\varphi \circ H_\lambda) = \varphi \circ H_{1/\lambda}$ et $\mathcal{F}(\varphi \circ H_{1/\lambda}) = |\lambda|^n \varphi \circ H_\lambda$, ce qui signifie que les fonctions $|\lambda|^n\varphi \circ H_\lambda$ et $\varphi \circ H_{1/\lambda}$ sont transformées de Fourier l'une de l'autre (et de même pour la transforméee de Fourier conjuguée).

Demonstration. En effet, puisque $e^{-a\|x\|^2} = \prod_{i=1}^{n} e^{-ax_i^2}$, le 2) de la proposition 8.1.2 montre qu'il suffit de faire le calcul lorsque $n = 1$. Dans ce cas le résultat s'écrit

$$\mathcal{F}(\varphi_a)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\cos(2\pi x\xi)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2},$$

(car $\mathcal{F}(\varphi_a) = \overline{\mathcal{F}(\varphi_a)}$ d'après la proposition 8.1.2 et le fait que $\tilde{\varphi}_a = \varphi_a$) ce qui n'est autre que la formule classique

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}.$$

Les dernières assertions résultent de la proposition 8.1.3 Ξ

Avant de poursuivre, rappelons la définition des fonctions de Bessel. Si ν est un réel positif ou nul, **la fonction de Bessel d'ordre** ν est la fonction J_ν définie pour $x > 0$ par

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n!\Gamma(n + \nu + 1)}.$$

Cette fonction est solution de l'équation différentielle de Bessel

$$y" + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

On peut exprimer les fonctions de Bessel par des formules intégrales:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} \cos(x\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta d\theta. \tag{1.1}$$

En particulier,

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\cos\theta)d\theta,$$

et

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Ceci étant rappelé, on a la proposition suivante:

Proposition 8.1.5 *Soit $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ une fonction radiale, c'est-à-dire telle que $f(x) = \varphi(\|x\|)$. Alors $\mathcal{F}f$ et $\overline{\mathcal{F}}f$ sont radiales et on a:*
1) $\mathcal{F}f = \overline{\mathcal{F}}f$;
2) pour $n \geq 2$ et pour tout $x \in \mathrm{R}^n$,

$$\widehat{f}(x) = \psi(\|x\|) = \frac{2\pi}{\|x\|^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\infty J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi r\|x\|) r^{\frac{n}{2}} \varphi(r) dr;$$

3) pour $n = 1$ et tout $x \in \mathrm{R}$,

$$\widehat{f}(x) = \psi(|x|) = 2\int_0^\infty \cos(2\pi r|x|)\varphi(r)dr.$$

Demonstration. Si u est un automorphisme orthogonal de R^n, le 4) de la proposition 8.1.2 montre que $\mathcal{F}(f \circ u) = \mathcal{F}f \circ u$ et $\overline{\mathcal{F}}(f \circ u) = \overline{\mathcal{F}}f \circ u$ et comme f est radiale, $\mathcal{F}f = \mathcal{F}f \circ u$ et $\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}}f \circ u$ ce qui prouve que $\mathcal{F}f$ et $\overline{\mathcal{F}}f$ sont aussi radiales et le 1) résulte alors de la définition.

Supposons maintenant $n \geq 2$ et calculons la fonction $\widehat{f}$ au point $(\|x\|, 0, \ldots, 0)$ ce qui suffit d'après ce qui précède. Le théorème de Fubini (théorème 5.4.4) et le corollaire 6.3.4 donnent alors

$$\mathcal{F}f(x) = \sigma_{n-2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-2i\pi t_1\|x\|}\varphi\left(\sqrt{t_1^2 + r^2}\right) r^{n-2} dr\right] dt_1.$$

En intégrant en coordonnées polaires cette intégrale devient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x) &= \sigma_{n-2}\textstyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}\varphi(r)\left[\displaystyle\int_0^\pi e^{-2i\pi r\|x\|\cos\theta} \sin^{n-2}\theta d\theta\right] dr \\ &= \sigma_{n-2}\textstyle\int_0^{+\infty} r^{n-1}\varphi(r)\left[2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2\pi r\|x\|\cos\theta) \sin^{n-2}\theta d\theta\right] dr.\end{aligned}$$

D'après 1.1, on a

$$\mathcal{F}f(x) = \sigma_{n-2}\frac{1}{\|x\|^{\frac{n}{2}-1}}\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}-1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\int_0^{+\infty} r^{n/2}\varphi(r)J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi r\|x\|)dr,$$

et la formule du 2) découle du fait que $\sigma_{n-2=2}\frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)}$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, ce qui résulte du corollaire 6.3.4. Le 3) est immédiat car f radiale signifie que f est paire Ξ

8.1.2 Propriétés fondamentales de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathrm{R}^n)$

Proposition 8.1.6 (theoreme du transfert) *Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathrm{R}^n)$. Alors*

$$\int_{\mathrm{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathrm{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx.$$

Demonstration. Puisque $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont bornées (proposition 8.1.2), la proposition est une conséquence immédiate du théorème de Fubini (théorème 5.4.4 Ξ

Corollaire 8.1.7 (formule preparatoire de Riesz) *Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathrm{R}^n)$. Alors*

$$\int_{\mathrm{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)e^{2i\pi a\xi}d\xi = \int_{\mathrm{R}^n} f(a+x)\widehat{g}(x)dx.$$

Demonstration. En effet, il suffit d'appliquer le théorème de transfert (proposition 8.1.6 aux fonctions $\tau_{-a}f$ et g et d'utiliser la proposition 8.1.3 2) Ξ

Proposition 8.1.8 (propriete fondamentale de la transformation de Fourier) *Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathrm{R}^n)$. Alors $\mathcal{F}(f*g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$ et $\overline{\mathcal{F}}(f*g) = (\overline{\mathcal{F}}f)(\overline{\mathcal{F}}g)$.*

Demonstration. Tout d'abord ces formules ont bien un sens puisque, d'après le théorème 7.1.8, $f*g \in L^1(\mathrm{R}^n)$. La seconde égalité résultant de la première, montrons cette dernière. La fonction

$$(t,u) \longmapsto e^{-2i\pi ux}f(u-t)g(t)$$

étant intégrable, le théorème de Fubini (théorème 5.4.4) donne

$$\mathcal{F}(f*g)(x) = \int g(t)\Big[\int e^{-2i\pi ux}f(u-t)du\Big]dt,$$

et, d'après la formule de changement de variables (corollaire 6.2.3), on a

$$\mathcal{F}(f*g)(x) = \int g(t)\Big[\int e^{-2i\pi(t+y)x}f(y)dy\Big]dt,$$

ce qui donne le résultat en réappliquant le théorème de Fubini Ξ

Avant de continuer, introduisons une notation commode. Pour tout multiindice $\alpha \in \mathrm{N}^n$, nous noterons M^α la fonction de R^n dans lui-même définie par $M^\alpha(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$. Par ailleurs, pour tout entier k, nous noterons $\mathcal{C}^k\mathcal{B}(\mathrm{R}^n)$ l'espace des fonctions de R^n dans C qui sont de classe $\mathcal{C}^k$ et dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées.

Rappelons de plus que si $\alpha \in \mathrm{N}^n$ on note, pour $f \in \mathcal{C}^k(\mathrm{R}^n)$, $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$.

Proposition 8.1.9 (proprietes d'echange) *Soient $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ et $k \in \mathrm{N}$.*
1) Supposons que pour tout multiindice $\alpha \in \mathrm{N}^n$, $|\alpha| \le k$, on ait $M^\alpha f \in L^1(\mathrm{R}^n)$. Alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^k\mathcal{B}(\mathrm{R}^n)$. De plus, pour $\alpha \in \mathrm{N}^n$, $|\alpha| \le k$, on a $D^\alpha\widehat{f} = \mathcal{F}\Big((-2i\pi)^{|\alpha|}M^\alpha f\Big)$.
2) Supposons que $f \in \mathcal{C}^k(\mathrm{R}^n)$ et que, pour tout $\beta \in \mathrm{N}^n$, $|\beta| \le k$, on ait $D^\beta f \in L^1(\mathrm{R}^n)$. Alors $M^\beta\widehat{f} \in \mathcal{C}\mathcal{B}(\mathrm{R}^n)$, pour tout $\beta \in \mathrm{N}^n$, $|\beta| \le k$. De plus, on a $(2i\pi)^{|\beta|}M^\beta\widehat{f} = \mathcal{F}(D^\beta f)$.

Demonstration. En effet, pour voir le 1), il suffit de montrer que si $x_1 f(x)$ est intégrable, alors $\widehat{f}$ est dérivable par rapport à ξ_1 et

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathrm{R}^n} -2i\pi x_1 f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx,$$

et ceci résulte aussitôt du théoeème 2.3.2. Montrons maintenant le 2): il suffit de prouver que si $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \in L^1(\mathrm{R}^n) \cap \mathcal{C}(\mathrm{R}^n)$, alors $\mathcal{F}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\Big) = 2i\pi\xi_1 \widehat{f}(\xi)$. D'après le théorème de Fubini (théorème 5.4.4) on a

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi)\right) - 2i\pi\xi_1\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathrm{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathrm{R}} \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(f(x)e^{-2i\pi x\xi}\Big)dx_1\right] dx_2 \dots dx_n,$$

et la conclusion résulte du lemme élémentaire suivant:

Lemme 8.1.10 *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{R})$ telle que f et f' sont intégrables. Alors $\displaystyle\int_{\mathrm{R}} f'(x)dx = 0$.*

Demonstration du lemme. En effet, puisque f' est intégrable sur R et est continue, la limite

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a f'(x)dx = \lim_{a\to+\infty}(f(a) - f(0))$$

existe ce qui montre que f a une limite en $+\infty$. De même, f a une limite en $-\infty$. Puisque f est intégrable, ces limites doivent être nulles ce qui montre le lemme Ξ

Théorème 8.1.11 (theoreme de Riemann-Lebesgue) *Les applications $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont des applications linéaires continues de normes 1 de $L^1(\mathrm{R}^n)$ dans $\mathcal{C}_0(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ muni de la norme de la convergence uniforme.*

Demonstration. Compte tenu de la proposition 8.1.2, la seule chose à montrer est que, pour $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$, $\mathcal{F}f(\xi)$ tend vers zéro lorsque $|\xi|$ tend vers $+\infty$. Supposons tout d'abord $f \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$. Le 2) de la proposition 8.1.9 et la proposition 8.1.2 montrent que, pour tout j, et tout $\xi \in \mathrm{R}^n$, $|2i\pi\xi_j\widehat{f}(\xi)| \leq \Big\|\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\Big\|_\infty$, et comme, quand $\xi \longrightarrow +\infty$ l'un au moins des ξ_j tend vers $+\infty$, il s'en suit que $\widehat{f}(\xi)$ tend vers 0. Pour conclure, il suffit alors de se rappeler que $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ est dense dans $L^1(\mathrm{R}^n)$ (théorème 7.2.7) et d'utiliser à nouveau la proposition 8.1.2 Ξ

8.1.3 Procédés de sommation

Proposition 8.1.12 *Soit α un élément de $L^1(\mathrm{R}^n)$ vérifiant les deux conditions suivantes:*
(a) $\widehat{\alpha}$ est intégrable;
(b) $\alpha = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{\alpha})$.
Alors, pour toute fonction $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ on a $f * \alpha = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{\alpha}\widehat{f}) = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f * \alpha))$.

Demonstration. La dernière égalité de l'énoncé résulte de la proposition 8.1.8, et d'après le théorème 8.1.11, $\widehat{\alpha}\widehat{f}$ est intégrable. Alors le théorème de Fubini (théorème 5.4.4) donne

$$\overline{\mathcal{F}}\Big(\widehat{\alpha}\widehat{f}\Big)(x) = \int f(t)\Big[\int e^{2i\pi(x-t)\xi}\widehat{\alpha}(\xi)d\xi\Big]dt,$$

et la conclusion résulte de l'hypothèse (b) Ξ

Définition 8.1.13 *On dit qu'une suite* $(\alpha_m)_{m\in\mathrm{N}}$ *de fonctions de* R^n *dans* C *est* **adaptée** *si elle vérifie les six conditions suivantes:*
(i) pour tout m, α_m *est continue et intégrable ainsi que* $\widehat{\alpha}_m$;
(ii) pour tout m *on a* $\alpha_m = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{\alpha}_m)$;
(iii) pour tout m *on a* $\widehat{\alpha}_m(\mathrm{R}^n) \subset [0,1]$;
(iv) la suite $(\widehat{\alpha}_m)_{m\in\mathrm{N}}$ *converge vers* 1 *uniformément sur tout compact de* R^n;
(v) pour tout m, $\alpha_m \geq 0$ *et* $\displaystyle\int \alpha_m(x)dx = 1$;
(vi) pour toute $f \in \mathcal{CB}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$, *on a* $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\int f(x)\alpha_m(x)dx = f(0)$.

Remarque. La condition (vi) de la définition ci-dessus est équivalente à la même condition énoncée pour toute fonction de $\mathcal{K}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$, c'est-à-dire à la convergence vague de la suite de mesures $\alpha_m(x)dx$ vers la masse de Dirac δ_0.

L'exemple fondamental donné à la proposition 8.1.4 fournit un exemple de suite adaptée:

Proposition 8.1.14 *Pour tout* $m \in \mathrm{N}$, *soit* $\alpha_m(x) = \Big(\frac{m}{\sqrt{\pi}}\Big)^n e^{-m^2\|x\|^2}$. *Alors, la suite* $(\alpha_m)_{m\in\mathrm{N}}$ *est adaptée.*

Demonstration. En effet, d'après la proposition 8.1.4, on a $\widehat{\alpha}_m(\xi) = e^{-(\pi/m)^2\|\xi\|^2}$, ce qui montre que (i) est vérifié, et, la même proposition montre que $\overline{\mathcal{F}}(\widehat{\alpha}_m) = \alpha_m$. (iii) et (iv) sont évidents. Le (v) a déjà été utilisé lors de la preuve du corollaire 6.3.4 (voir la remarque qui le suit). Vérifions enfin le (vi). Soit $f \in \mathcal{CB}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$ et soit $\eta > 0$ tel que pour $\|x\| \leq \eta$ on ait $|f(x) - f(0)| \leq \epsilon$. La condition (v) implique donc $\displaystyle\int_{\{\|x\|\leq\eta\}} |f(x) - f(0)|\alpha_m(x)dx \leq \epsilon$. On a donc

$$\Big|\int f(x)\alpha_m(x)dx - f(0)\Big| \leq \epsilon + \int_{\{\|x\|\geq\eta\}} |f(x) - f(0)|\alpha_m(x)dx. \tag{1.2}$$

et pour conclure il suffit de voir que le second membre de la formule 1.2 tend vers zéro quand $m \longrightarrow +\infty$, c'est-à-dire que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_{\{\|x\|\geq\eta\}} \alpha_m(x)dx = 0$. Or cette dernière intégrale est égale à

$$\int_{\{\|x\|\geq m\eta\}} \Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big)^n e^{-\|x\|^2}dx$$

(d'après la formule de changement de variables (corollaire 6.2.3)) et cette dernière intégrale tend vers zéro quand $m \longrightarrow +\infty$ d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (théorème 2.2.8) Ξ

Théorème 8.1.15 (theoreme de sommabilite de l'integrale de Fourier) *Soit $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$.*
1) Soit $(\alpha_m)_{m\in\mathrm{N}}$ une suite adaptée. Pour tout m, $f_m = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}\widehat{\alpha}_m)$ appartient à $\mathcal{C}_0(\mathrm{R}^n;\mathrm{C}) \cap L^1(\mathrm{R}^n)$ et la suite $(f_m)_{m\in\mathrm{N}}$ converge vers f dans $L^1(\mathrm{R}^n)$. Si de plus $f \in \mathcal{CB}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$ la suite $(f_m)_{m\in\mathrm{N}}$ converge vers f uniformément sur tout compact de R^n (le même énoncé est valable si on remplace $\mathcal{F}$ par $\overline{\mathcal{F}}$ et réciproquement).
2) Si $\widehat{f}$ (resp. $\overline{\mathcal{F}}f$) est integrable, alors f est presque partout égale à la fonction continue $f_0 = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})$ (resp. $f_0 = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}f)$). En particulier si f est de plus continue on a $f = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}) = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}f)$.

Demonstration. Montrons tout d'abord le 1). La définition 8.1.13 et la proposition 8.1.12 montrent que $f_m = f * \alpha_m$, et d'après le théorème 7.1.8, $f_m \in L^1(\mathrm{R}^n)$. Par ailleurs, le théorème 8.1.11 montre que $f_m \in \mathcal{C}_0(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$. Remarquons maintenant que

$$\|f - f_m\|_1 \leq \int \|\tau_t f - f\|_1 \alpha_m(t)dt. \tag{1.3}$$

Alors, comme la fonction $t \longrightarrow \|\tau_t f - f\|_1$ est continue (d'après la proposition 7.1.2), l'hypothèse (vi) de la définition 8.1.13 implique que le second membre de la formule 1.3 tend vers zéro quand $m \longrightarrow +\infty$. Supposons maintenant que f est continue et bornée et soit K un compact de R^n. Comme f est uniformément continue sur tout compact, il existe $\eta > 0$ tel que, pour $|t| < \eta$ et tout $x \in K$ on a $|f(x-t) - f(x)| \leq \epsilon$. Soit alors $\varphi \in \mathcal{K}(\mathrm{R}^n;[0,1])$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset \{|t| < \eta\}$. Alors, pour $x \in K$, on a

$$\int |f(x-t) - f(x)|\varphi(t)\alpha_m(t)dt \leq \epsilon$$

d'après la condition (v) de la définition 8.1.13, et il vient donc

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon + 2\|f\|_\infty \int (1 - \varphi(t))\alpha_m(t)dt,$$

et la dernière intégrale de cette inégalité tend vers zéro quand $m \longrightarrow +\infty$ grâce à la condition (vi) de la définition 8.1.13.

Montrons maintenant le 2). Les hypothèses (iii) et (iv) de la définition 8.1.13 et le théorème de convergence dominée de Lebesgue (théorème 2.2.8) montrent que la suite $(\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}\widehat{\alpha}_m))_{m\in\mathrm{N}}$ converge simplement vers $\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})$. La conclusion résulte donc de la proposition 3.1.7 Ξ

Corollaire 8.1.16 (theoreme d'unicite de la transformation de Fourier) *Soient f et g deux éléments de $L^1(\mathrm{R}^n)$. Pour que $\widehat{f} = \widehat{g}$ il faut et il suffit que $f = g$.*

Demonstration. En effet, d'après le théorème 8.1.15, $f - g$ est limite dans $L^1(\mathrm{R}^n)$ de la suite nulle $\overline{\mathcal{F}}((\widehat{f} - \widehat{g})\widehat{\alpha}_m)$ Ξ

Corollaire 8.1.17 *1) $\mathcal{F}(L^1(\mathrm{R}^n)) \cap L^1(\mathrm{R}^n) = \overline{\mathcal{F}}(L^1(\mathrm{R}^n)) \cap L^1(\mathrm{R}^n)$ est l'espace vectiriel des fonctions continues sur R^n dont les transformées de Fourier et les transformées de Fourier conjugués sont intégrables.*
2) Muni du produit de convolution (resp. du produit ordinaire) $\mathcal{F}(L^1(\mathrm{R}^n)) \cap L^1(\mathrm{R}^n)$ est une algèbre sur C que nous noterons ici $[\mathcal{F}(L^1(\mathrm{R}^n)) \cap L^1(\mathrm{R}^n); *]$ (resp. $\mathcal{F}(L^1(\mathrm{R}^n)) \cap L^1(\mathrm{R}^n)$).
3) $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $[\mathcal{F}(L^1(\mathrm{R}^n)) \cap L^1(\mathrm{R}^n); *]$ sur $\mathcal{F}(L^1(\mathrm{R}^n)) \cap L^1(\mathrm{R}^n)$ dont l'isomorphisme réciproque est $\overline{\mathcal{F}}$.

Demonstration. Le 1) n'est autre que le 2) du théorème 8.1.15. Si $f$et g sont dans $\mathcal{F}(L^1(\mathrm{R}^n)) \cap L^1(\mathrm{R}^n)$, ce même théorème montre que $g = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{g})$, $f = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})$, $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont intégrables, $\widehat{f}\widehat{g}$ et fg sont des fonctions intégrables d'après le théorème 8.1.11, $f * g$ est intégrable d'après le théorème 7.1.8 et la proposition 8.1.12 montre que $f * g = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}\widehat{g})$. De même $\widehat{f} * \widehat{g}$ est intégrable, la proposition 8.1.8 montre que $fg = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} * \widehat{g})$ et le théorème 8.1.15 donne que $\mathcal{F}(fg)$ est intégrable. Ceci achève de montrer le 2). Enfin le 3) est une conséquence immédiate du théorème 8.1.15, de la proposition 8.1.8 et du théorème 8.1.11 Ξ

8.1.4 Le théorème classique de réciprocité dans R

Dans ce sous-paragraphe, nous allons donner un théorème classique qui n'est valable que dans R. Rappelons tout d'abord certaines terminologies.
Soit I un intervalle de R, $f : I \longrightarrow \mathrm{C}$ et $x \in I$. On dit que f est **lipschitzienne à droite** (resp. **à gauche**) **en** x s'il existe $\eta > 0$ et $k > 0$ tels que pour $x < x' < x" < x + \eta$ (resp. $x - \eta < x' < x" < x$) on a $|f(x') - f(x")| \leq k(x" - x')$. Ceci implique que f a une limite à droite (resp. à gauche) en x que l'on notera $f(x^+)$ (resp. $f(x^-)$).

Définition 8.1.18 *Soit $[a, b]$ un intervalle compact de* R. *On dit qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathrm{C}$ est à* **variation bornée sur** *$[a, b]$ s'il existe une constante $M < +\infty$ telle que, pour toute subdivision x_i, $a = x_1 \leq \ldots \leq x_m = b$, de $[a, b]$, on a $\sum_{i=1}^{m-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq M$.*

Proposition 8.1.19 *Soit f une fonction à variation bornée sur un intervalle compact I. Alors f est différence sur I de deux fonctions decroissantes. En particulier, f a une limite à droite et à gauche en tout point de I. De plus toute fonction monotone est à variation bornée.*

Demonstration. En effet, pour tout $x \in I = [a, b]$ posons

$$v(f, [a, x]) = \sup_{a = x_1 \leq \ldots \leq x_m = x} \sum_{i=1}^{m-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

Il est clair que $x \longrightarrow v(f, [a, x])$ est croissante. Par ailleurs, on vérifie facilement que

$$v(f, [a, x_2]) - v(f, [a, x_1]) \geq f(x_2) - f(x_1)$$

pour $x_2 \geq x_1$, ce qui montre que $x \longrightarrow f(x) - v(f, [a, x])$ est décroissante. La dernière assertion de la proposition est immédiate Ξ

Lemme 8.1.20 *Soient I un intervalle de* R *et f une fonction intégrable de I dans* C. *Alors*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_I f(x) \cos(\lambda x) dx = \lim_{\lambda \to \infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) dx = 0$$

Demonstration. Supposons tout d'abord que f soit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact contenu dans l'intérieur de I. En intégrant par parties, il vient

$$\int_I f(x) \cos(\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_I f'(x) \sin(\lambda x) dx,$$

et la conclusion est immédiate. Pour conclure dans le cas général, il suffit d'appliquer alors le théorème 7.2.7 car si $f_i \in L^1(I)$, $i = 1, 2$, et si on note $F_i(\lambda) = \displaystyle\int_I f_i(x) \cos(\lambda x) dx$, on a $\|F_1 - F_2\|_\infty \leq \|f_1 - f_2\|_1$ Ξ

Lemme 8.1.21 *On a*

$$\sup_{\substack{0 \leq c < d \\ \lambda > 0}} \left| \int_c^d \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt \right| = A < +\infty.$$

Demonstration. En faisant le changement de variables $\lambda t = u$, c'est une conséquence immédiate de la semi-intégrabilité de la fonction $\frac{\sin x}{x}$ Ξ

Lemme 8.1.22 *Soient $a > 0$ et $f \in L^1(]0, a[)$. On suppose que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite:*
(D) il existe $\alpha \in]0, a[$ tel que f soit lipschitzienne sur $]0, \alpha[$.
(J) il existe $\alpha \in]0, a[$ tel que f soit à variation bornée sur $[0, \alpha]$.
Alors

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^a f(t) \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} f(0^+),$$

où $f(0^+)$ désigne la limite à droite en 0 de f.

Demonstration. D'après le lemme 8.1.20, on peut supposer $a = +\infty$. Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, pour $0 < \eta \leq \alpha$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t) \frac{sin(\lambda t)}{t} dt - \frac{\pi}{2} f(0^+) &= \int_0^\eta \left(f(t) - f(0^+)\right) \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt \\ &+ \int_\eta^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \sin(\lambda t) dt \\ &- f(0^+) \int_\eta^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt. \end{aligned} \tag{1.4}$$

En faisant le changement de variable $\lambda t = u$ on voit que la dernière intégrale du second membre de 1.4 tend vers zéro quand $\lambda \longrightarrow +\infty$ (semi-intégrabilité de $\frac{\sin t}{t}$). Le même résultat est vrai pour la seconde d'après le lemme 8.1.20. Pour conclure, il suffit de voir que l'on peut choisir η pour rendre la première intégrale du second membre de 1.4 aussi petite que l'on veut indépendamment de λ. Sous l'hypothèse (D), on a $\frac{|f(t) - f(0^+)|}{t} \leq k$ et cette intégrale se majore aussitôt par $k\eta$. Plaçons nous maintenant sous l'hypothèse (J). D'après la proposition 8.1.19, on peut supposer que f est décroissante sur $[0, \alpha]$. D'après la seconde formule de la moyenne, cette intégrale est alors égale à

$$\Big(f(\eta) - f(0^+)\Big)\int_c^\eta \frac{\sin(\lambda t)}{t}dt,$$

avec $c \in]0, \eta[$ et la conclusion résulte du lemme 8.1.21 Ξ

Théorème 8.1.23 (theoreme de Fourier-Jordan-Dirichlet) *Soient* $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ *et* $x \in \mathrm{R}$. *On suppose que l'on a l'une des deux conditions suivantes:*
(D) il existe $\alpha > 0$ *tel que* f *soit lipschitzienne dans* $]x - \alpha, x[$ *et* $]x, x + \alpha[$.
(J) il existe $\alpha > 0$ *tel que* f *soit à variation bornée dans* $[x - \alpha, x + \alpha]$.
Alors on a

$$\frac{f(x^+) - f(x^-)}{2} = \lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{+N} e^{2i\pi x\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi.$$

Demonstration. Comme la fonction $(t, \xi) \longmapsto f(t)e^{2i\pi(x-t)\xi}$ est intégrable sur $\mathrm{R} \times [-N, +N]$, d'après le théorème de Fubini (théorème 5.4.4), on a

$$\begin{aligned}
\int_{-N}^{+N} \widehat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\int_{-N}^{+N} e^{2i\pi(x-t)\xi}d\xi\right]dt \\
&= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin 2\pi(x-t)N}{x-t}dt \\
&= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} (f(x+t) + f(x-t))\frac{\sin 2\pi N t}{t}dt.
\end{aligned}$$

La conclusion résulte alors du lemme 8.1.22 Ξ

Exemples.

1) Considérons les fonctions $f_a(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$. Un calcul élémentaire montre que

$$\widehat{f}_a(\xi) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}.$$

Posons $p_a(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2 + \xi^2}$. Le théorème de Fourier-Jordan-Drichlet donne alors $\widehat{p}_a\left(\frac{x}{2\pi}\right) = f_a(x)$. Alors, d'après la proposition 8.1.6, on a $\mathcal{F}(p_s * p_t)\left(\frac{x}{2\pi}\right) = f_{s+t}(x) = \widehat{p}_{s+t}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$. En réappliquant le théorème 8.1.23, il vient $p_s * p_t = p_{s+t}$: **la famille de fonctions $(p_t)_{t>0}$ contitue un semi-groupe pour la convolution. C'est le semi-groupe de Poisson.**

2) De la même manière, en utilisant la fonction $e^{-a\|x\|^2}$, on montre que: **la famille $(q_t)_{t>0}$, $q_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}$, contitue un semi-groupe pour la convolution: c'est le semi-groupe des distributions gaussiennes.**

8.2 La transformation de Fourier sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$

Dans ce paragraphe, nous reprenons les notations M^α et $D^\alpha f$, $\alpha \in \mathrm{N}^n$, rappelées avant l'énoncé de la proposition 8.1.9 du paragraphe précédent pour les utiliser systématiquement.

Définition 8.2.1 *On appelle* **espace de Schwartz sur** R^n *l'espace vectoriel sur* C*, noté* $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$*, formé des fonctions de* $\mathcal{C}^\infty\mathcal{B}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ *telles que pour tous multiindices* α *et* β *de* N^n *on a*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} M^\alpha(x) D^\beta f(x) = 0.$$

Remarque 8.2.2 *1) Il est clair que* $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ *est contenu dans* $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$*.*
2) Pour tout $p \in [1, +\infty]$*,* $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ *est contenu dans* $L^p(\mathrm{R}^n)$*, et, pour* $p < +\infty$ $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ *est dense dans* $L^p(\mathrm{R}^n)$*.*
3) Pour tous multiindices α *et* β *et toute* $f \in \mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$*, la fonction* $M^\alpha D^\beta f$ *appartient à* $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$*.*

Nous allons munir naturellement $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ d'une structure d'espace métrique complet:

Proposition 8.2.3 *Pour tous multiindices* α *et* β *appartenant à* N^n *et pour* $f \in \mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ *posons* $N_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathrm{R}^n} |M^\alpha(x) D^\beta f(x)|$*. Alors* $N_{\alpha,\beta}$ *est une semi-norme sur* $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$*. De plus, si* $m \longmapsto (\alpha_m, \beta_m)$ *est une indexation sur* N *de* $\mathrm{N}^n \times \mathrm{N}^n$*, la formule*

$$d(f, g) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_{\alpha_m,\beta_m}(f - g)}{2^m (1 + N_{\alpha_m,\beta_m}(f - g))}$$

definit une distance sur $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ *pour laquelle* $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ *est un espace métrique complet.*

Demonstration. Cette proposition est immédiate: il est clair que les $N_{\alpha,\beta}$ sont des semi-normes, et, si $(f_k)_{k \in \mathrm{N}}$ est une suite de Cauchy pour d, alors, pour tout $\beta \in \mathrm{N}^n$, $D^\beta f_k$ converge uniformément sur R^n. Si f est la limite de cette suite, on a donc, pour tous α et β dans N^n, $\lim_{k \to \infty} \|M^\alpha D^\beta (f_k - f)\|_\infty = 0$, ce qui montre que $f \in \mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ Ξ

La remarque suivante est immédiate:

Remarque 8.2.4 *1) La convergence dans l'espace métrique* $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ *implique la convergence dans* $L^p(\mathrm{R}^n)$*,* $p \in [1, +\infty]$*.*
2) Soit T *une forme linéaire sur* $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$*. Alors* T *est continue si et seulement si il existe une famille finie* $(\alpha_i, \beta_i)_{i \in I}$ *et une constante* $C > 0$ *telles que* $|T(f)| \leq C \sup_{i \in I} N_{\alpha_i,\beta_i}(f)$*.*

Proposition 8.2.5 *Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ et α et β deux multiindices. Alors $\widehat{f}$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathrm{R}^n)$ et $\mathcal{F}\Big((-2i\pi)^{|\alpha|} M^\alpha D^\beta f\Big) = (2i\pi)^{|\beta|} M^\beta D^\alpha \widehat{f}$, et, de même si on remplace la transformée de Fourier par la transformée de Fourier conjuguée.*

Demonstration. C'est une conséquence immédiate de la remarque 8.2.2 et de la proposition 8.1.9 Ξ

Le principal résultat de ce paragraphe est le théorème suivant:

Théorème 8.2.6 *1) La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est un automorphisme continu de $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ dont l'automorphisme inverse est $\overline{\mathcal{F}}$.*
2) Muni du produit ordinaire $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ est une algèbre que l'on notera $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$.
3) Muni du produit de convolution $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ est une algèbre que l'on notera $\Big[\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C}), *\Big]$.
4) $\mathcal{F}$ est un automorphisme continu de l'algèbre $\Big[\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C}), *\Big]$ sur l'algèbre $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ dont l'inverse est $\overline{\mathcal{F}}$.
5) L'itérée $\Big(\mathcal{F}_{|\mathcal{S}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})}\Big)^2$ est la symétrie $f \longmapsto f^\vee$ de $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$. En particulier, $\Big(\mathcal{F}_{|\mathcal{S}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})}\Big)^4$ est l'identité.

Demonstration. Le fait que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ pour $f \in \mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ résulte de la proposition 8.2.5 et du théorème de Riemann–Lebesgue (théorème 8.1.11. De plus ces même résultats et la remarque 8.2.4 donnent aussitôt la continuité de $\mathcal{F}$ (et de $\overline{\mathcal{F}}$) dans l'espace métrique $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$. Pour achever la preuve du 1), il suffit alors d'appliquer le théorème 8.1.15. Pour achever la démonstration du théorème, compte tenu de la proposition 8.1.8, il suffit de voir que si f et g sont deux éléments de $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ alors $f * g$ appartient aussi à $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$. Or $\overline{\mathcal{F}}(f * g) = \overline{\mathcal{F}} f \overline{\mathcal{F}} g \in \mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ d'après le 1) et le 2) et $f * g = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(f * g) \in \mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ d'après le 1) à nouveau Ξ

8.3 La transformation de Fourier-Plancherel

Le but de ce paragraphe est de montrer que la transformation de Fourier que nous avons définie sur $L^1(\mathrm{R}^n)$ peut se définir sur $L^2(\mathrm{R}^n)$. Nous le ferons en prolongeant $\mathcal{F}$ restreinte à $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$ et nous verrons que ce prolongement restreint à $L^1(\mathrm{R}^n) \cap L^2(\mathrm{R}^n)$ coïncide avec la transformation de Fourier définie sur $L^1(\mathrm{R}^n)$.

L'extension à $L^2(\mathrm{R}^n)$ est basée sur la remarque suivante:

Proposition 8.3.1 *Soient f et g deux éléments de $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n; \mathrm{C})$. Alors*

$$\int \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi = \int f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Demonstration. Puisque $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}g}) = \overline{g}$ d'après le théorème 8.2.6, ceci résulte de la formule du transfert (proposition 8.1.6 Ξ

Théorème 8.3.2 (theoreme de Riesz-Plancherel) *La transformation de Fourier (resp. la transformation de Fourier conjuguée) restreinte à $\mathcal{S}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$ est prolongeable en un opérateur unitaire de $L^2(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$ sur lui-même, que l'on appelle* **la transformation de Fourier-Plancherel** *(resp.* **la transformation de Fourier-Plancherel conjuguée***), dont l'opérateur inverse est la transformation de Fourier-Plancherel conjuguée.*

Demonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 8.3.2, du théorème 8.2.6 et de la remarque 8.2.2, 2) Ξ

Proposition 8.3.3 *Sur $L^1(\mathrm{R}^n) \cap L^2(\mathrm{R}^n)$ les transformations de Fourier et de Fourier-Plancherel coïncident.*

Demonstration. En effet, soit $f \in L^1(\mathrm{R}^n) \cap L^2(\mathrm{R}^n)$. D'après le théorème 7.2.7 et l'exemple 7.2.2, il existe une suite φ_m de fonctions de $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n;\mathrm{C})$ qui converge vers f à la fois dans $L^1(\mathrm{R}^n)$ et dans $L^2(\mathrm{R}^n)$. Alors d'après le théorème de Riemann-Lebesgue (théorème 8.1.11) la suite $\widehat{\varphi}_m$ converge uniformément vers $\widehat{f}$ et, par définition (théorème 8.3.2), elle converge, dans $L^2(\mathrm{R}^n)$, vers la transformée de Fourier-Plancherel de f Ξ

Cette proposition justifie le fait que l'on note $\mathcal{F}f$ ou $\widehat{f}$ la transformation de Fourier-Plancherel.

Proposition 8.3.4 *Soit B_k, $k \in \mathrm{N}$, une suite d'ensembles mesurables de R^n relativement compacts dont la réunion est R^n. Pour toute $f \in L^2(\mathrm{R}^n)$ $\mathcal{F}f$ est limite, dans $L^2(\mathrm{R}^n)$, de la suite $(g_k)_{k\in\mathrm{N}}$ définie par*

$$g_k(\xi) = \int_{B_k} f(x)e^{-2i\pi x\xi}dx.$$

Demonstration. Posons $f_k = \chi_{B_k} f$ de sorte que $g_k = \widehat{f_k}$. Alors, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (théorème 2.2.8), f_k tend vers f dans $L^2(\mathrm{R}^n)$, et la conclusion résulte du théorème 8.3.2 Ξ