Théorème de la limite centrale

Exercice 1. *Une entreprise comprend 900 employés. Elle dispose d'une cantine de 500 places qui assure deux services. On suppose que chaque employé choisit indifféremment l'un ou l'autre service. On désigne par X la v.a. qui associe à un jour donné, le nombre de personnes choisissant le premier service.*

(1) Déterminer la loi de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

(2) En approchant X par une loi normale, déterminer la probabilité pour qu'un jour donné on refuse des clients à la cantine.

Exercice 2. *On admet que 15% des réservations d'un train à réservation obligatoire sont annulées dans l'heure précédant un départ sans pour autant être remises à la vente.*

(1) Sur 1000 réservations effectuées au moins une heure à l'avance, déterminer la probabilité que plus de 160 d'entre elles soient annulées à la dernière minute.

(2) Un train contient exactement 1600 places assises et la SNCF décide d'accepter plus de réservations que de places assises sachant que certaines de ces places seront libérées à la dernière minute. Quelle est le nombre maximum de réservations que la SNCF va accepter pour que la probabilité d'être en sur-réservation (nombre de passagers dans le train supérieur au nombre de places assises), après annulation de dernière minute, soit inférieure à 1% ?

Exercice 3. *La durée de vie d'un chauffage électrique est une variable aléatoire T de densité :*

$$\begin{cases} f(t) = 0, & \textit{si } t < 0 \\ f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}, & \textit{si } t \geq 0 \end{cases}$$

où λ est un réel positif. L'unité de la durée est l'heure.

1. *On prend $\lambda = 2.10^{-4}\ h^{-1}$. Déterminer $\mathbb{P}(T < 500)$ et $\mathbb{P}(T > 10000)$.*
2. *On prend toujours $\lambda = 2.10^{-4}\ h^{-1}$. Déterminer la probabilité de trouver dans un lot de 600 appareils choisis indépendamment, plus de 6 appareils ayant une durée de vie inférieure à 500 h, plus de 220 appareils ayant une durée de vie supérieure à 10 000 h.*
3. *On mélange 10 appareils de fabrication caractérisée par $\lambda = a$ et 5 appareils de fabrication caractérisée par $\lambda = b$. On choisit au hasard un appareil de ce mélange. On appelle X sa durée de vie. Déterminer la densité de X. Déterminer son espérance et sa variance.*

Exercice 4. *On suppose qu'une ampoule électrique est défectueuse avec probabilité 0.2. En utilisant une approximation par la loi normale, calculer la probabilité que 20 ampoules au moins soient défectueuses sur un lot de 160.*

Exercice 5. *Une tréfilerie fabrique des câbles métalliques conçus pour résister à de lourdes charges. Leur résistance à la rupture est en moyenne égale à 3 tonnes, avec un écart-type égal à 200 kg. Un contrôle de qualité de la fabrication est effectué sur un échantillon de $n = 100$ câbles.*

(1) *Calculer la probabilité que la résistance moyenne des câbles de l'échantillon soit comprise entre* 2.98 *tonnes et* 3.02 *tonnes.*
(2) *On estime que la taille n de l'échantillon ne garantit pas une probabilité suffisante. Déterminer la taille minimale pour que le calcul (1) soit sûr à* 90%.

Exercice 6. *Deux modèles d'ampoules électriques qualitativement différentes sont produits par une même entreprise. Les ampoules de type A ont une durée de vie moyenne de 1200 h avec un écart-type de 200 h, les ampoules de type B ont une durée de vie moyenne de 1000 h avce un écart-type de 100 h. On prélève au hasard un échantillon de 100 ampoules de type A et 150 ampoules de type B.*

Quelle est la probabilité que la durée moyenne de vie observée sur l'échantillon des ampoules de type A soit supérieure de 160 h à celle constatée sur l'échantillon des ampoules de type B ?

Exercice 7. *Une entreprise fabrique des cigarettes. Le fabriquant garantit que leur masse suit la loi $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ où $\mu_0 = 1.2$ gr et $\sigma_0 = 0.063$ gr. Il se peut que, par suite d'un déréglement de la machine qui les fabrique, la masse des cigarettes suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$. On prélève au hasard 30 cigarettes, leur masse moyenne est de* 1.25 *gr.*

(1) *On pose $\delta = 0.02$ gr. Calculer la probabilité que la moyenne des masses des cigarettes de l'échantillon soit comprise entre $1.2 - \delta$ gr et $1.2 + \delta$ gr dans le cas où la machine est bien réglée.*
(2) *Trouver l'intervalle centré $[1.2 - \delta, 1.2 + \delta]$ pour que la probabilité calculée en (1) soit égale à* 98%.
(3) *A* 2% *près d'erreur, l'échantillon précédent montre-il que la machine est bien réglée ?*