

## IV Introduction aux systèmes dynamiques sur quelques exemples

44. Notation On considère un système autonome.

$$X' = f(X)$$

où  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $C^2$ , elle est alors appelée, champ de vecteurs. On note  $\Omega = \mathbb{R} \times U$

et  $\tilde{\Omega} = \bigcup_{x_0 \in U} \{ (t, \varphi(t)) \in \mathbb{R} \times U \mid \varphi: I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est la solution maximale passant par } (0, x_0) \}$

On appelle  $\Phi^b(x)$ , la solution maximale passant par  $(b, x)$

—  $\Phi^b(x)$  est  $C^2$  par rapport à  $(t, x)$ ,  $\Phi^b(x) = \gamma \in U$ ,

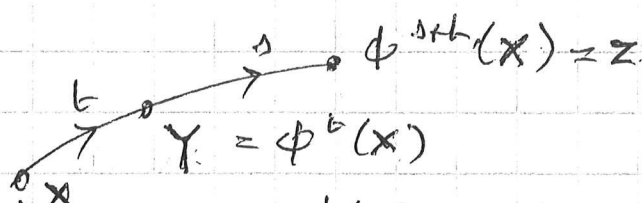
—  $\Phi^0(x) = x$

—  $\forall t \in I_x$ ,  $\Phi^t$  est un difféomorphisme local d'un voisinage ouvert de  $x_0$  sur un voisinage ouvert de  $\gamma = \Phi^t(x_0)$

—  $\Phi^{t+s}(x) = \Phi^s(\Phi^t(x))$

(tant que  $t \in I_x$  et  $s \in I_{\gamma}$ , alors  $t+s \in I_x$ )

on dit alors que  $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  est un flot local.



La solution  $t \mapsto \Phi^t(x)$  est appelée trajectoire ou orbite. On s'intéressera par la suite au comportement en temps long des trajectoires (celles qui n'admettent pas de temps d'explosion), à leur stabilité, c'est-à-dire à leur comportement vis-à-vis des petites perturbations.

45 Définition 1) On appelle point d'équilibre  $x_0 \in U$ , un point qui annule le champ de vecteurs:

$$f(x_0) = 0$$

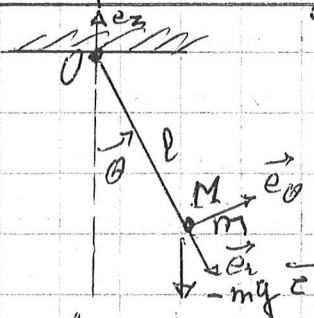
\*point stationnaire  
(point fixe)

Alors l'orbite  $\Phi^t(X_0) = X_0$  (existe en tout temps) est constante égale à  $X_0$ .

2) On dit qu'un ensemble  $E \subset U$  est invariant positivement si  $\forall X \in E, \Phi^t(X)$  existe sur  $[0, +\infty[$  et  $\Phi^t(X) \in E$ .

3) Si  $X_0 \in U$  est tel que  $\Phi^t(X_0)$  existe  $\forall t \geq 0$ , on appelle ensemble  $\omega$ -limite de  $X_0$ , l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $\Phi^t(X_0)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . (On parle aussi d'ensemble  $\alpha$ -limite)

#### 46. Exemple d'un système conservatif.



$$m\vec{y} = \vec{F} = -mg\vec{e}_z$$

$$\vec{OH} = l\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{OH} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{y} = \frac{d}{dt}\vec{v} = l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

$$\vec{F} = mg\cos\theta\vec{e}_r - mg\sin\theta\vec{e}_\theta$$

Les équations projetées sur l'axe  $\vec{e}_\theta$  donnent

$$l\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad V(\theta) = -\frac{gl}{2}\cos\theta$$

C'est une équation différentielle non linéaire admettant comme intégrale première (une fonction de  $\theta, \dot{\theta}$  constante le long des trajectoires)

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}l\dot{\theta}^2 + V(\theta)$$

En effet si  $t \mapsto \theta(t)$  est une solution

$$\frac{d}{dt}E(\theta, \dot{\theta}) = \dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\nabla V(\theta) = 0$$

Ici le hamiltonien doit être vu dans le plan  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$  appelé espace des phases. Par rapport aux notations générales:

$$\leftarrow \begin{matrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{matrix} \quad X' = f(X) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\nabla V(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\partial E/\partial\theta \\ -\partial E/\partial\dot{\theta} \end{bmatrix} \quad *$$

c'est une convention de noter en mécanique les variables indépendantes  $(\theta, \dot{\theta})$ . Si une solution admettait un temps d'explosion, par exemple, en  $]a, b[$ ,  $b < +\infty$ , la solution sortirait de tout compact lorsque  $t \rightarrow b^-$ . Mais

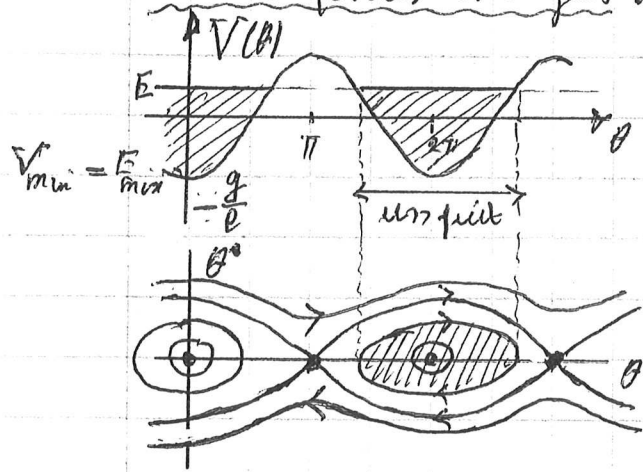
(\* on parle de système hamiltonien)

Les points  $\theta = k\pi, \dot{\theta} = 0$  vérifient

(const)  $E = E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + V(\theta) \geq \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + V_{\min}$   
 En particulier  $|\dot{\theta}| \leq \sqrt{2(E - V_{\min})}$  est bornée. Sur tout intervalle de temps  $]b - \varepsilon, b[$ , par le théorème des accroissements finis,  $|\theta|$  est aussi borné

$|\theta(t) - \theta(b_0)| \leq \varepsilon \sqrt{2(E - V_{\min})}$  |t - b\_0|  
 ce qui contredirait le fait que  $(\theta, \dot{\theta})$  sort de tout compact. Les solutions sont de finies en tout temps et de plus  $C^\infty$  (le champ de vecteur est  $C^\infty$ ).

Cas des petites énergies:  $V_{\min} \leq E < V_{\max}$

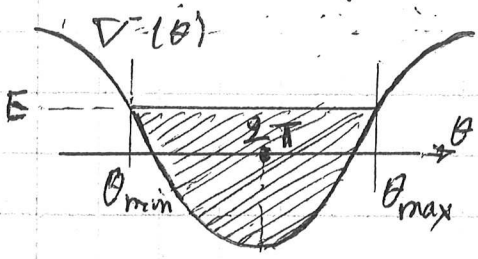


les trajectoires doivent vérifier  $V(\theta) \leq E$

Elles sont ici piégées dans des puits qui se répètent périodiquement.

Si  $E = E_{\min} = V_{\min}$ ,  $\dot{\theta} = 0$ , la trajectoire est figée au points d'équilibre:  $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Si  $E > E_{\min}$ , le champ de vecteur  $f(\theta, \dot{\theta}) = (\dot{\theta}, -V'(\theta))$  ne s'annule jamais.



On note  $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$  les extrémités du puits. On considère la condition initiale  $(\theta_{\min}, 0) = (\theta, \dot{\theta})$ . Le champ de vecteur donne

$$f(\theta_{\min}, 0) = (0, -V'(\theta_{\min}))$$

avec  $-V'(\theta_{\min}) > 0$ :  $\dot{\theta}(0) = -V'(\theta_{\min}) > 0$ ;  $\theta(t)$  une fonction croissante, en particulier  $\dot{\theta} > 0$  sur  $]0, \varepsilon[$ .  
 On cherche à montrer qu'il existe  $T > 0$  tel que  $\dot{\theta}(T) = 0$ .  
 Sinon  $\dot{\theta} > 0$  sur  $]0, +\infty[$ ,  $\theta$  est une fonction croissante de limite  $\theta_{\max}$  (sinon  $\inf \dot{\theta} > 0$  et on aurait une contradiction). Pour  $t$  suffisamment grand  $\theta(t) \sim \theta_{\max}$   
 $\dot{\theta}(t) \sim -V'(\theta_{\max}) < 0$ ,  $\dot{\theta}$  décroît avec une vitesse qui contredit  $\dot{\theta} > 0$  sur  $]0, +\infty[$ .

En conclusion, on vient de montrer l'existence d'un temps  $T/2 > 0$  tel que  $\theta(0) = \theta_{\min}$  et  $\theta(T/2) = \theta_{\max}$ . Par symétrie on constate que si  $t \mapsto (\theta, \dot{\theta})$  est solution alors la symétrique par rapport à  $(2\pi, 0)$ , soit  $(4\pi - \theta, -\dot{\theta})$ , est aussi solution. Ce qui montre que, si initialement le système est à  $(\theta, \dot{\theta})_0 = (\theta_{\max}, 0)$ , alors au bout d'un temps  $T/2$   $(\theta, \dot{\theta})_{T/2} = (\theta_{\min}, 0)$ ; on vient de montrer que ces orbites sont périodiques de périodes  $T$ . On peut donner une formule de  $T/2$ . Sur  $[0, T/2]$ ,  $\dot{\theta} \geq 0$  et

$$\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{2(E - V(\theta))}} = 1 \Rightarrow \frac{T}{2} = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(E - V(\theta))}}$$

(L'intégrale est bien convergente aux extrémités car en  $\theta_{\min}$   $E - V(\theta) = V(\theta_{\min}) - V(\theta) \sim (\theta_{\min} - \theta)V'(\theta_{\min})$  et  $V'(\theta_{\min}), V'(\theta_{\max})$  sont non nulles,

cas des grandes énergies  $E > V_{\max}$ , alors  $\dot{\theta}$  ne s'annule jamais: si  $\theta_0 > 0$  alors  $\dot{\theta} = \sqrt{2(E - V(\theta))} \geq \sqrt{2(E - V_{\max})} > 0$ .

$\theta(t)$  est une fonction croissante:  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \theta(t) = \pm\infty$ ; on peut supposer  $\theta(0) = 0$ ; il existe  $T > 0$  tel que  $\theta(T) = 2\pi$ ;  $\theta(t+T) = 2\pi + \theta(t)$ .

cas de l'énergie critique  $E = V_{\max}$ . Les points fixes

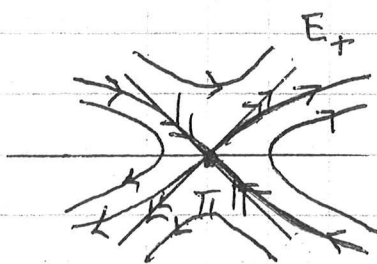
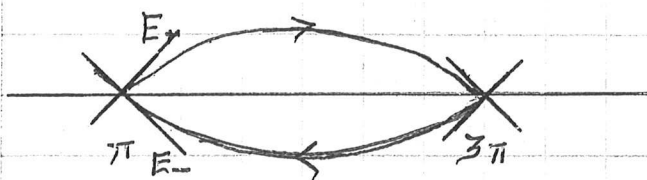
$((2k+1)\pi, 0) = (\theta, \dot{\theta})$  sont d'énergie  $E$ . Nous allons

montrer qu'il existe aussi des trajectoires d'énergie  $E$  reliant deux points fixes consécutifs; on choisit  $\pi, 3\pi$ . Ces orbites sont dites

hétéroclines.

On commence par linéariser au voisinage de  $(\pi, 0)$

si initialement  $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$  est proche de  $(\pi, 0)$



point selle

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta - \pi \\ \dot{\theta} - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} - 0 \\ -V'(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} - 0 \\ -V''(\pi)(\theta - \pi) \end{bmatrix} + o(\theta - \pi)$$

d'où l'équation linéarisée en  $(\delta\theta, \delta\dot{\theta})$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -V''(\pi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

ici  $-V''(\pi) > 0$  (car  $V$  est maximum en  $\pi$ ) ; il y a deux v.p.  $\pm \sqrt{-V''(\pi)}$  et les droites propres  $E_{\pm}$  ont pour pente  $\pm \sqrt{-V''(\pi)}$ . Localement les trajectoires ressemblent à celles d'un point selle. Si on choisit comme condition initiale  $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$  vérifiant

$$\pi < \theta_0 < 3\pi, \quad \dot{\theta}_0 = \sqrt{2(V_{\max} - V(\theta_0))}$$

Alors, comme  $\dot{\theta}$  ne change pas de signe,  $\dot{\theta}(t) > 0$  pour tout  $t$ . La solution  $t \mapsto \theta(t)$  est croissante et si la borne supérieure de  $\theta(t)$  n'était pas  $3\pi$ ,  $\inf_{t > t_0} \dot{\theta}(t) > 0$  et  $\theta$  aurait une vitesse positive minorée, d'où une contradiction avec  $\theta < 3\pi$ . On vient donc de montrer

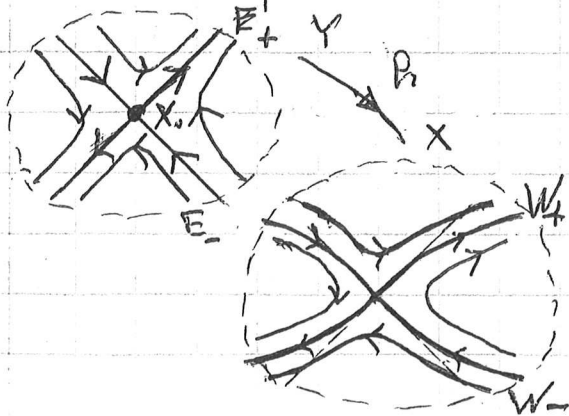
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 3\pi, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t) = \pi$$

On peut développer au voisinage de  $t = -\infty$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \sqrt{-V''(\pi)} (\theta - \pi)^2 (1 + \epsilon(t)) & \epsilon(t) &\rightarrow 0 \\ &= \sqrt{-V''(\pi)} (\theta - \pi) (1 + \epsilon(t)) \end{aligned}$$

et la solution est bien tangente à  $E_+$ .

Variétés stables et instables. On vient de voir, qu'au point selle  $X_0 = (\pi, 0) = (\theta_0, \dot{\theta}_0)$ , le système linéarisé est décrit par deux directions  $E_{\pm}$ , l'une dilatante



invariante et l'autre contractante invariante. Plus précisément on a :

$$\begin{cases} \forall t > 0 & \Phi^t(E_-) \subset E_- \\ \forall x \in E_- & \Phi^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} X_0 \\ \forall t < 0 & \Phi^t(E_+) \subset E_+ \\ \forall x \in E_+ & \Phi^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} X_0 \end{cases}$$



Les calculs précédents montrent en fait que cette description est aussi vraie localement autour de  $X_0$  pour le système non linéarisé:

On peut trouver deux graphes  $\dot{\theta} = W_{\pm}(\theta)$ ,

$$W_+(\theta) = \begin{cases} \sqrt{2(V_{max} - V(\theta))} & \text{pour } \theta > \pi \\ -\sqrt{2(V_{max} - V(\theta))} & \text{pour } \theta < \pi \end{cases}$$

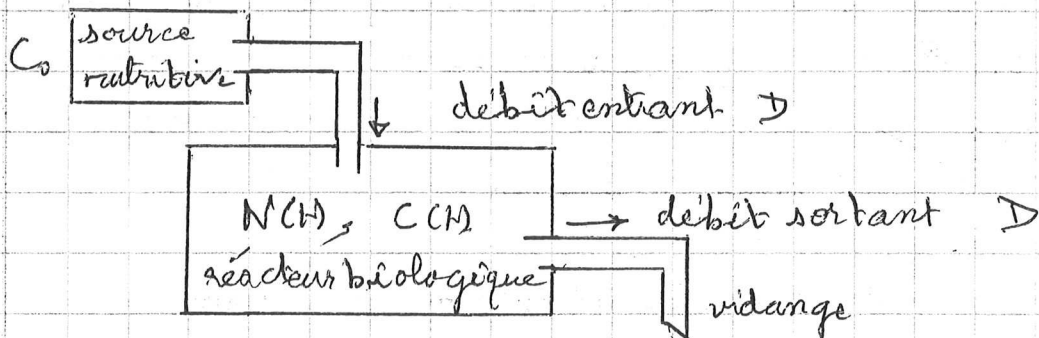
$$W_-(\theta) = \begin{cases} -\sqrt{2(V_{max} - V(\theta))} & \text{pour } \theta > \pi \\ \sqrt{2(V_{max} - V(\theta))} & \text{pour } \theta < \pi \end{cases}$$

Ces graphes\* sont  $C^\infty$  et vérifient comme pour  $E_{\pm}$

$$\begin{cases} \forall t > 0 \quad \Phi^t(W_-) \subset W_- & \forall t < 0 \quad \Phi^t(W_+) \subset W_+ \\ \forall x \in W_-, \quad \Phi^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} X_0 & \forall x \in W_+, \quad \Phi^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} X_0 \end{cases}$$

\* On les appelle les variétés  
invariantes  $W_{\pm}$  et instable  $W_{\pm}$   
du point d'équilibre  $X_0$

#### 47 Exemple de systèmes biologiques: cas dissipatif.



On considère une culture bactérienne en croissance exponentielle hors équilibre:

$N(t)$  = nb de bactéries dans le réacteur à l'instant  $t$

$C(t)$  = concentration de solution nutritive (cous et cereelle de bétail) dans le réacteur

$D$  = débit constant de solution entrant et sortant

$C_0$  = concentration en aliment riche et constante.

On modélise la croissance bactérienne de la manière suivante:

$$\frac{dN}{dt} \sim \frac{N(b + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \quad \text{dépend de 2 termes}$$

$$= +k(C)N \quad \text{Le taux de division cellulaire}$$

est fonction de la richesse en nutriment du milieu.

~~—~~  $- ND$  Pendant un instant  $\Delta t$ , les bactéries se trouvent dans un tranché d'épaisseur proportionnelle à  $\Delta t$  et leur nombre est proportionnel à  $N \Delta t$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{c(H + \Delta t) - c(t)}{\Delta t} \text{ dépend de termes}$$

~~—~~  $- cD$  Les éléments nutritifs disparaissent au

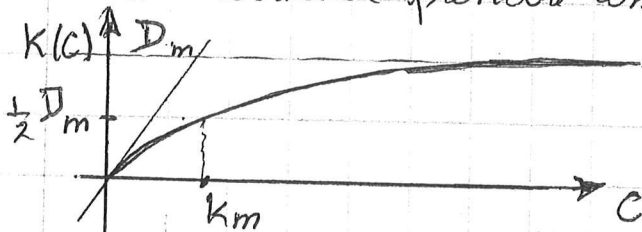
~~—~~  $- \alpha K(c)N$  chaque cellule nouvellement créée consomme une quantité constante d'éléments nutritifs.

~~—~~  $+ C_0 D$  Un flux constant d'élément nutritif arrive continuellement.

Les équations sont donc :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = K(c)N - ND \\ \frac{dc}{dt} = -\alpha K(c)N + C_0 D - cD \end{cases}$$

Il est usuel de prendre comme taux de croissance



$$K(c) = D_m \frac{c}{K_m + c}$$

On introduit des variables sans dimension :

$$\tau = t D$$

$$c = c / K_m \quad \gamma = C_0 / K_m D$$

$$n = N \cdot (\alpha D_m / K_m D)$$

$$\beta = \frac{D_m}{D}$$

D'où un système

$$\begin{cases} \frac{dn}{d\tau} = \beta \frac{c}{1+c} n - n \\ \frac{dc}{d\tau} = -\frac{c}{1+c} n + c + \gamma \end{cases}$$

avec  $\beta$  et  $\gamma$  deux constantes  $> 0$  (il ne reste plus que 2 constantes).

Les points d'équilibre sont obtenus pour

$$\frac{dn}{d\tau} = 0 \quad \frac{dc}{d\tau} = 0$$

ou bien  $(n, c) = (0, \gamma)$

ou bien  $\frac{\beta c}{1+c} = 1$   

$$\begin{cases} \frac{\beta c}{1+c} = 1 \\ -\frac{n}{\beta} - c + \gamma = 0 \end{cases}$$

qui admet une solution si  $\beta \neq 1$

$c = \frac{1}{\beta-1}$      $n = \beta \left( \gamma - \frac{1}{\beta-1} \right)$   
 Il faudra conserver à l'esprit que les inconnues  $n(t)$  et  $c(t)$  sont des quantités positives. Ici

$$X = \begin{bmatrix} n \\ c \end{bmatrix} \quad \frac{dX}{dt} = f(X) = \begin{bmatrix} \frac{\beta c n}{1+c} - n \\ -\frac{c n}{1+c} - c + \gamma \end{bmatrix}$$

On s'intéresse aux trajectoires proches de l'équilibre  $X_*$ , on note  $Y = X - X_*$ , en développant  $f$  à l'ordre 1 on obtient

$\frac{dY}{dt} = f(X) = f(X_*) + f'(X_*) Y + \text{terme ordre sup}$   
 d'où l'équation dite linéarisée

$$\frac{dY}{dt} = AY \quad A = f'(X_*) = \text{matrice jacobienne}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial n} & \frac{\partial f_1}{\partial c} \\ \frac{\partial f_2}{\partial n} & \frac{\partial f_2}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta c}{1+c} - 1 & \frac{\beta n}{(1+c)^2} \\ -\frac{c}{1+c} & \frac{-n}{(1+c)^2} - 1 \end{bmatrix}$$

Pour la discussion de la stabilité, on suppose que les deux points d'équilibre sont dans le quart d'espace  $n \geq 0, c \geq 0$ , ou bien  $\beta > 1$  et  $\gamma(\beta-1) > 1$ . Pour  $X_0^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\beta \gamma}{1+\gamma} - 1 & 0 \\ -\frac{\gamma}{1+\gamma} & -1 \end{bmatrix} \quad \det(A) = -\left[ \frac{\beta \gamma}{1+\gamma} - 1 \right] < 0$$

Les 2 v.p. de  $A$  sont de signes contraires, on est en présence d'un point selle. Pour  $X^* = \begin{bmatrix} 1/\beta - 1 \\ \beta(\gamma - 1/\beta - 1) \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & (\beta-1)(\gamma(\beta-1)-1) \\ -\frac{1}{\beta} & -\frac{\beta-1}{\beta}(\gamma(\beta-1)-1)-1 \end{bmatrix} \quad \det A > 0 \text{ et } \text{trace}(A) < 0$$

les 2 v.p. sont de même signe strictement négatif : on est en présence d'un nœud stable.

Pour dessiner l'allure des trajectoires, on commence par tracer les deux nulclines :

- La  $n$ -nulcline = lieu des points où  $\frac{dn}{dt} = 0$
- La  $c$ -nulcline = lieu des points où  $\frac{dc}{dt} = 0$ .

Puis par tracer sur chaque nulcline le sens du champ de vecteur (c'est-à-dire la direction de l'autre composante)



Pour la  $n$ -nulcline :

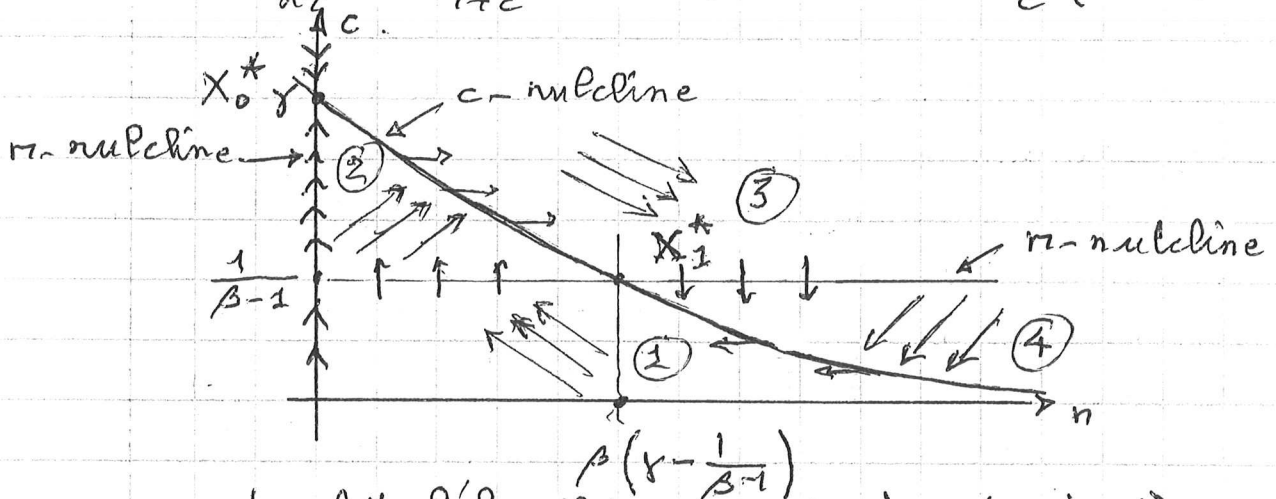
soit bien  $n=0$  soit bien  $c = \frac{1}{\beta-1} < \gamma$ .

(on a bien  $\frac{dc}{dn} = \frac{-n}{\beta} - \frac{1}{\beta-1} + \gamma > 0 \iff n < \beta(\gamma - \frac{1}{\beta-1})$ )

Pour la  $c$ -nulcline :

$$-\frac{cn}{1+c} - c + \gamma = 0 \iff n = \frac{(\gamma-c)(1+c)}{c}$$

$$\frac{dn}{dc} = \frac{\beta cn}{1+c} - n = \beta(\gamma-c) - n = \frac{c}{\beta-1} (c(\beta-1) - 1)$$



On fait l'hypothèse  $\beta > 1$  et  $\gamma(\beta-1) > 1$

L'observation importante est, par exemple, que  $\frac{dn}{dt}$  ne change pas de signe dans chaque domaine connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{n\text{-nulcline}\}$ . Dans le plan  $\{n > 0, c > 0\}$ , les 2 nulclines définissent 4 régions où la direction du champ de vecteur est dans l'un des 4 quadrants (la longueur des flèches dessinées sont là à titre indicatif).

On verra plus tard que,  $X_1^*$  étant stable (les deux v.p. sont strictement négative), toute trajectoire initialement proche de  $X_1^*$  converge vers  $X_1^*$ . On cherche à comprendre la stabilité globale du système. Ici on peut résoudre explicitement cette question.

On cherche les 2 sous-espaces propres de  $X_0^*$

$$A \begin{bmatrix} \delta n \\ \delta c \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\gamma & -1 \\ 1+\gamma & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \delta n \\ \delta c \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \beta\gamma & -1 & 0 \\ 1+\gamma & -1 & \end{bmatrix}$$

alors

$$-\frac{\gamma}{1+\gamma} \delta n - \delta c = \left(\frac{\beta\gamma}{1+\gamma} - 1\right) \delta c \iff \delta n + \beta \delta c = 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} \delta n \\ \delta c \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les 2 variétés stables et instables au point  $X_0^*$  sont en fait (et c'est rare) les 2 droites propres du linéarisé :

- pour la v.p.  $-1$   $n=0$  est invariante
- pour la v.p.  $\frac{\beta\gamma}{1+\gamma} - 1$ , on va montrer que la droite de direction  $\begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \end{bmatrix}$  et passant par  $\begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix}$  est invariante. Son équation est donnée par

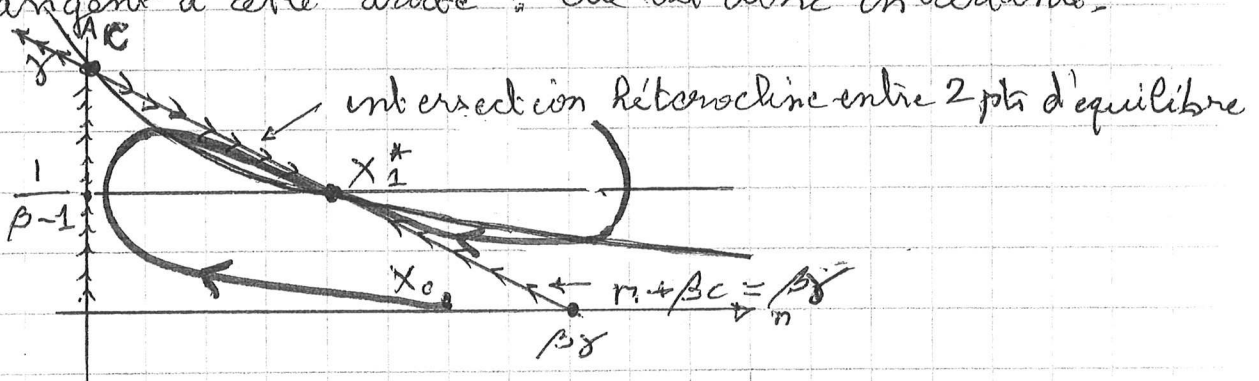
$$0 = \det \begin{bmatrix} n-0 & -\beta \\ c-\gamma & 1 \end{bmatrix} = n + \beta(c-\gamma)$$

De plus si  $(n, c)$  est sur cette droite, en représentant

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = \frac{\beta c n}{1+c} - n \\ \frac{dc}{dt} = -\frac{cn}{1+c} - c + \gamma \end{cases}$$

on obtient  $\frac{dn}{dt} + \beta \frac{dc}{dt} = -n - \beta c + \beta \gamma = 0$

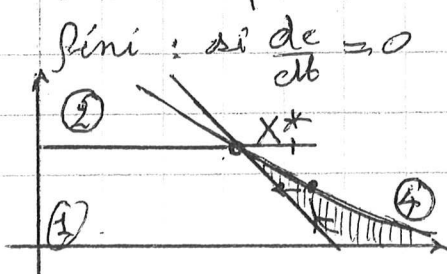
En tout point de la droite précédente, le champ de vecteurs est tangent à cette droite : elle est donc invariante.



On fait maintenant l'observation que 2 trajectoires ne peuvent se couper. On va montrer que toute trajectoire initialement en  $X_0 (n_0 > 0, c_0 > 0)$  converge vers  $X_1^*$  et est définie en tout temps

- Si  $X_0$  appartient au quadrant ① :  $\frac{dn}{dt} < 0, \frac{dc}{dt} > 0$ . Ou bien il ne sort pas de ce quadrant,  $n(t)$  et  $c(t)$  sont monoton bornées, existent en tout temps et le point limite  $(n_\infty, c_\infty)$  est nécessairement d'équilibre, c'est-à-dire  $X_1^*$ . Ou bien l'orbit sort du quadrant ① et doit rencontrer une nulcline\* en temps fini :

\*préciser  
du pt  
d'équilibre

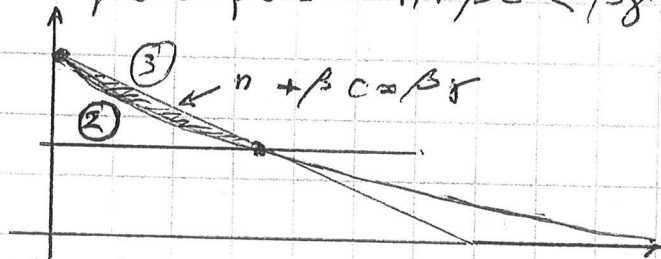


si  $\frac{dc}{dt} = 0$  on a une contradiction car  $\frac{dn}{dt} < 0$  et quelques instants avant l'intersection l'orbit serait dans ④. Nécessairement : l'orbit sort de ① pour aller dans

②.

$\square X_0$  appartient au quadrant (2) :  $\frac{dn}{dt} > 0$ ,  $\frac{dc}{dt} > 0$  ou bien l'orbite ne sort jamais du quadrant (2),  $n(t)$  et  $c(t)$  sont croissante bornée, le point limite  $X_\infty = (n_\infty, c_\infty)$  est stationnaire. On verra qu'un point selle est instable donc nécessairement  $X_\infty = X_1^*$ , ou bien l'orbite s'ort de (2) nécessairement par le quadrant (3).

$\square X_0$  appartient au quadrant (3) :  $\frac{dn}{dt} > 0$  et  $\frac{dc}{dt} < 0$  et vérifié de plus  $n + \beta c < \beta \gamma$ , si l'orbite sort de (3)



elle ne peut le faire que par (2) mais au point d'intersection de la c nul line  $\frac{dn}{dt} > 0$  et c'est impossible.

L'orbite est donc piégée dans le domaine hachuré,  $X(t) \rightarrow X_1^*$  et est définie en tout temps.