Examen Juin 2009

groupe B2

Exercice 2

3) dom $= \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ 5

40

$$x'(t) = \frac{2t(t-1) - t^2}{(t-1)^2} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

$$y'(t) = 1 - \frac{4}{t^2} = \frac{t^2-4}{t^2}$$

t	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{4}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

25

10

4) DL au point -1

30

$u = t + 1.$

$$x(t) = \frac{(u-1)^2}{u-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(u-1)^2}{1-\frac{u}{2}}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)(u-1)^2\left(1 + \frac{u}{2} + o(u)\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - 2u + o(u)\right)\left(1 + \frac{u}{2} + o(u)\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}u + o(u)\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}u + o(u)$$

$$y(t) = (u-1) + \frac{4}{u-1} = (u-1) - \frac{4}{1-u}$$

$$= (u-1) - 4\left(1 + u + o(u)\right) = -5 - 3u + o(u).$$

(on aurait pu utiliser $x'(-1) = +\frac{3}{4}$ $y'(-1) = -3$) 2

$$\boxed{M(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -5 \end{bmatrix} + (t+1)\begin{bmatrix} 3/4 \\ -3 \end{bmatrix} + o(u)}$$ 15

equation paramétrique de la tang / equation cartésienne

$$\boxed{\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + (t+1)\frac{3}{4} \\ y = -5 - (t+1)3 \end{cases}}$$

$(4x+2) + (y+5) = 0$) ou 15

$$\boxed{4x + y + 7 = 0}$$

Autre méthode

$x''(t) = \frac{2}{(t-1)^3}$

$y''(t) = \frac{8}{t^3}$

$x^{(3)}(t) = \frac{-6}{(t-1)^4}$

$y^{(3)}(t) = \frac{-24}{t^4}$

5 $t=2 \Rightarrow$ point singulier

40 DL en $t=2$ au moins à l'ordre 3.

$u = t-2$.

$$x(t) = \frac{(u+2)^2}{u+1} = (u+2)^2\left[1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)\right]$$

$$= \left[4 + 4u + u^2\right]\left[1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)\right]$$

$$= 4 + u^2 - u^3 + o(u^3)$$

$$y(t) = (u+2) + \frac{4}{u+2} = (u+2) + \frac{2}{1+\frac{u}{2}}$$

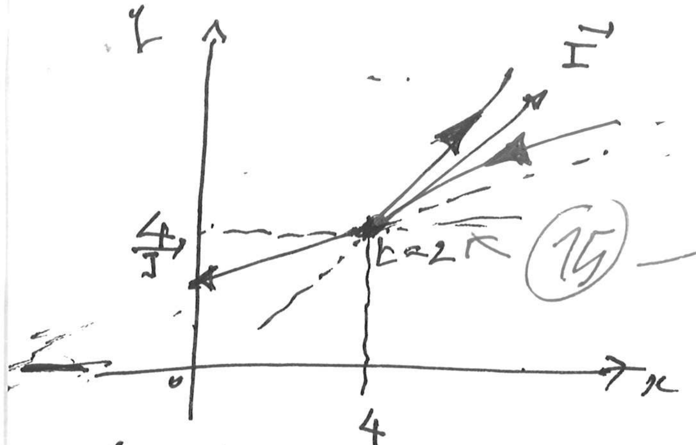
$$= (u+2) + 2\left[1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{8} + o(u^3)\right]$$

$$= 4 + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{4} + o(u^3)$$

$$\boxed{M(t) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + (t-2)^2\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} + (t-2)^3\begin{bmatrix} -1 \\ -1/4 \end{bmatrix} + o(t-2)^3}$$ 25

$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 \\ -1/4 \end{bmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \vec{I}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ -1/4 \end{bmatrix} = \vec{J}$.



← $M(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ est un point de rebroussement de 1re espèce

(La longueur des vecteurs $\vec I$ et $\vec J$ a été multipliée par 4)

Dans le repère $(M(2), \vec I, \vec J)$

$$\overrightarrow{M(2)M} = u^2 \vec I + u^3 \vec J + o(u^3)$$

$$\begin{cases} X = u^2 \\ Y = u^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = X^{3/2} \\ X \geq 0 \end{cases}$$

6 tangente horizontale : $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$

10 $t = -2$ $\quad \boxed{M(-2) = \begin{bmatrix} -4/3 \\ -4 \end{bmatrix}}$

7 $t = -\infty$

40

$$\frac{Y(t)}{X(t)} = \frac{t + \frac{4}{t}}{\frac{t^2}{t-1}} = \frac{t\left(1 + \frac{4}{t^2}\right)}{t \, \frac{1}{1 - 1/t}} = \left(1 + \frac{4}{t^2}\right)\left(1 - \frac{1}{t}\right)$$

$\lim\limits_{t \to -\infty} \frac{Y}{X} = 1$ direction asymptotique.

$$Y - X = t + \frac{4}{t} - \frac{t}{1 - 1/t}$$

$$= t + \frac{4}{t} - t\left(1 + \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$= -1 + o(1).$$

$\boxed{\text{asymptote : } Y = X - 1}$

20

$t = +\infty$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{Y}{X} = 1$ et $\boxed{Y = X - 1 \text{ est asymptote}}$.

$\underline{t \to 0}$ $\quad \begin{cases} x(t) \to 0 \\ y(t) \to \pm\infty \end{cases}$ $\quad \boxed{\text{asymptote verticale.}}$

10

$\underline{t = +1}$ $\quad \begin{cases} x(t) \to \pm\infty \\ y(t) \to 5 \end{cases}$ $\quad \boxed{\text{asymptote horizontale}}$

<u>position</u> par rapport à l'asymptote en $t = \pm\infty$:

$$Y - X + 1 = t + \frac{4}{t} - t\left(1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) + 1.$$

$$= \frac{5}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

$t \to -\infty$: $\begin{cases} Y - x + 1 < 0 \\ \text{la courbe est } \boxed{\text{dessous l'asymptote}} \end{cases}$

10

$t \to +\infty$: $\begin{cases} Y - x + 1 > 0 \\ \text{la courbe est } \boxed{\text{dessus l'asymptote.}} \end{cases}$

8

40