Département Licence

Systèmes Dynamiques
K1MA6021 9 mai 2012
Durée : 3h00 Ph. Thieullen

# Examen : première session

*Les exercices sont indépendants.*

**Question de cours.**

1. On se donne un système linéaire $X' = A(t)X + B(t)$, $X \in \mathbb{R}^n$, où les fonctions $A(t), B(t)$ sont seulement supposées continues sur un intervalle $I$. Répondre par oui ou par non : la solution est-elle définie sur $I$ tout entier ?
2. Enoncez sans démonstration un des lemmes de Gronwall que vous avez vus en cours ou en travaux dirigés.
3. Donnez la définition d'un point d'équilibre asymptotiquement stable.
4. Dessinez à la main le diagramme de phase d'un système linéaire en dimension 2, $X' = AX$, dans le plan des paramètres $(\mathrm{trace}(A), \det(A))$. On fera bien apparaître les différents cas d'équilibre (selle, nœud, foyer, centre) et la forme locale des trajectoires dans chacun des cas.
5. Donnez la définition des cycles limites et enoncez le théorème de Poincaré-Bendixon.

**Exercice 1.** On considère un problème de croissance de certains organismes décrits par l'équation différentielle

$$\frac{dN}{dt} = rN\Big(1 - \Big(\frac{N-K}{L}\Big)^2\Big)$$

où $N$ représente le nombre d'organismes.

1. On fait le changement de variable en temps et en nombre d'organismes, $\tau = rt$, $x(\tau) = N(t)/L$ et on pose $a = K/L$. Montrer alors que le système devient
$$\frac{dx}{d\tau} = x(1-(x-a)^2) =: f(x).$$
2. Déterminez les point d'équilibre du système. Puis tracez à la main les 3 graphes $\dot{x} = f(x)$, dans le plan $(x, \dot{x})$ correspondants aux différents cas
$$a > 1, \quad a = 1, \quad \text{et} \quad 0 < a < 1.$$
(On observera que l'on demande de tracer le graphe d'un polynôme de degré 3 dont on connait ses racines).

3. On suppose $a > 1$ et on considère une donnée initale vérifiant $x_0 \geq 0$. Montrez que la solution est définie en tout temps positif, que $x(\tau)$ est monotone par rapport à $\tau$, puis déterminez la limite de $x(\tau)$ lorsque $\tau \to +\infty$.

   (Indication : on discutera suivant la place de $x_0$ par rapport à $(0, a-1, a+1)$ s'il peut exister un temps d'explosion fini. Il sera tenu compte du soin apporté au raisonnement).

4. On suppose que $a = x_0 = 2$. Montrez que la solution de l'équation différentielle vérifiant $x(0) = x_0$ satisfait

$$\left(\frac{2}{x(\tau)}\right)^{1/3} \big(x(\tau) - 1\big)^{1/2} \left(\frac{1}{3 - x(\tau)}\right)^{1/6} = e^{\tau}, \quad \forall\, \tau \geq 0.$$

   On commencera par déterminer des constantes $A, B, C$ vérifiant

$$\frac{1}{x(x-1)(3-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{3-x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

   En déduire que $(3 - x(\tau)) \sim be^{-6\tau}$ lorsque $\tau \to +\infty$ pour une constante $b$ à déterminer.

**Exercice 2.** On considère un modèle proie-prédateur

$$\frac{dh}{dt} = \beta h \left(\frac{p}{1+p} - \alpha h\right)$$
$$\frac{dp}{dt} = p\left((\gamma - p) - \frac{h}{1+p}\right).$$

dans lequel $(h, p)$ modélisent des quantités sans dimension associées aux nombres d'herbivores et de planctons. On supposera que les constantes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont strictement positives et on ne s'intéressera qu'aux conditions initiales $h_0 \geq 0$ et $p_0 \geq 0$. Pour simplifier, on fera l'hypothèse $0 < \gamma < 8$.

1. Question préliminaire. On pose $f_{\alpha,\gamma}(p) = p + \alpha(p - \gamma)(1 + p)^2$.
   (a) Montrez que $f_{\alpha,\gamma}(p)$ admet au moins une racine dans $]0, \gamma[$ et aucune racine dans $]-\infty, 0]$ et $[\gamma, +\infty[$.
   (b) Montrez qu'on ne peut pas trouver de valeur de $p \in ]0, \gamma[$ vérifiant à la fois $f_{\alpha,\gamma}(p) = 0$ et $f'_{\alpha,\gamma}(p) = 0$.
   (c) Montrez qu'il n'existe en fait qu'une seule racine $p_*$ dans $]0, \gamma[$. On raisonnera par l'absurde : s'il existait 2 racines $0 < p_1 < p_2 < \gamma$, en étudiant le sens de variation de $f_{\alpha,\gamma}(p_i)$ par rapport à $\alpha$, montrez qu'on se ramènerait à la question (b) pour une valeur de $p \in ]p_1, p_2[$ et pour une autre valeur de $\alpha$.
2. Montrer qu'il existe exactement 3 points d'équilibre. (On notera par $(h_*, p_*)$ le point d'équilibre à coordonnées strictement positives qu'on ne calculera pas explicitement).
3. Tracer un diagramme dans le plan $(h, p)$, $h > 0$ et $p > 0$ contenant :

(a) les 3 points d'équilibre,

(b) les h-nulclines et p-nulclines,

(c) la direction du champ de vecteur sur les nulclines et à l'intérieur des 4 quadrants délimités par ces nulclines. Lesquelles de ces nulclines sont aussi des trajectoires ?

4. Déterminez la matrice jacobienne de linéarisation aux 3 points d'équilibre. Déterminez le type de point (nœud, selle, foyer, ...) pour les deux points d'équilibre se situant sur l'axe des $p$. On montrera aussi qu'au point $(h_*, p_*)$, la matrice jacobienne est égale à

$$\text{Jac} = \left(\frac{p_*}{1+p_*}\right)\begin{bmatrix} -\beta & \beta\dfrac{\gamma - p_*}{p_*} \\ -1 & \gamma - 1 - 2p_* \end{bmatrix}.$$

5. On suppose $0 < \gamma \leq 1$. Montrez que le point d'équilibre $(h_*, p_*)$ est asymptotiquement stable.

6. On note R le rectangle $R = \{(h,p) \ : \ 0 < h < 1/\alpha, \ 0 < p < \gamma+1\}$. Montrez que toute trajectoire de conditions initiales $(h_0, p_0) \in R$ est définie en tout temps positif et ne sort jamais de $\bar{R}$.

7. On suppose $1 < \gamma < 8$ et on note $\alpha_* = 4(\gamma-1)/(\gamma+1)^3$.

   (a) Montrer que pour $\alpha = \alpha_*$, $p_* = (\gamma-1)/2$ et pour $\alpha < \alpha_*$, $p_* < (\gamma-1)/2$.

   (b) Tracer à nouveau le diagramme des nulclines pour $\alpha = \alpha_*$.

   (c) Montrer que pour $\alpha < \alpha_*$ et $\beta$ suffisamment petit (dépendant de $\alpha$), le point d'équilibre $(h_*, p_*)$ a ses 2 valeurs propres strictement positives et que le système possède alors un cycle limite.

8. Que se passe-t-il si $\gamma > 8$ ?

**Barème indicatif sur 200 :** Question=60 - Exo1=60 - Exo2=80