



Département Licence

Année 2006–2007 28 Février 2007
 SVTE SVT101
 Mathématiques durée : 1h30
 Ph. Thieullen

Toute formule utilisée devra être reproduite sur la copie. Les exercices sont indépendants. La calculatrice Bordeaux 1 est autorisée.

Exercice 1. On considère l'équation d'un oscillateur harmonique entretenu :

$$(E) \quad y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = \sin(2t).$$

1. Déterminer la solution générale de l'équation homogène.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre.
3. Déterminer la solution générale de l'équation (E).
4. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 2. Un tram part d'un terminus tous les quarts d'heure à partir de 5h30 précises. Un passager arrive au terminus entre 5h30 et 6h00. Soit T la variable aléatoire égale à la durée écoulée entre 5h30 et l'instant d'arrivée du passager au terminus. On suppose que T suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 30]$ exprimée en mn.

1. Déterminer la densité de probabilité de T .
2. Déterminer l'espérance et l'écart-type de T .
3. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(10 < T < 15)$. Déterminer la probabilité que le passager attende moins de 5 mn avant de prendre un tram.

Exercice 3. Un pot de peinture est sensé recouvrir théoriquement une surface de 25 m^2 . On appelle X la v.a. égale à la surface effectivement recouverte par chaque pot de peinture. On suppose pour simplifier que X suit une loi normale d'espérance 25 m^2 et d'écart-type 5 m^2 .

1. Déterminer la probabilité que la surface recouverte par un pot de peinture soit supérieure à 20 m^2 .
2. Une loi demande au fabricant d'indiquer sur la notice une surface recouverte minimale qu'il peut garantir avec une probabilité au moins égale à 95%. Déterminer cette surface minimale S .

Exercice 4. Un candidat passe le code de la route. On lui demande de répondre à un QCM de $n = 40$ questions choisies au hasard dans la liste de toutes les questions qui sont au programme de l'examen. Le candidat décide de travailler en profondeur $p = 75\%$ des questions du programme.

Chaque question possède 4 réponses possibles et une seule d'entre elles est bonne. Le comportement du candidat pour chacune des 40 questions est le suivant : si la question a été étudiée en profondeur, il connaît la bonne réponse et il la choisit, sinon il choisit indifféremment une réponse parmi les 4 proposées.

On appelle X la v.a. égale au nombre de questions que le candidat a étudiées en profondeur parmi les 40 questions du QCM. On appelle Y la v.a. égale au nombre total de bonnes réponses.

1. Déterminer la loi de X (nom, paramètres, formule de $\mathbb{P}(X = k)$).
2. Déterminer l'espérance et l'écart-type de X .
3. On considère une question donnée au QCM.
 - (a) Déterminer la probabilité que le candidat choisisse la bonne réponse à cette question sachant qu'il a étudié cette question en profondeur.
 - (b) Déterminer la probabilité que le candidat choisisse la bonne réponse à cette question sachant qu'il n'a pas étudié cette question en profondeur.
 - (c) Déterminer la probabilité que le candidat choisisse la bonne réponse à cette question.
4. Déterminer la loi de Y (nom et paramètres).
5. En approchant la loi de Y par une loi convenable qu'on précisera, déterminer la probabilité que le candidat réponde juste à au moins 35 questions.

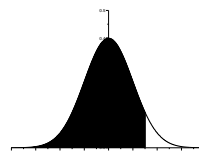
Barème indicatif : exo1=50 - exo2=50 - exo3=40 - exo4=60

Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

Table de la fonction de répartition

$$p = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt$$

Par exemple : si $x = 1.5 + 0.04$ alors $p = 0.9382$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Cas des grandes valeurs de x

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7
p	0.998650	0.999032	0.999313	0.999517	0.999663	0.999767	0.999841	0.999892
1-p	0.001350	0.000968	0.000687	0.000483	0.000337	0.000233	0.000159	0.000108

x	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
p	0.999928	0.999952	0.999968	0.999979	0.999987	0.999991	0.999995	0.999997
1-p	0.000072	0.000048	0.000032	0.000021	0.000013	0.000009	0.000005	0.000003

Loi normale centrée réduite : suite

Graphe de la densité $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$.

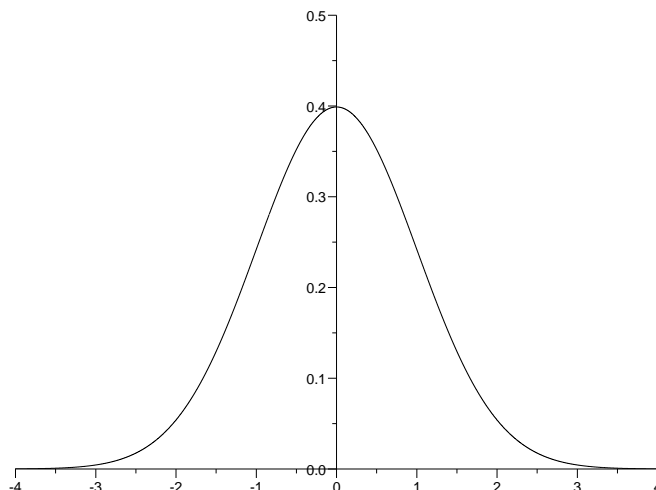


Table de dépassement de l'écart absolu : $\mathbb{P}(|X| > z_\alpha) = \alpha$

Par exemple : si $\alpha = 0.1 + 0.03$ alors $z_\alpha = 1.514$.

Cas des grandes valeurs de α :

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690
0.5	0.674	0.659	0.643	0.628	0.613	0.598	0.583	0.568	0.553	0.539
0.6	0.524	0.510	0.496	0.482	0.468	0.454	0.440	0.426	0.412	0.399
0.7	0.385	0.372	0.358	0.345	0.332	0.319	0.305	0.292	0.279	0.266
0.8	0.253	0.240	0.228	0.215	0.202	0.189	0.176	0.164	0.151	0.138
0.9	0.126	0.113	0.100	0.088	0.075	0.063	0.050	0.038	0.025	0.013

Cas des petites valeurs de α :

α	0.010	0.005	0.002	0.001	0.0005	0.0002	0.0001	0.00005	0.00002	0.00001
x	2.576	2.807	3.090	3.291	3.481	3.719	3.891	4.056	4.265	4.417