Corrigé de l'examen de janvier 2004

Exercice 1.

(1) L'équation caractéristique est donnée par $r^2 + 4r = 0$. Elle a pour racine $r = 2i$ et $r = -2i$. La solution générale de (E) s'écrit donc $y(x) = \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)$, où λ et μ sont deux constantes quelconques.

(2) On commence par dériver la solution précédente. On obtient $y'(x) = -2\lambda\sin(2x) + 2\mu\cos(2x)$. Comme par hypothèse $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$, après substitution on a : $\lambda = 1$ et $\mu = \frac{1}{2}$.D'où finalement le résultat

$$y(x) = \cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x).$$

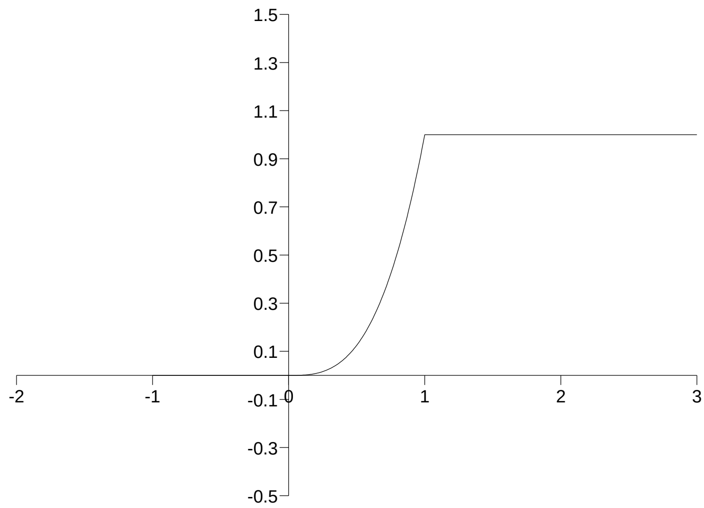
Exercice 2.

(1) Pour que $f(x)$ soit une densité de probabilité, il est nécessaire (et suffisant) que $f(x) \geq 0$ partout et $\int f(x)\,dx = 1$. Pour que cette deuxième propriété soit réalisée, il faut

$$\int_0^1 kx^2\,dx = 1 \Leftrightarrow k = 3.$$

(2) Par définition de la fonction de répartition $F(x)$ (ou distribution cumulée) $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$. Comme $f(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $x \geq 1$, le calcul de $F(x)$ dépendra de l'intervalle où x se trouve :
- si $x \leq 0$, $F(x) = 0$,
- si $0 \leq x \leq 1$, $F(x) = \int_0^x f(u)\,du = x^3$,
- si $x \geq 1$, $F(x) = 1$.

Le graphe de $F(x)$ est donc



(3) Par définition de l'espérance $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 3x^3\,dx = \frac{3}{4} = 0.75$. Pour le calcul de la variance, on commence par $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 3x^4\,dx = \frac{3}{5} = 0.6$. Enfin $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{3}{5} - (\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{80} = 0.0375$, soit un écart-type de $\sigma = 0.1936$.

Exercice 3. On cherche à établir des statistiques sur un carrefour très dangereux. On observe pour cela un grand nombre de conducteurs empruntant ce carrefour. Un événement élémentaire est décrit par deux informations : le conducteur a (ou n'a pas) eu un accident à ce carrefour, le conducteur a (ou n'a pas) moins de 25 ans. L'ensemble fondamental est donc égal à

$$\Omega = \{AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}\},$$

où par exemple $\bar{A}B$ désigne l'ensemble des conducteurs de moins de 25 ans n'ayant pas eu d'accident.

(1) On donne par hypothèse $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5} = 20\%$, $\mathbb{P}(\bar{B}) = \frac{4}{5} = 80\%$, $\mathbb{P}(A|B) = 3\%$ et $\mathbb{P}(A|\bar{B}) = 2\%$. On peut alors remplir le tableau suivant :

	B	$\bar{B}$
A	0.6%	1,6%
$\bar{A}$	19.4%	78.4%

D'où $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}($«avoir un accident »$) = (0.6 + 1.6)\% = 2.2\%$.

(2) Si on sait par avance qu'un accident a eu lieu, la probabilité qu'il ait été commis par un conducteur agé de moins de 25 ans est $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(AB)/\mathbb{P}(A) = 0.6/2.2 = 27\% > 20\% = \mathbb{P}(B)$.

Exercice 4.

(1) On appelle X la tension (exprimée en Volts) de l'alimentation. On suppose par hypothèse que c'est une v.a. de loi normale $N(m, \alpha^2)$ avec $m = 24$ et $\alpha = 1.8$.

(a) Le composant fonctionne normalement si $22 < X < 26$. Sa probabilité p est donc (Z désigne une v.a. normale centrée réduite)

$$\begin{aligned} p &:= \mathbb{P}(\text{«le composant fonctionne»}) \\ &= \mathbb{P}(22 < X < 26) = \mathbb{P}(\frac{22-m}{\alpha} < \frac{X-m}{\alpha} < \frac{26-m}{\alpha}) \\ &= \mathbb{P}(-\frac{2}{1.8} < Z < \frac{2}{1.8}) = \mathbb{P}(-1.11 < Z < 1.11), \end{aligned}$$

Les tables donnent la fonction de répartition de Z, soit $F(x)$. On commence alors par transformer l'expression :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-x < Z < x) &= 1 - \mathbb{P}(|Z| > x) = 1 - 2\mathbb{P}(Z > x) \\ &= 1 - 2(1 - F(x)) = 2F(x) - 1. \end{aligned}$$

Comme $F(1.11) = 0.8665$, $p = \mathbb{P}(-1.11 < Z < 1.11) = 73\%$.

(b) Le composant est détruit si $X > 29$. Sa probabilité q vaut donc

$$\begin{aligned} q &:= \mathbb{P}(\text{«le composant est détruit»}) \\ &= \mathbb{P}(X > 29) = \mathbb{P}(\frac{X-m}{\alpha} > \frac{29-m}{\alpha}) \\ &= \mathbb{P}(Z > \frac{5}{1.8}) = \mathbb{P}(Z > 2.78) = 1 - F(2,78) \\ &= 1 - 0.9973 = 2.7/1000. \end{aligned}$$

(2) On applique un raisonnement à l'envers. On cherche α pour que le composant fonctionne avec une probabilité de $p = 85\%$ (la valeur moyenne m est inchangée) :

$$p = 85\% = \mathbb{P}(\text{«le composant fonctionne»}) = \mathbb{P}(-\frac{2}{\alpha} < Z < \frac{2}{\alpha}).$$

De manière équivalent $\mathbb{P}(|Z| > \frac{2}{\alpha}) = 15\%$. En utilisant les tables, on obtient donc $\frac{2}{\alpha} = 1.44$, soit $\alpha = 1.39$. L'écart-type est bien plus petit que le précédent puisque le composant a plus de chance de fonctionner.

Exercice 5.

(1) A chaque page d'un livre, on associe une variable de Bernoulli valant 1 si elle est erronée et 0 sinon. Ces variables de Bernoulli peuvent être supposées indépendantes. On note X la variable somme des pages erronées. Alors X suit une loi binomiale $B(n,p)$ de paramètre $n = 300$ et $p = 5\%$. En particulier

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{300}{k}\left(\frac{5}{100}\right)^k\left(\frac{95}{100}\right)^{n-k}.$$

(2) Par définition d'une loi binomiale $\mathbb{E}(X) = np = 300 * (5/100) = 15$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 300 * (5/100) * (95/100) = 14.25$ et $\sigma_X = 3.77$.

(3) Par le théorème limite centrale, la v.a. X peut être approchée par une loi normale $N(\mu, \sigma)$ de paramètre $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. La probabilité q de rejeter un livre est donc (on appelle Z une v.a. de loi normale $N(0,1)$)

$$\begin{aligned} q &:= \mathbb{P}(\text{«le livre est rejeté»}) \\ &= \mathbb{P}(X > 20) = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{20-\mu}{\sigma}) \\ &= \mathbb{P}(Z > \frac{20-15}{3.77}) = \mathbb{P}(Z > 1.32) \\ &= 1 - F(1.32) = 1 - 0.9066 = 9.3\%. \end{aligned}$$

L'éditeur rejette entre 9 et 10 livres tous les 100 livres.