Département
Licence

K1BE6W14 Biomodélisation
Mathématiques TD exercices 2
Ph. Thieullen

Feuille d'exercices 2

Exercice 1. On considère une réaction enzimatique simplifée donnée par le schéma

$$s + e \underset{k_-}{\overset{k_+}{\rightleftharpoons}} x \xrightarrow{k} p + e$$

où e désigne une enzyme, s un substrat, x le complexe intermédiaire et p le produit formé par la réaction. Montrez que $x + e = e_0$ est constant. Puis éliminez e pour arriver à un système de 2 équations

$$\begin{aligned} x' &= k_+ s(e_0 - x) - (k_- + k)x \\ s' &= k_- x - k_+ s(e_0 - x) \end{aligned}$$

Le produit p est calculé ensuite par intégration $p = k \int_0^t x\, dt$.

Exercice 2. On considère le modèle de Chapman-Richards généralisant le modèle de Gompertz, dans lequel une fraction β de la biomasse participe à la croissance :

$$\begin{aligned} \beta x + e &\xrightarrow{k} (\beta + R)x + e \\ e &\xrightarrow{k'} 0 \end{aligned}$$

1. Déterminez les équations différentielles des deux variables x et e.
2. Résolvez le système et montrez que la biomasse devient

$$x(t) = x_0 \Big[1 + \frac{(1-\beta)kRe_0}{k' x_0^{1-\beta}} \Big(1 - e^{-k't} \Big) \Big]^{1/(1-\beta)}$$

où e_0 et x_0 sont les quantité d'enzyme et de biomasse à l'instant $t_0 = 0$.

Exercice 3. Le modèle suivant de Kostitzin, prolongeant le modèle logistique, est utilisé pour décrire un mécanisme de production d'une certaine protéine x couplé à un mécanisme de dégradation par auto-intoxication :

$$\begin{aligned} s + x &\xrightarrow{b} (1 + R)x \\ x &\xrightarrow{1} x + y \\ x + y &\xrightarrow{c_1} y + \frac{1}{R} s \end{aligned}$$

1. Décrivez les 3 réactions et le sens des variables s et y.
2. Montrez qu'on peut simplifier les 3 équations en éliminant s et obtenir
$$x' = ax - bx^2 - cxy,$$
$$y' = x,$$
où $a = Rb$ et $c = c_1$.
3. Montrer qu'on peut résoudre le système sous la forme
$$\frac{dx}{dy} = a - bx - cy.$$
Montrer que la solution est
$$x = \frac{1}{b}\Big(a + \frac{c}{b} - cy\Big) + \Big(x_0 - \frac{1}{b}\Big(a + \frac{c}{b}\Big)\Big)e^{-by}.$$

Exercice 4. On considère le modèle mixte logistique/Gompertz suivant
$$x + f + s \xrightarrow{a} (1+R)x + f$$
$$f \xrightarrow{b} 0$$
où f est interprété comme un facteur nécessaire de croissance, non transformé en biomasse x, mais pouvant se dégrader, et s est une ressource consommée par x.
1. Déterminez les équations différentielles.
2. Montrez que $x + Rs = K_0$ est constant.
3. Intégrez l'équation en f.
4. Eliminez s et intégrez l'équation en x, f en séparant les variables. On trouvera
$$x = \frac{K_0}{1 + \frac{K_0 - x_0}{x_0}\exp\big[-\frac{K_0 a f_0}{b}\big(1 - \exp(-bt)\big)\big]}$$
5. Déterminez la valeur maximale de la biomasse.

Exercice 5. On considère un modèle de récolte dans l'industrie de la pêche dans lequel le volume de la récolte est proportionnel au nombre de poissons N :
$$\frac{dN}{dt} = RN\big(1 - \frac{N}{K}\big) - EN$$
où R est un taux de renouvellement, K est une capacité de charge et E est un taux d'exploitation par ans. On supposera que E n'est pas trop grand par rapport à R, soit $E < R$.
1. Déterminez le nouvel état d'équilibre et montrez qu'il est stable.
2. Montrez que la volume maximal V_{max} de poissons capturés par ans est obtenu pour $E = \frac{1}{2}R$ et que $V_{max} = \frac{1}{4}KR$.

Exercice 6. Déterminez les états d'équilibre et la stabilté de ces états du modèle
$$\frac{dN}{dt} = rN\Big(1 - \frac{N}{K}\Big) - \frac{bN}{A+N}.$$

Exercice 7.
- Murray 1.3
- Murray 1.4
- Murray 1.5