Département Licence

K1BE6W14 Biomodélisation
Mathématiques 11 mai 2012
Durée : 3h00 Ph. Thieullen

Solution du DST 2012

Exercice 1. On note $f(x) = x - cx + axe^{-bx}$.

1. Les points d'équilibre sont solutions de l'équation $f(x) = x$. On obtient a priori deux valeurs
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x_* = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{a}{c}\right).$$
Si $a > c$ (le taux de production est supérieur au taux de destruction pour des valeurs faibles du nombre de globules rouges), le système admet les deux points d'équilibre 0 et x_*. Si $a \leq c$, 0 est le seul point d'équilibre. Un point d'équilibre x est stable si $|f'(x)| < 1$. Comme
$$f'(x) = 1 - c + ae^{-bx}(1 - bx)$$
on a $f'(0) = 1 + a - c$ et $f'(x_*) = 1 - c\ln\frac{a}{c}$. Si $a \leq c$, $0 < f'(0) < 1$ et 0 est stable. Si $a > c$, comme $f'(x_*) < 1$, x_* est stable si et seulement si
$$c < a < c\ \exp(2/c).$$

2. Dans le cas $a < c$, la courbe $y = f(x)$ est toujours en dessous de $y = x$. Dans le cas $a > c$, $y = f(x)$ est asymptote à $y = (1 - c)x$.

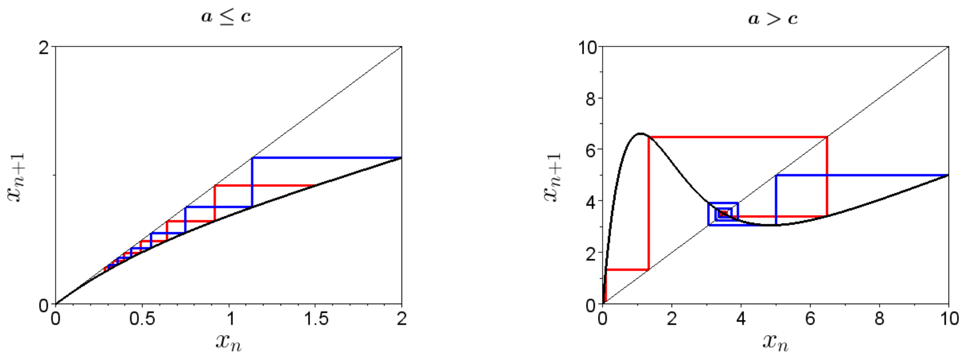


FIGURE 1 – Quelques itérés dans les deux cas : $a \leq c$ et $a > c$.

Exercice 2. On note par a, b, c les concentrations des espèces A, B, C.

1. Le lois cinétiques d'action de masse donnent
$$\frac{da}{dt} = -sa + b, \quad \frac{db}{dt} = sa - (1+s)b + c, \quad \frac{dc}{dt} = sb - c.$$

2. On constate que $\frac{d}{dt}(a+b+c) = 0$. Les conditions initiales entrainent la relation $a+b+c=1$. En éliminant b, on obtient
$$\frac{da}{dt} = 1-(1+s)a-c, \quad \frac{dc}{dt} = s - sa - (1+s)c.$$
3. Les points d'équilibre sont solutions de $\frac{da}{dt} = \frac{dc}{dt} = 0$. On obtient un unique point d'équilibre (a_*, c_*) solution d'un système linéaire
$$\begin{cases} (1+s)a + c & = 1 \\ sa + (1+s)c & = s \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a_* & = (1+s+s^2)^{-1} \\ c_* & = s^2(1+s+s)^{-1} \end{cases}.$$
La matrice de linéarisation autour du point d'équilibre est
$$\mathrm{Jac}(a_*, c_*) = \begin{bmatrix} -(1+s) & -1 \\ -s & -(1+s) \end{bmatrix}$$
Son déterminant est égal à $\det(\mathrm{Jac}) = 1+s+s^2 > 0$ et sa trace est égale à $\mathrm{tr}(\mathrm{Jac}) = -2(1+s) < 0$. Les deux valeurs propres sont donc toutes les deux strictement négatives. Le système est stable ; comme il est linéaire, peu importent les conditions initiales, il convergera exponentiellement vite vers le point d'équilibre.

Exercice 3.

1. On définit $x(\tau) = \frac{1}{L} N\left(\frac{\tau}{r}\right)$. En dérivant par rapport à τ on obtient
$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{rL}\frac{dN}{dt} = \frac{N}{L}\left(1 - \left(\frac{N}{L} - \frac{K}{L}\right)^2\right) = x(1-(x-a)^2).$$
2. Les points d'équilibre sont obtenus en résolvant $f(x) = 0$. On obtient alors $x=0$, $x=a-1$ ou $x=a+1$. Le tracer des graphes $\dot{x} = f(x)$ est donné dans la figure 2.

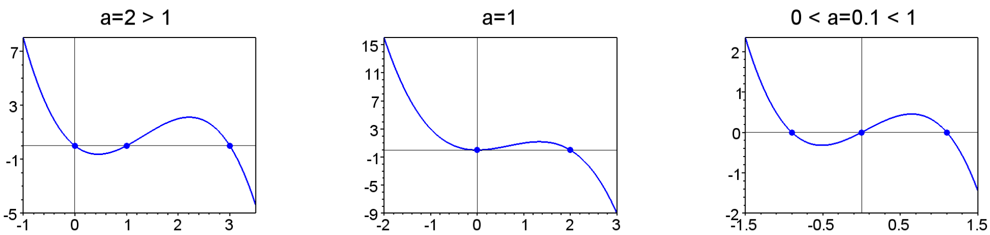


FIGURE 2 – Graphe de $\dot{x} = f(x)$ pour 3 cas de a.

Pour $a > 1$, il y a 3 points d'équilibre ; pour $a \le 1$, il y a 2 points d'équilibre positifs et un point négatif qui n'est pas réalisable biologiquement. .

3. On suppose que $a > 1$. Les points d'équilibre $x=0$ et $x=a+1$ sont stables ; le point $x=a-1$ est instable. Pour toute condition initiale $x_0 \in]0, a-1[$ ou $x_0 \in]a+1, +\infty[$, le système évolue exponentiellement vite vers 0 ou $a+1$ respectivement. Pour toute condition initiale $x_0 \in]a-1, a+1[$, le système converge vers $a+1$.

4. Pour $a=2$, la décomposition dite en éléments simples de
$$\frac{1}{x(x-1)(3-x)} = \frac{-1/3}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/6}{3-x},$$
est obtenue en multipliant les deux membres par un des termes x, $x-1$ ou $3-x$, en simplifiant les expressions obtenues, puis en faisant respectivement $x=0$, $x=1$ ou $x=3$ pour trouver les coefficients correspondants A, B ou C. L'équation différentielle est à variables séparées, en tenant compte de la condition initiale $x_0 = 2$ à $\tau_0 = 0$
$$\frac{dx}{x(x-1)(3-x)} = -\frac{dx}{3x} + \frac{dx}{2(x-1)} + \frac{dx}{6(3-x)} = d\tau,$$
$$-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x(\tau)}{2}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x(\tau)-1}{1}\right| - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3-x(\tau)}{1}\right| = \tau,$$
$$\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}(x-1)^{1/2}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{1/6} = e^{\tau}.$$
Comme $x(\tau)$ est un fonction croissante de limite $a+1=3$, on a bien
$$3-x(\tau) \sim \frac{32}{9}e^{-6\tau}, \quad \text{pour} \quad \tau \to +\infty.$$

Exercice 4.

1. Il est sous entendu que le taux de décès est égal au taux de naissance b. On suppose aussi que les individus infectés donnent naissance à des enfants sains. Le système est décrit par la figure 3.

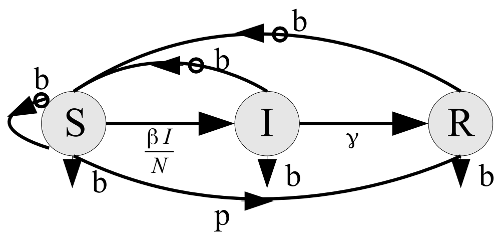


FIGURE 3 – Diagramme de Leslie à 3 états S, I, R.

2. On constate que $S_{t+1}+I_{t+1}+R_{t+1} = S_t+I_t+R_t$ en sommant les 3 équations. C'est bien sûr compatible avec l'hypothèse sur l'égalité des taux de décès et de naissance.

3. On raisonne par récurrence. On suppose que $S_t, I_t, R_t \geq 0$. La condition $0 < b+\gamma < 1$ entraine $I_{t+1} \geq 0$, $0 < b < 1$ et $R_{t+1} \geq 0$. La loi de conservation donne $0 \leq I_t \leq N$ et l'hypothèse $0 < p+b < 1$ entrainent alors $(1-p)S_t - \frac{\beta}{N}I_tS_t \geq (1-p-\beta)S_t \geq 0$ et donc $S_{t+1} \geq 0$.

4. On remplace $R_t + I_t$ par $N - S_t$ dans la première équation pour obtenir

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= (1-p)S_t - \frac{\beta}{N} I_t S_t + b(N - S_t) =: f(S_t, I_t) \\ I_{t+1} &= \frac{\beta}{N} I_t S_t + (1 - b - \gamma) I_t =: g(S_t, I_t) \end{aligned}$$

Les points d'équilibre sont solutions de $S_{t+1} = S_t$ et $I_{t+1} = I_t$. Deux cas se présentent.

(a) Ou bien $I = 0$ et $S = bN/(p + b)$.

(b) Ou bien $I > 0$, par simplification de I dans la deuxième équation, on obtient $S_* = N(b+\gamma)/\beta$ et par substitution de S_* dans la première équation $\frac{\beta}{N} I_* S_* = bN - (p+b)S_*$, on obtient

$$S_* = \frac{N(b+\gamma)}{\beta}, \quad I_* = \frac{N(p+b)}{\beta}(\rho - 1) \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{b\beta}{(b+\gamma)(p+b)}.$$

5. La matrice jacobienne de linéarisation en tout point (S, I) est égale à

$$\mathrm{Jac}(S, I) = \begin{bmatrix} 1 - (p+b) - \frac{\beta}{N} I & -\frac{\beta}{N} S \\ \frac{\beta}{N} I & \frac{\beta}{N} S + 1 - (b+\gamma) \end{bmatrix}$$

La condition de stabilité de Jury est $|\operatorname{tr}(\mathrm{Jac})| < 1 + \det(\mathrm{Jac}) < 2$ et elle est équivalente au fait que les deux valeurs propres sont en module strictement plus petites que 1. Au point $\left(\frac{bN}{p+b}, 0\right)$, la matrice jacobienne est égale à

$$\mathrm{Jac}\Big(\frac{bN}{p+b}, 0\Big) = \begin{bmatrix} 1 - (p+b) & -\frac{\beta b}{p+b} \\ 0 & 1 + (b+\gamma)(\rho - 1) \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice sont $1 - (p+b)$ et $1 + (b+\gamma)(\rho-1)$. Le point d'équilibre est stable si et seulement si $\rho < 1$.

6. On suppose que $\beta = \frac{1}{2}$ et $b = \gamma = \frac{1}{20}$. Alors

$$\rho = \frac{5}{20p + 1} \quad \text{et} \quad \rho < 1 \Longleftrightarrow p > p_{min} = \frac{1}{5}.$$

On peut donc éradiquer la pathologie si la proportion p de personnes vaccinées est supérieure à $1/5$. Si maintenant $p = \frac{1}{2} p_{min} = \frac{1}{10}$, alors $\rho = \frac{5}{3} > 1$. La matrice jacobienne au point d'équilibre (S_*, I_*) est égale à

$$\mathrm{Jac}(S_*, I_*) = \begin{bmatrix} 1 - \rho(p+b) & -(b+\gamma) \\ (\rho - 1)(p+b) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 1. \end{bmatrix}$$

On obtient les valeurs numériques $\operatorname{tr}(\mathrm{Jac}) = \frac{7}{4}$ et $\det(\mathrm{Jac}) = \frac{19}{25}$ qui vérifient bien la condition de Jury. Le point d'équilibre (S_*, I_*) est stable, la population tend à se répartir selon les valeurs

$$S_* = \frac{N}{5}, \quad I_* = \frac{N}{5} \quad \text{et} \quad R_* = \frac{3N}{5}.$$

Exercice 5.

1. Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, on constate que la courbe $q = f(p)$ est située au dessus de l'axe $q = 0$ et donc n'intersecte pas la droite $q = p$. De même, sur l'intervalle $]\gamma, +\infty[$, la courbe $q = f(p)$ est au dessous de $q = 0$ et n'intersecte pas $q = p$. La courbe $q = f(p)$ doit cependant couper au moins une fois $q = p$. On admet que cela ne peut se produire qu'une seule fois. On vient de montrer que l'équation
$$p = \alpha(\gamma - p)(1 + p)^2$$
admet une unique solution dans $]0, \gamma[$.

2. Les points d'équilibre sont obtenus en résolvant le systèmes
$$h\left(\frac{p}{1+p} - \alpha h\right) = p\left((\gamma - p) - \frac{h}{1+p}\right) = 0.$$
Ou bien $h = 0$ et $p(\gamma - p) = 0$ et on obtient 2 points d'équilibre sur l'axe $h = 0$ d'ordonnées $p = 0$ ou $p = \gamma$. Ou bien $h > 0$ et p est solution de l'équation
$$\alpha h = \frac{p}{1+p} = \alpha(\gamma - p)(1 + p).$$
La question 1. montre qu'il existe une unique solution $p_* \in]0, \gamma[$ vérifiant l'équation précédente. Cette même équation définie h_*.

3. Le diagramme est donnée sur la figure 4 L'axe horizontal et la parabole

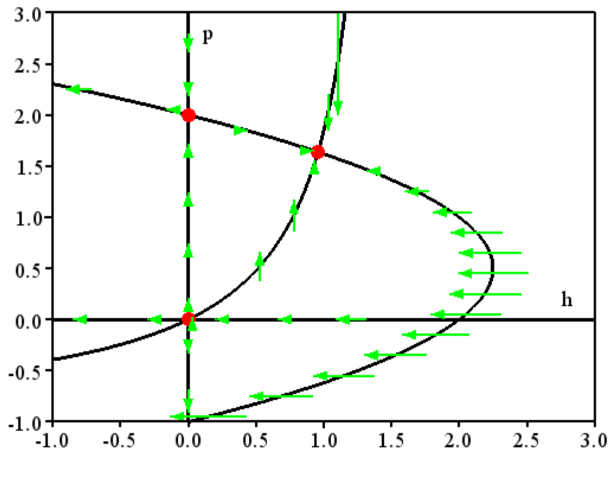


FIGURE 4 – Points d'équilibre, nulclines et champ de vecteur.

sont des p-nulclines, l'axe vertical et l'hyperbole sont des h-nulclines. Deux points d'équilibre sont sur l'axe vertical, le troisième a ses deux coordonnées strictement positives.

4. On écrit le système différentielle sous la forme

$$\frac{dh}{dt} = f(h,p), \quad \frac{dp}{dt} = g(h,p) \quad \text{avec} \quad \mathrm{Jac}(h,p) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial h} & \dfrac{\partial f}{\partial p} \\ \dfrac{\partial g}{\partial h} & \dfrac{\partial g}{\partial p} \end{bmatrix}$$

Aux deux points d'équilibre sur l'axe vertical, on a

$$\mathrm{Jac}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Jac}(0,\gamma) = \begin{bmatrix} \frac{\beta\gamma}{1+\gamma} & 0 \\ -\frac{\gamma}{1+\gamma} & -\gamma \end{bmatrix}$$

Le point $(0,0)$ est un point nœud instable ($\dot{h} = -\alpha\beta h^2$ sur l'axe $p = 0$) ; le point $(0,\gamma)$ est un point selle (donc instable). La matrice jacobienne au point (h_*, p_*) est de plus

$$\mathrm{Jac}(h_*, p_*) = \left(\frac{p_*}{1+p_*}\right) \begin{bmatrix} -\beta & \beta\dfrac{\gamma - p_*}{p_*} \\ -1 & \gamma - 1 - 2p_* \end{bmatrix}.$$

5. Pour $0 < \gamma \leq 1$, les signes des entrées de la matrice jacobienne sont

$$\mathrm{signe}(\mathrm{Jac}(h_*, p_*)) = \begin{bmatrix} - & + \\ - & - \end{bmatrix}$$

Sans calcul, on obtient que le déterminant de $\mathrm{Jac}(h_*, p_*)$ est strictement positif et que la trace de $\mathrm{Jac}(h_*, p_*)$ est strictement négative. Nécessairement, les deux valeurs propres sont strictement négatives. Le système différentielle non perturbé est donc asymptotiquement stable. Le calcul exact du déterminant donne

$$\det(\mathrm{Jac}(h_*, p_*)) = \frac{\beta p_*}{(1+p_*)^2}\left(2p_*^2 - \gamma p_* + \gamma\right).$$

Le discriminant du polynôme du second degré est $\Delta = \gamma(\gamma - 8) < 0$ et le déterminant est bien strictement positif sous les hypothèses $0 < \gamma < 8$.

6. On rappelle d'abord que les deux axes sont des trajectoires particulières. Toute autre trajectoire passant par un point $h > 0$ et $p > 0$ ne coupe donc jamais les axes. Sur la demie-droite $p = \gamma + 1$ et $h > 0$, la composante verticale du champ de vecteur est strictement négative

$$\frac{dp}{dt} = (\gamma + 1)\left(-1 - \frac{h}{1+p}\right) < 0.$$

Sur la demie-droite $h = 1/\alpha$ et $p > 0$, la composante horizontale du champ de vecteur est négative

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\beta}{\alpha(1+p)} < 0.$$

le rectangle $R = \{(h,p) \ : \ 0 < h \leq 1/\alpha, \ 0 < p \leq \gamma + 1$ est donc une région absorbante : toute trajectoire issue d'un point intérieur de R est contrainte à rester dans R en tout temps positif.

7. On suppose que $\gamma = 4$, $\alpha = 1/12$ et $\beta = 1/2$. On constate alors que $(h_*, p_*) = (6, 1)$ est bien solution de

$$\alpha h = \frac{p}{1+p} = \alpha(\gamma - p)(1+p).$$

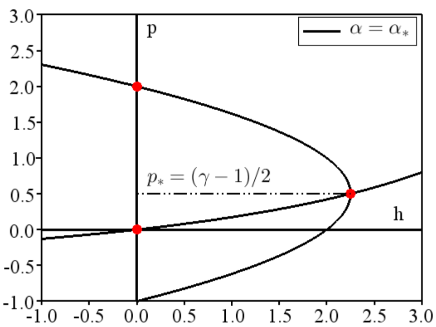
La matrice jacobienne en ce point est égale à

$$\mathrm{Jac}(h_*, p_*) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

de trace $\mathrm{tr}(\mathrm{Jac}) = \frac{1}{4}$ et de déterminant $\det(\mathrm{Jac}) = \frac{1}{4}$. On est en fait dans le cas $\alpha < \alpha_* = 4(\gamma-1)/(\gamma+1)^3$ où un cycle limite peut apparaître pour des valeurs de β suffisamment petites. La figure de droite de la figure 5 montre le cas limite $\alpha = \alpha_*$. Le calcul de trace et de déterminant précédent montre que les deux valeurs propres de la matrice jacobienne sont strictement positives.

On cherche maintenant à construire un domaine ouvert borné R' absorbant et ne contenant aucun point d'équilibre dans $\bar{R}$. On appliquera alors le théorème de Poincaré-Bendixon pour affirmer l'existence d'un cycle limite.

On commence par enlever au domaine R un petit disque de centre (h_*, p_*). Le nouveau domaine ainsi formé reste encore absorbant. On modifie maintenant le deux bords « bas» et « gauche » de R comme dans la figure de droite de la figure 5. On fixe $0 < p' < p_*$ et $h' = p'/(\alpha(1+p'))$. Le bord « bas » de R' est formé d'une trajectoire se terminant à (h', p') et coupant l'axe vertical $h = 1/\alpha$. Le bord « gauche » de R' est formé du segment $p' < p < \gamma + 1$ à $h = h'$. ce nouveau domaine R' devient absorbant.



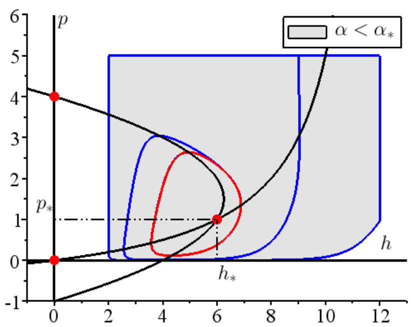


FIGURE 5 – Apparition d'un cycle limite pour $\alpha < \alpha_*$ et $\beta < \beta_*(\alpha)$.