Indépendance et probabilités conditionnelles

Exercice 1.

(1) *Est-ce que l'assertion suivante est vrai : si A et B sont disjoints, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$?*

(2) *Soient les événements : $H_1 =$ « gagner le gros lot », $H_2 = \bar{H}_1$ et $B =$ « passer un mois de vacances à Hawai ». On suppose que*

$$\mathbb{P}(H_1) = 0.000001, \quad \mathbb{P}(B|H_1) = 0.99 \quad et \quad \mathbb{P}(B|H_2) = 0.0001.$$

Calculer la probabilité de B.

Exercice 2. *On cherche à prévoir le taux d'abstention d'une élection régionale. On admet qu'on peut regrouper la population en 4 groupes relativement homogènes, notés A, B, C, D, suivant une proportion respective de* 25%, 14%, 39%, 22%. *On connait par ailleurs pour chacun des groupes, la probabilité qu'un électeur ne se rende pas aux urnes : soit respectivement pour A, B, C, D,* 47%, 29%, 18%, 5%.

Calculer la probabilité qu'un électeur pris au hasard ne se rende pas aux urnes.

Exercice 3. *On dispose de deux urnes U_1 et U_2. Dans U_1, il y a 3 boules rouges et 5 boules blanches. Dans U_2, il y a 5 boules rouges et 6 boules blanches. Toutes les boules sont indiscernables en dehors de la couleur.*

On considère l'épreuve aléatoire suivante : on tire au hasard une boule de U_1 pour la remettre dans U_2 ; on tire ensuite une boule de U_2 pour la remettre dans U_1. Soient R_1, l'événement "on a tiré une boule rouge de U_1" et R_2, l'événement "on a tiré une boule rouge de U_2".

(a) *Calculer $\mathbb{P}(R_1)$.*

(b) *Calculer la probabilité d'avoir tiré deux boules rouges consécutives. Que peut-on dire de la composition finale des deux urnes ?*

(c) *Calculer $\mathbb{P}(R_2)$.*

(d) *Calculer la probabilité qu'à la fin de l'épreuve, la composition de l'urne U_1 n'ait pas changé.*

Exercice 4. *Une usine fabrique des ampoules électriques à l'aide de trois machines, A, B et C. La machine A assure* 20% *de la production et* 5% *des ampoules fabriquées par A sont défectueuses. La machine B assure* 30% *de la production et* 4% *des ampoules fabriquées par B sont défectueuses. La machine C assure* 50% *de la production et* 1% *des ampoules fabriquées par C sont défectueuses.*

- *On choisit au hasard une ampoule. Calculer la probabilité que l'ampoule soit défectueuse et produite par A. Même question avec B et C.*
- *On choisit au hasard une ampoule et on ne s'intéresse qu'aux ampoules défectueuses. Quelle est la probabilté que l'ampoule provienne de A. Même question avec B, avec C.*

Exercice 5. *Une secrétaire vient d'égarer une lettre. Elle peut se trouver avec probabilité $1 - p$ sur son bureau cachée sous une pile de dossiers ; elle peut aussi se trouver avec probabilité $p/4$ dans un de ces 4 tiroirs qu'on supposera numérotés de 1 à 4. Après avoir ouvert les 3 premiers tiroirs, la secrétaire constate que la lettre ne s'y touve pas. Quelle est la probabilité qu'elle se trouve dans le quatrième tiroir.*

Exercice 6. *On considère trois urnes, U_1, U_2 et U_3 contenant respectivement, 2 boules noires, 2 boules blanches et dans la dernière, une blanche et une noire. On choisit au hasard une urne et on tire une boule de cette urne. On demande de calculer la probabilité d'avoir choisi la première urne dans les deux cas :*

(1) on sait que l'urne contient au moins une boule noire,
(2) la boule tirée est noire.

Exercice 7. *Une élection a lieu au scutin majoritaire à deux tours. Deux candidats A et B sont en compétition. Au premier tour, 40% des voix vont à A et 45% à B, le reste étant constitué d'abstentions. Aucun candidat n'ayant la majorité absolue, un second tour est organisé. Tous les électeurs ayant voté la première fois voteront à nouveau. Un sondage indique par ailleurs que 5% des voix de A se reporteront sur B et que 10% des voix de B iront à A. On estime de plus que les deux-tiers des électeurs n'ayant pas voté au premier tour, voteront à raison de 60% pour A et 40% pour B.*

(1) Quelle est la probabilité pour qu'un abstentionniste du premier tour vote pour A, pour B ?
(2) D'après ce sondage, quel candidat a la plus forte probabilité d'être élu ?

Exercice 8. *On classe les gérants de portefeuille en deux catégories : les spécialistes et les non spécialistes. Lorsqu'un gérant spécialiste achète une valeur boursière pour son client, la probabilité que le cours de celle-ci monte est de 80% ; dans le cas d'un non spécialiste, cette probabilité ne vaut que 50%. Si on choisit au hasard un gérant dans un annuaire professionnel, la proportion des spécialistes est de 20%.*

(1) Sans connaître à quel type de gérant on a affaire, calculer la probabilité que la valeur augmente après avis du gérant.
(2) Recalculer alors la probabilité que le gérant soit un spécialiste lorsqu'on sait que la valeur qu'il a achetée a augmenté.

Exercice 9. *L'examen clinique d'un individu montre qu'il est atteint d'une pathologie $\mathcal{P}$ pouvant présenter 3 formes A, B, C qu'on cherche à déterminer. On réalise pour cela des tests supplémentaires spécifiques à chacune de ces formes. Si le test positif, la forme correspondante de la pathologie est certainement présente, sinon, on ne peut rien affirmer. On sait que, lorsque cette pathologie est présente, les trois formes A, B, C apparaissent chez les individus dans des proportions 50%, 30% et 20%. On sait aussi que 70% des sujets atteints de la forme A sont détectés par le test correspondant, que 90% atteints de B sont détectés et que 10% atteints de C sont détectés.*

(1) Quelle est la probabilité qu'un individu atteint de la pathologie $\mathcal{P}$ présente la forme A de la maladie ?
(2) La forme A étant plus présente, on commence par réaliser le test correspondant. Le test est négatif. Quelle est maintenant la probabilité que cet individu présente la forme A.
(3) Le test pour A n'ayant rien donné, on réalise les deux autres tests correspondant aux formes B et C. Là encore, les tests sont négatifs. Quelle est finalement la probabilité que cet individu présente la forme A ?

Exercice 10. *On considère le jeu de stratégie suivant : un candidat se trouve face à 3 portes numérotées de 1 à 3, un prix a été caché aléatoirement derrière l'une d'entre elles. Le candidat se place toujours devant la porte 1. L'animateur (qui sait où se trouve le prix) ouvre une des portes 2 ou 3 et le candidat constate que le prix n'y est pas. Le candidat a-t-il plus de chance d'obtenir le prix en ouvrant la porte 1 plutôt qu'en ouvrant l'autre porte fermée ? On répondra pour cela aux questions suivantes :*

1. *Le candidat choisit d'ouvrir au hasard la porte 1 ou l'une des deux portes 2 ou 3 non ouverte. Il se trouve face aux éventualités du type suivant* $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ *où* ω_1 *est le numéro de la porte cachant le prix,* ω_2 *est le numéro de la porte ouverte par l'animateur et* ω_3 *est le numéro de la porte (autre que celle déjà ouverte) que le candidat veut ouvrir. Calculer la probabilité de chaque éventualité. Quelle est la probabilité de gagner ?*
2. *Le candidat choisit la stratégie d'ouvrir systématiquement la porte 1 : quelle est la probabilité de gagner ?*
3. *Le candidat choisit la stratégie d'ouvrir systématiquement l'une des deux portes 2 ou 3 non ouverte : quelle est la probabilité de gagner ?*
4. *Conclure.*