

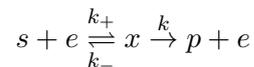


Département  
Licence

K1BE6W14 Biomodélisation  
Mathématiques TD exercices 2  
Ph. Thieullen

## Feuille d'exercices 2

**Exercice 1.** On considère une réaction enzymatique simplifiée donnée par le schéma

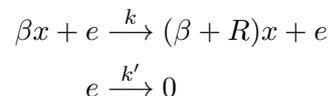


où  $e$  désigne une enzyme,  $s$  un substrat,  $x$  le complexe intermédiaire et  $p$  le produit formé par la réaction. Montrez que  $x + e = e_0$  est constant. Puis éliminez  $e$  pour arriver à un système de 2 équations

$$\begin{aligned}x' &= k_+s(e_0 - x) - (k_- + k)x \\s' &= k_-x - k_+s(e_0 - x)\end{aligned}$$

Le produit  $p$  est calculé ensuite par intégration  $p = k \int_0^t x dt$ .

**Exercice 2.** On considère le modèle de Chapman-Richards généralisant le modèle de Gompertz, dans lequel une fraction  $\beta$  de la biomasse participe à la croissance :

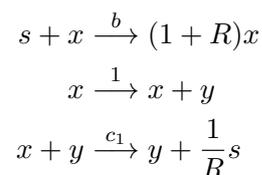


- Déterminez les équations différentielles des deux variables  $x$  et  $e$ .
- Résolvez le système et montrez que la biomasse devient

$$x(t) = x_0 \left[ 1 + \frac{(1 - \beta)kRe_0}{k'x_0^{1-\beta}} (1 - e^{-k't}) \right]^{1/(1-\beta)}$$

où  $e_0$  et  $x_0$  sont les quantités d'enzyme et de biomasse à l'instant  $t_0 = 0$ .

**Exercice 3.** Le modèle suivant de Kostitzin, prolongeant le modèle logistique, est utilisé pour décrire un mécanisme de production d'une certaine protéine  $x$  couplé à un mécanisme de dégradation par auto-intoxication :



1. Décrivez les 3 réactions et le sens des variables  $s$  et  $y$ .
2. Montrez qu'on peut simplifier les 3 équations en éliminant  $s$  et obtenir

$$\begin{aligned}x' &= ax - bx^2 - cxy, \\y' &= x,\end{aligned}$$

où  $a = Rb$  et  $c = c_1$ .

3. Montrer qu'on peut résoudre le système sous la forme

$$\frac{dx}{dy} = a - bx - cy.$$

Montrer que la solution est

$$x = \frac{1}{b} \left( a + \frac{c}{b} - cy \right) + \left( x_0 - \frac{1}{b} \left( a + \frac{c}{b} \right) \right) e^{-by}.$$

**Exercice 4.** On considère le modèle mixte logistique/Gompertz suivant

$$\begin{aligned}x + f + s &\xrightarrow{a} (1 + R)x + f \\f &\xrightarrow{b} 0\end{aligned}$$

où  $f$  est interprété comme un facteur nécessaire de croissance, non transformé en biomasse  $x$ , mais pouvant se dégrader, et  $s$  est une ressource consommée par  $x$ .

1. Déterminez les équations différentielles.
2. Montrez que  $x + Rs = K_0$  est constant.
3. Intégrez l'équation en  $f$ .
4. Éliminez  $s$  et intégrez l'équation en  $x, f$  en séparant les variables. On trouvera

$$x = \frac{K_0}{1 + \frac{K_0 - x_0}{x_0} \exp \left[ -\frac{K_0 a f_0}{b} (1 - \exp(-bt)) \right]}$$

5. Déterminez la valeur maximale de la biomasse.

**Exercice 5.** On considère un modèle de récolte dans l'industrie de la pêche dans lequel le volume de la récolte est proportionnel au nombre de poissons  $N$  :

$$\frac{dN}{dt} = RN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - EN$$

où  $R$  est un taux de renouvellement,  $K$  est une capacité de charge et  $E$  est un taux d'exploitation par ans. On supposera que  $E$  n'est pas trop grand par rapport à  $R$ , soit  $E < R$ .

1. Déterminez le nouvel état d'équilibre et montrez qu'il est stable.
2. Montrez que la volume maximal  $V_{max}$  de poissons capturés par ans est obtenu pour  $E = \frac{1}{2}R$  et que  $V_{max} = \frac{1}{4}KR$ .

**Exercice 6.** Déterminez les états d'équilibre et la stabilité de ces états du modèle

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{bN}{A + N}.$$

**Exercice 7.**

- Murray 1.3
- Murray 1.4
- Murray 1.5