Corrigé du devoir surveillé de novembre 2004

Exercice 1.

(1) $I = \int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$.

(2) Par intégration par partie on a

$$\begin{aligned} J &= x(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)) - \int (\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x))\,dx \\ &= x(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\cos(2x) + c \\ &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin(2x) - \frac{1}{8}\cos(2x) + c. \end{aligned}$$

Exercice 2.

(1) L'équation caractéristique est donnée par $2r+3=0$, soit $r=-\frac{3}{2}$ et la solution généale de l'équation homogène $y(x) = \lambda\exp(-\frac{3}{2}x)$.

(2) On détermine d'abord une solution particulière pour le second membre $f_1(x) = xe^{-3x}$. Comme l'exposant n'est pas racine, on cherche la solution sous la forme $y_1(x) = (ax+b)e^{-3x}$. On obtient

$$2y' + 3y = (2a - 3b - 3ax)e^{-3x} = xe^{-3x}.$$

D'où $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{9}$ et $y_1 = -\frac{1}{9}(3x+2)e^{-3x}$. On détermine ensuite la solution correspondant au second membre $f_2(x) = e^{2x}$. On cherche la solution sous la forme $y_2 = ae^{2x}$. On obtient $2y' + 3y = 7ae^{2x}$, $a = \frac{1}{7}e^{2x}$. Le principe de superpositon des solutions nous montre que

$$y_P(x) = -\frac{1}{9}(3x+2)e^{-3x} + \frac{1}{7}e^{2x}$$

est une solution particulière de (F).

(3) La solution générale de (F) est donnée par

$$y(x) = \lambda e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{1}{9}(3x+2)e^{-3x} + \frac{1}{7}e^{2x}$$

On en cherche une qui vérifie la condition initiale $y(0) = -1$, soit $\lambda - \frac{2}{9} + \frac{1}{7} = -1$, $\lambda = -\frac{58}{63}$. On obtient donc

$$y(x) = -\frac{58}{63}e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{1}{9}(3x+2)e^{-3x} + \frac{1}{7}e^{2x}.$$

Exercice 3.

(1) L'équation caractéristique $r^2 + 4r = 0$ donne comme racine $r = 0$ et $r = -4$. La solution générale de l'équation homogène est donc $y = \lambda + \mu e^{-4x}$.

(2) Le second membre se présente sous la forme $(x^2 + 1)e^{0x}$: on cherche donc une solution particulière $y_P(x) = x(ax^2 + bx + c)$. On a

$$\begin{aligned} y_P'' + 4y_P' &= (6ax + 2b) + 4(3ax^2 + 2bx + c) \\ &= 12ax^2 + (6a + 8b)x + 2b + 4c = x^2 + 1 \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de chaque puissance de x, on doit résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 12a & = & 1 \\ 6a + 8b & = & 0 \\ 2b + 4c & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & \frac{1}{12} \\ b & = & -\frac{1}{16} \\ c & = & \frac{9}{32} \end{array} \right.$$

D'où une solution particulière : $y_P(x) = x(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{9}{32})$.

(3) La solution générale de (F) est donc

$$y(x) = \lambda + \mu e^{-4x} + x(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{9}{32}).$$

On cherche y vérifiant de plus $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On doit alors résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \lambda + \mu & = & 1 \\ -4\mu + \frac{9}{32} & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & = & \frac{119}{128} \\ \mu & = & \frac{9}{128} \end{array} \right.$$

Exercice 4. Les hypothèses de l'énoncé nous permettent de remplir le diagramme **??**.

(1) Il y a donc exactement 6 touristes sur 100 choisissant exclusivement S1 et S2.

(2) Il y a 5 chance sur 100 qu'un touriste ne choisisse aucune visite.

(3) La probabilité que deux visites exclusivement soient choisies est égale à $5\% + 15\% + 6\% = 26\%$.

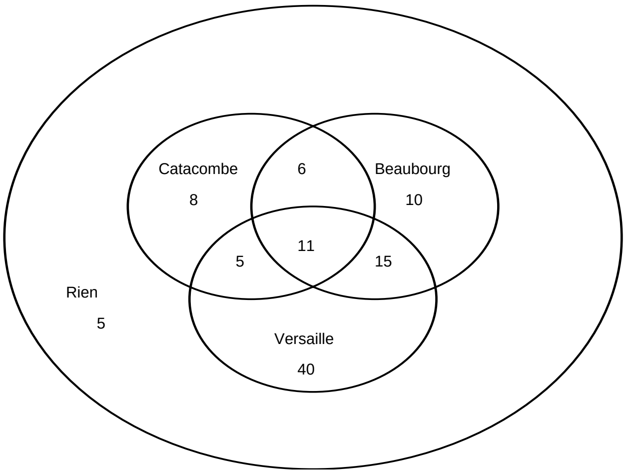

Fig. 1 – Diagramme de répartition