Département
Licence

K1BE6W14 Biomodélisation
Mathématiques TD exercices 3
Ph. Thieullen

Feuille d'exercices 3

Exercice 1. On considère un modèle d'interaction plante-herbivore donné par les équations

$$H_{t+1} = rH_t\Big(\delta - \frac{H_t}{P_t}\Big)$$
$$P_{t+1} = fP_t \exp(-aH_t)$$

où H_t désigne le nombre d'herbivores et P_t la quantité de biomasse des plantes. On suppose que le nombre d'herbivores ainsi que la quantité de biomasse sont en phase de croissance lorsque la taille de la population d'herbivores est faible.

1. Montrez que les hypothèses énoncées précédemment entrainent des relations sur $r\delta$ et f.
2. Montrez qu'on peut écrire les équations sans dimension sous la forme

$$h_{t+1} = bh_t\Big(1 + \frac{1}{b} - \frac{h_t}{p_t}\Big)$$
$$p_{t+1} = p_t \exp(k(1 - h_t))$$

   où on a posé $h_t = H_t/\bar{H}$ et $p_t = P_t/\bar{P}$ où $\bar{H}$, $\bar{P}$, b et k sont des constantes à déterminer.
3. Déterminez l'état d'équilibre et les relations que doivent vérifier b et k pour que ce point soit stable. Montrez alors que les vraies grandeurs observées doivent vérifier

$$(H_*, P_*) = \Big(\frac{k}{a}, \frac{kr}{a(r\delta - 1)}\Big), \quad 1 < f < e \quad \text{et} \quad 1 < r\delta < 1 + \frac{4}{2 - \ln f}.$$

Exercice 2. On considère un modèle d'interaction hôte-parasite. Dans ce modèle, contrairement au modèle hôte-parasitoïde, le parasite ne détruit pas son hôte mais affaiblit son taux de reproduction. De même le dévellopement du parasite est d'autant plus faible que le nombre de parasite par hôte est petit. On prend comme système d'équations

$$\begin{aligned} H_{t+1} &= \frac{\alpha H_t}{1 + \gamma P_t}, & \alpha > 1 \\ P_{t+1} &= \frac{\beta P_t}{1 + \delta P_t / H_t}, & \beta > 1 \end{aligned}$$

1. Montrer que l'état d'équilibre est donné par

$$H_* = \frac{\delta(\alpha - 1)}{\gamma(\beta - 1)} \quad \text{et} \quad P_* = \frac{\alpha - 1}{\gamma}$$

2. Montrez que la matrice jacobienne est donnée par

$$\mathrm{Jac} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\delta(\alpha-1)}{\alpha(\beta-1)} \\ \frac{(\beta-1)^2}{\beta\delta} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}.$$

3. En déduire que le système est stable pour toute valeur $\alpha > 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 3. On considère un modèle de Nicholson-Bailey dans lequel le taux de naissances de l'hôte tend vers zéro lorsque la population devient trop grande. On prend comme modèle de taux de naissance variable, un modèle de type Ricker $r(N) = \exp(r(1 - \frac{N}{K}))$. On s'intéresse dons à la stabilité du système

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= N_t \exp(r(1 - \tfrac{N_t}{K}) - aP_t) \\ P_{t+1} &= cN_t(1 - \exp(-aP_t)) \end{aligned}$$

1. Montrez qu'on peut prendre des variables sans dimension (x_t, y_t) vérifiant

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t \exp(r(1 - x_t) - y_t) \\ y_{t+1} &= \gamma x_t(1 - \exp(-y_t)) \end{aligned}$$

2. Déterminez tous les états d'équilibre et montrez que l'état d'équilibbre non trivial (x_*, y_*), lorsque $\gamma > 1$, est solution implicite de

$$y_* = r(1 - x_*), \quad \text{et} \quad \gamma x_* = \frac{y_*}{1 - \exp(-y_*)}.$$

3. Tracez sur une même figure les courbes $q = \frac{\gamma}{r}(r - y)$ et $q = y/(1 - e^{-y})$. Que représente le poit d'inersection ? Montrez alors que $\gamma^{-1} < x_* < 1$.
4. Montrez que la matrice jacobienne est donnée par

$$\begin{bmatrix} 1 - rx_* & -x_* \\ y_*/x_* & \gamma x_* - y_* \end{bmatrix}.$$

5. Montrez que la condition de stabilité se ramène à deux équations seulement

$$1 - r + \gamma x_* > r(\gamma + r)x_*^2 - (\gamma + r^2)x_* - 1,$$
$$-r(\gamma + r)x_*^2 + (\gamma + r^2)x_* < 1.$$

6. Montrez que le point $x_* = y_* = \frac{1}{2}$, $r = 1$ et $\gamma = 1/(1 - e^{-1/2})$ est stable. Montrez que le point $x_* = \frac{1}{2}$, $y_* = 1$, $r = 2$ et $\gamma = 2/(1 - e^{-1})$ est un point de bifurcation (perte de stabilité). Montrez que le point $x_* = \frac{1}{2}$, $y_* = \frac{3}{2}$, $r = 3$ et $\gamma = 3/(1 - e^{-3/2})$ est instable.