Habilitation à diriger des recherches
Exposants de Lyapunov

Philippe Thieullen

19 décembre 2001

Table des matières

1 Introduction

Un système dynamique, dans sa définition la plus générale, est composé d'un "espace de phase généralisé" et d'un groupe de transformations agissant dessus. Chaque point ou état de cet espace de phase peut contenir en lui-même toute l'histoire de son passé ou de son futur (comme dans le cas des sous-shifts bilatéraux) ou bien une information plus réduite (comme par exemple l'information position-moment en mécanique hamiltonienne). Le groupe de transformations représente quant à lui, la dynamique permise permettant de faire passer un état à un autre au cours de l'évolution du système. Cette dynamique peut être "linéaire", on parle alors de flot discret ou continu (comme dans le cas d'un flot engendré par un champ de vecteurs) ; elle peut aussi être engendrée par un groupe de transformations agissant sur l'espace des états (un groupe discret à nombre fini de générateurs comme dans le cas du billard géodésique).

On s'intéressera par la suite aux propriétés globales d'un système dynamique, c'est-à-dire à des propriétés décelables parceque la dynamique est itérée indéfiniment. Comme propriétés globales, on entend par exemple : l'existence d'orbites périodiques, de mesures invariantes (vues comme une généralisation de ces dernières), de feuilletages invariants et de ces mesures transverses, de solutions équivariantes dans des problèmes de cocycles, de taux de vitesse de convergence, de dimension de Hausdorff de certains compacts invariants. On s'intéressera plus particulièrement à d'écrire le comportement global de la dynamique infinitésimale et plus précisément à la notion d'exposant de Lyapunov. Un exposant de lyapunov est un taux de vitesse logarithmique de convergence (ou divergence) des trajectoires entre elles. Le théorème d'Oseledets décrit très bien en dimension finie le cas où les exposants sont distincts. Le cas de la dimension infinie est repris dans Mañé, Ruelle, puis dans **[1]**, **[2]**, **[3]** et **[4]**. Trouver un critère impliquant la positivité d'un exposant de Lyapunov est en général très difficile. En dimension 1, pour des applications unimodales par exemple, l'existence d'un exposant "Collet-Eckmann" est une condition topologique ; mais elle n'est pas générique. Pour des familles génériques à un paramètre, par contre, beaucoup de paramètres (au sens de la mesure de Lebesgue) donnent un exposant positif. Le premier résultat dans ce sens est celui de Benedicks-Carleson ; dans **[5]** et **[6]** nous renforçons ce résultat en montrant un théorème de densité des paramètres à exposant positif. L'existence d'un exposant positif est souvant lié à l'existence de mesures invariantes ayant une densité par rapport à la mesure Lebesgue.

Que se passe-t-il s'il n'existe pas de mesures invariantes dans la classe de Lebesgue ? On se trouve alors en présence d'une transformation non singulière de type III. Dans [**7**] et [**8**], nous abordons les thèmes standards de systèmes dynamiques pour ce type de transformations : en particulier l'existence d'une notion d'entropie à 3 valeurs. Trouver maintenant un critère de positivité de l'exposant en dimension supérieure relève plutôt de l'impossible. Dans [**9**], nous abordons ce problème plus globalement en termes de réduction de cocyles et nous montrons qu'un cocycle matriciel de dimension 2 se réduit à 4 cas possibles mutuellement disjoints. Enfin dans [**10**] et [**11**], nous nous intéressons, pour des actions de $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ sur la droite réelle, à l'existence de sous-cobords (que nous appelons sous-actions) liés aux problèmes de mesures maximisantes.

2 Description des objets

Dans cette partie, nous mettons en place les différentes définitions et propriétés élémentaires que nous utiliserons par la suite. Ces objets constituent la base de la théorie ergodique différentiable hyperbolique.

Le système dynamique de base est donné par une transformation ϕ agissant sur un espace X : par exemple X est un compact invariant d'une variété M et ϕ est un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme préservant X. Plus généralement, X est un espace standard, c'est-à-dire un espace à tribu isomorphe à une partie borélienne d'un espace métrique complet séparable. Les objets invariants d'un système dynamique représentent sa mémoire. On les voit à chaque instant : ou bien ils servent à prédire l'évolution du système, ou bien ils servent de réprésentant d'une dynamique fossile. Une orbite périodique est bien sûr un objet invariant. Une mesure invariante est un autre objet invariant plus compliqué.

Définition 1 *Une mesure σ-finie m sur X est dite ϕ-invariante si $\phi_* m = m$ i.e. si $\int f \circ \phi \, dm = \int f \, dm$ pour toute fonction test f à valeur réelle. On dira qu'une telle mesure est ergodique si tout borélien invariant est soit $\emptyset$ soit X modulo un ensemble négligeable. On notera $\mathcal{M}_1(X, \phi)$, l'ensemble des mesures invariantes de probabilité.*

On peut aussi s'intéresser à l'invariance de la classe de la mesure, on parle alors de transformations non-singulières.

Définition 2 *Si ϕ est bijective, on dit que ϕ est non-singulière pour une mesure m, si $\phi^* m \approx m$; on peut alors introduire la dérivée de Radon-Nikodym $\omega = \frac{d\phi^* m}{dm}$. Si ϕ n'est pas supposée bijective, on dit que ϕ est non-singulière si pour tout borélien B, $(m[\phi^{-1}B] = 0) \Rightarrow (m[B] = 0)$; on peut alors trouver ω (pas forcément unique) tel que $\int f \circ \phi \, \omega \, dm = \int f \, dm$ pour toute fonction test. On note*

$$\omega_k = \omega \circ \phi^{k-1} \cdots \omega \circ \phi \, \omega.$$

La statistique des mesures empiriques $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\phi^k(x)}$ est décrite par le théorème de Birkhoff et la statistique de $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \delta_{\phi^k(x)}$, par le théorème de Hurewicz. Lorsque la transformation est non-singulière (pour une mesure de référence donnée), le théorème de récurence de Birkhoff n'est plus valable et on introduit alors la notion de conservativité.

Définition 3 *Si ϕ est non-singulière pour m, ϕ est dite conservative si pour tout borélien B de mesure positive, presque tout point $x \in B$ revient un infinité de fois dans B.*

Une transformation non-singulière n'admet pas forcément de mesure invariante dans sa classe et Krieger a introduit la classification suivante :

Définition 4 *[Kri] Soit ϕ non-singulière pour m sans atome :*
(i) ϕ est dite de type II_1 si ϕ admet une mesure de probabilité μ, ϕ-invariante, équivalente à m,
(ii) ϕ est dite de type II_∞ si ϕ n'est pas de type II_1 mais admet une mesure σ-finie ϕ-invariante équivalente à m.
(iii) ϕ est dite de type III si ϕ n'est pas de de type II (II_1 ou II_∞).

Plus la transformation ϕ possède de régularité, plus les objets invariants deviennent rigides. A partir de maintenant, nous supposerons ϕ au moins de classe $\mathcal{C}^{1+\alpha}$. On peut alors considérer le cocyle associé à la différentielle $T_x = T_x\phi : T_xM \to T_{\phi(x)}M$ et définir des objets invariants infinitésimalement. Une notion importante attachée à un cocycle matriciel (ou d'opérateurs) est la notion d'exposant de Lyapunov qui mesure un taux de croissance exponentielle de la norme des vecteurs tangents lorsqu'on les itère par le cocycle.

Définition 5 *On considère un système dynamique (X, ϕ) et $E \to X$ un fibré vectoriel au dessus de X. On appelle cocycle d'opérateurs à valeur dans E, une famille d'opérateurs $T(x, n) : E_x \to E_{\phi^n(x)}$ vérifiant*

$$T(\phi^m(x), n)T(x, m) = T(x, m + n).$$

Définition 6 *Si $T(x, n)$ est un cocycle d'opérateurs sur X, on appelle exposant de Lyapunov en x, toute limite λ (lorsqu'elle existe) obtenue par :*

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln ||T_x^n(v)||$$

où v est un vecteur non nul quelconque.

En fait, le théorème d'Oseledets asssure que, si x est un point "typique" d'une mesure invariante, on ne trouve qu'une suite discrète de tels exposants :

$$\lambda_1(x) > \lambda_2(x) > \cdots > \lambda_r(x) \qquad (r \leq \dim E)$$

et chacun de ces exposants λ_i est associé à un sous fibré équivariant $E_i(x)$:

$$E = E_1(x) \oplus E_2(x) \oplus \cdots \oplus E_r(x).$$

Définition 7 *On dit qu'un sous fibré* $F = \sqcup_{x \in X} F_x$ *de sous espaces vectoriels est équivariant si* $T_x^n F_x \subset F_{\phi^n(x)}$ *pour tout* $x \in X$ *et* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Dans la cas où il n'y a pas d'exposant nul, on dit que le système est sans exposant neutre et on peut alors regrouper les sous fibrés d'Oseledets en deux catégories :

$$E^u(x) = \bigoplus_{\lambda_i > 0} E_i(x) \quad \text{et} \quad E^s(x) = \bigoplus_{\lambda_i < 0} E_i(x).$$

Sur E^u, les vecteurs sont dilatés d'au moins $\lambda^u = \min\{\lambda_i \mid \lambda_i > 0\}$ et sur E^s, ils sont contractés d'au moins $\lambda^s = \max\{\lambda_i \mid \lambda_i < 0\}$.

Nous verrons plus loin comment ces objets infinitésimaux invariants apportent des informations sur le système dynamique global. En particulier, nous verrons comment majorer la dimension fractale ou l'entropie d'un compact invariant.

Définition 8 *Si* X *est un compact métrique, on note pour tout* $\epsilon > 0$, $r(X, \epsilon)$*, le nombre minimal de boules de rayon* ϵ *nécessaire pour recouvrir* X *et on appelle dimension fractale de* X *:*

$$\dim_F(X) = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\ln r(X, \epsilon)}{-\ln \epsilon}.$$

L'entropie d'un système dynamique admet plusieurs formulations équivalentes ; Brin-Katok, en utilisant essentiellement le théorème de Shanon McMillan, ont montré l'équivalence de l'entropie définie avec les partitions et l'entropie, dite locale, définie de la manière suivante :

Définition 9 [BrKa] *Si* ϕ *préserve une mesure* m*, on définit d'abord une métrique sur* X *adaptée à la dynamique par :*

$$d_n(x, y) = \max\{d(\phi^i(x), \phi^i(y)) \mid 0 \leq i < n\}.$$

On définit ensuite les boules $B_n(x, \epsilon)$ *centrées en* x *de rayon* ϵ *pour cette métrique* d_n*. On appelle alors entropie locale et entropie de* ϕ *:*

$$h_m(x, \phi) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \ln m[B_n(x, \epsilon)],$$

$$h_m(\phi) = \int h_m(x, \phi)\, dm(x).$$

et de la même manière, on appelle entropie globale ou topologique :

$$h_{top}(\phi) = \sup\{h_m(\phi) \mid m \text{ est } \phi\text{-invariante }\}.$$

L'entropie mesure toujours un taux exponentiel de complexité des orbites. Pour des transformations non-singulières ou préservant une mesure σ-finie, on peut encore définir une entropie, mais l'utilisation de l'échelle exponentielle n'est plus vraiment adaptée à ce type de transformations.

En dimension 1, l'exposant de Lyapunov est facile à définir et vaut :

$$\lambda(x) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln D\phi(\phi^k(x)).$$

Reconnaître quand cet exposant peut être strictement positif est un problème nettement plus difficile. Nous aborderond ce problème plus tard et dans le cadre des applications unimodales, non plates.

Définition 10 *Une application* $\mathcal{C}^2$, $\phi : I \to I$, $I = [-1, 1]$, *est dite unimodale non plate (ou non dégénérée) si elle admet un unique point critique* c_0*, qu'on normalisera pour simplifier par* $c_0 = 0$*, si en ce point* $\phi''(c_0) \neq 0$ *et si* ϕ *est croissante pour* $x < 0$ *et décroissante pour* $x > 0$*. On dite aussi que* ϕ *est à dérivée schwarzienne négative si*

$$S\phi = \frac{\phi'''}{\phi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\phi''}{\phi'}\right)^2 < 0.$$

La notion de dérivée schwarzienne négative peut paraître artificielle mais elle est fondamentale pour le calcul de la distorsion (ou lemme de Koebe) de la dérivée de ϕ. En fait, van Strien [St] montre comment on peut s'en passer pour des applications non plates ; voir aussi [Koz] et [GrSaSw].

Un exposant positif dans un système dynamique indique la présence d'un peu d'hyperbolicité. A son tour, l'hyperbolicité entraîne l'existence de mesures invariantes plus "physiques". On peut citer par exemple des mesures ayant un jacobien prescrit, ou bien des mesures ayant un bassin d'attraction "gros" (de mesure de Lebesgue positive ou bien générique), ou bien des mesures satisfaisant un principe variationnel : on parle alors de mesures d'équilibre.

Définition 11 *Si* $A : X \to \mathbb{R}$ *est une observable, on appelle mesure d'équilibre associée à* A*, une mesure qui réalise le maximum dans :*

$$P(A) = \sup\{h_m(\phi) + \int A\,dm \mid m \text{ est une mesure } \phi\text{-invariante } \}$$

$P(A)$ *s'appelle la pression de* A*.*

On peut voir dans la pression une sorte de transformée de Legendre de la fonction $m \in \mathcal{M}_1(X, \phi) \mapsto h_m(\phi)$ en prenant comme "dual" des mesures sur X, les fonctions $\mathcal{C}^0(X)$ (c'est bien sûr très approximatif). On verra par exemple, en prenant $A = -\ln|\phi'|$ (dans le cas unidimensionnel) ou $A = -\ln J^u$ (pour des ensembles hyperboliques) que les mesures d'équilibre associées permettent de conserver des informations de différentiabilité dans une représentation purement symbolique du système.

On peut aussi s'intéresser à un autre principe variationnel qui s'apparente plutôt à une dynamique du type Euler-Lagrange : on parle dans ce cas de mesures maximisantes.

Définition 12 *Si $A : X \to \mathbb{R}$ et une observable, on appelle mesure maximisante m, toute mesure réalisant le maximum dans :*

$$m(A, \phi) = \sup\{\int A\, dm \mid m \in \mathcal{M}_1(X, \phi)\}.$$

Ces mesures peuvent aussi être vues comme limite de mesures d'équilibre. Une autre famille de mesures (pas forcément invariantes) joue aussi un rôle important ; c'est la famille des mesures ayant un jacobien prescrit. Ces mesures permettent par exemple de calculer des dimensions de Hausdorff de compacts invariants. On dit aussi que ce sont des mesures conformes.

Définition 13 *Si $A : X \to \mathbb{R}$ est une observable. On dit que* $\exp(-A)$ *est le jacobien d'une mesure m si*

$$m[\phi(B)] = \int_B \exp(-A)\, dm$$

pour tout borélien B tel que $\phi : B \to X$ est injective et bi-mesurable sur son image.

Le cas où l'observable est donnée par $A = -\ln \phi'$ permet, pour des systèmes hyperboliques, de construire une mesure d'équilibre particulière appelée mesure de Bowen-Ruelle-Sinai (ou BRS en abrégé). Ces mesures BRS admettent plusieurs définitions équivalentes dans les bons cas ; nous allons choisir une définition indépendante de l'hyberbolicité du système :

Définition 14 *On appelle mesure BRS, une mesure invariante (on admet ici des mesures discrètes) de probabilité μ ergodique telle que son bassin*

$$\mathrm{bass}(\mu) = \{x \in X \mid \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\phi^k(x)} \to \mu\}$$

ait une mesure de Lebesgue strictement positive. La convergence des mesures a lieu au sens faible. Plus généralement, on note $\omega(\lambda)$, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi_*^k\lambda)$ pour toute mesure de probabilité λ.

Remarquons tout de suite qu'une telle mesure SRB est en général singulière par rapport à Lebesgue, mais que, dans les cas où on sait la construire, la mesure est feuilletée et chaque désintégration de long des feuilles est absolument continue par rapport à Lebesgue sur la feuille. Un exemple de bon cas est un compact invariant hyperbolique localement maximal

Définition 15 *Si M est une variété différentiable, $\phi : M \to M$ est un $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ difféomorphisme, X est un compact ϕ-invariant uniformément hyperbolique, $TM = E^u \oplus E^s$ où E^u et E^s sont des fibrés vectoriels hölders équivariants respectivement uniformément dilatant :*

$$m(T\phi|E^u) \geq \exp(\lambda^u) > 1,$$

uniformément contractant :

$$\|T\phi|E^s\| \leq \exp(\lambda^s) < 1.$$

On rappelle la notation : $m(T) = \|T^{-1}\|^{-1}$. Enfin, X est supposé localement maximal, s'il existe un ouvert U contenant X telque $X = \cap_{n\in\mathbb{Z}}\phi^n(U)$.

Un système dynamique est dit non-uniformément hyperbolique si, cette fois-ci, son espace tangent se scinde mesurablement en deux sous fibrés équivariants dont l'un est dilatant et l'autre est contractant. Ici les coefficients d'expansion ne sont plus uniformes et l'angle entre les deux sous fibrés n'est plus minoré uniformément. On démontre néanmoins que la dégradation dans l'angle est sous-exponentielle. L'objet le plus remarquable qu'on peut construire pour des systèmes non uniformément hyperboliques est la variété instable (ou la variété stable) tangente en presque tout point à E^u (respectivement à E^s).

Définition 16 *Soit* (M, ϕ) *un système dynamique* $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ *non uniformément hyperbolique,* $TM = E^u \oplus E^s$ *une décomposition mesurable, vérifiant :*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln m(T_x\phi^n|E_x^u) = \lambda_x^u > 0, \quad \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln \|T_x\phi^n|E_x^s\| = \lambda_x^s < 0.$$

On appelle variété instable globale (resp. variété stable globale), les ensembles :

$$W_x^u = \{y \in X \mid \limsup_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} \ln d(\phi^{-n}(y), \phi^{-n}(x)) < 0\},$$
$$W_x^s = \{y \in X \mid \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln d(\phi^{n}(y), \phi^{n}(x)) < 0\}.$$

Si x est un point typique pour une mesure invariante m, W_x^u et W_x^s sont des sous-variétés immergées tangentes à E_x^u et E_x^s. Pesin a montré qu'on peut, plus généralement, associer à chaque $E_1(x) \oplus \cdots E_i(x)$, tant que $\lambda_i(x) > 0$, une variété instable $W_i(x)$ caractérisée par une dilatation des vecteurs tangents d'au moins $\lambda_i(x)$.

Le cas particulier des systèmes dynamiques sans exposant neutre est important. Il permet de définir une structure locale produit et des fermés particuliers appelés rectangles markoviens. Si on est capable de construire suffisamment de rectangles markoviens, on peut espérer coder le système dynamique, ou du moins exhiber une extension symbolique. Le modèle type d'un système dynamique markovien est le sous-shift de type fini :

Définition 17 *Soit* $\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_r\}$ *un ensemble d'états possibles et* $A = (a_{ij})$ *une matrice* $r \times r$ *de transitions entre états où* $e_i \to e_j$ *est une transition permise si* $a_{ij} > 0$*. On appelle alors sous-shift bilatéral de type fini, l'ensemble de tous les chemins possibles bi-infinis respectant à chaque instant les transitions données par* A*.*

Il est même plus intéressant d'introduire le sous-shift unilatéral : l'orbite positive est intégralement connue, mais pour pouvoir reconstruire son passé, il faut faire à chaque instant des choix correspondants aux transitions inverses de la matrice A. Ruelle a développé un formalisme, appelé formalisme thermodynamique, permettant de sélectionner des mesures (mesures à jacobien ou mesures invariantes) d'écrivant ce principe de choix dans les branches inverses. L'opérateur central de la théorie est l'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius $\mathcal{L}$:

Définition 18 *Soit* $A : X \to \mathbb{R}$ *une observable. Pour toute fonction test* $h : X \to \mathbb{R}$*, on associe une nouvelle fonction :* $\mathcal{L}(h) : X \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\mathcal{L}(h)(x) = \sum_{\phi(y)=x} h(y) \exp(A(y)),$$

où la somme est prise sur toutes les pré-images de x*.*

3 Exposant de Lyapunov en dimension infinie

L'intérêt d'une théorie des exposants en dimension infinie apparaît dans les équations d'évolution dissipatives. Elle apparaît aussi dans les réseaux de systèmes couplés. Ruelle [Ru1], [Ru2] fut le premier à généraliser la théorie d'Oseledets [Os] aux produit d'opérateurs compacts d'un espace de Hilbert. Mañé [Man1] améliora ensuite ce résultat pour des produits d'opérateurs compacts d'un espace de Banach. Il y a d'abord deux cas à étudier : le cas où le système dynamique de base est inversible et le cas où il ne l'est pas. Ensuite, Mañé distingue deux autres sous cas : le cas où chaque opérateur T_x est inversible et le cas général. Pour atteindre le cas général, Mañé se sert de la notion d'extension naturelle (aussi bien pour le système dynamique de base que pour le cocycle d'opérateurs). Cependant, si avant extension l'opérateur est compact, il ne l'est plus dans cette extension, mais par contre il devient asymptotiquement compact. Mañé n'avait pas détaillé ce passage et c'était l'occasion de rédiger une deuxième fois le travail de Mañé dans le cadre des cocycles asymptotiquement compacts.

3.1 Cocycles asymptotiquement compacts

Nous commençons par définir l'indice de compacité d'un ensemble A.

Définition 19 *Si A est une partie d'un espace métrique E. On appelle indice de compacité de A, $\alpha(A)$, l'infimum de tous les $r > 0$ tel que A puisse être recouvert par un nombre fini de boules (pas forcément centrées sur A) de rayon r.*

Définition 20 *Si E_1, E_2 sont deux espaces vectoriels normés et $T : E_1 \to E_2$ est un opérateur, on appelle indice de compacité de T, soit $\|T\|_\alpha$, l'indice de compacité de $T(B_{E_1})$, l'image par T de la boule unité de E_1 :*

$$\|T\|_\alpha = \alpha(TB_{E_1}).$$

Définition 21 *Si $T = \{T_x\}_{x\in X}$ est un cocycle d'opérateurs à valeurs dans un fibré vectoriel E au dessus d'un système dynamique (X, ϕ), on appelle indice asymptotique de compacité, la limite*

$$\lambda_\infty = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln \|T_x^n\|_\alpha$$

en tout point où la limite existe. Le cocycle est dit asymptotiquement compact si $\lambda_\infty = -\infty$ en tout point.

Pour simplifier l'énoncé du théorème d'Oseledets, nous allons choisir un cadre un peu moins général que dans **[1]** **[2]** **[3]** : (X, ϕ, m) sera un système dynamique inversible ergodique et T sera un cocycle d'opérateurs (pas forcément injectifs), à valeur dans un fibré Banach, asymptotiquement compacts. Il serait plus intéressant d'introduire la notion de points réguliers (un ensemble de mesure 1 pour toute mesure ϕ-invariante) mais cette notion est peu utilisable dans la pratique. Le fait de choisir un système dynamique inversible nous permet de construire une décomposition de E et non pas seulement un drapeau.

Définition 22 *Soit $T = \{T_x\}_{x\in X}$ un cocycle d'opérateurs à valeur dans un fibré vectoriel. Pour tout réel λ, on définit :*

$$F_x^\lambda(E) = \{v \in E_x \mid \limsup \frac{1}{n} \ln \|T_x^n v\| \leq \lambda\},$$

on appelle pré-orbite d'un vecteur $v \in E_x$, un suite de vecteurs $\{v_{-n}\}_{n\geq 0}$ vérifiant $v_{-n} \in E_{\phi^{-n}(x)}$ et $T_{\phi^{-n}(x)}(v_{-n}) = v_{-n+1}$. On définit alors :

$$G_x^\lambda(E) = \{v \in E_x \mid \ \textit{il existe une pré-orbite } \{v_{-n}\} \textit{ de } v \textit{ telle que}$$
$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln \|v_{-n}\| \leq -\lambda\,\}.$$

On remarque déjà que F et G sont des fibrés vectoriels. Jusqu'à présent, il n'était pas question de régularité des objets et pour faciliter l'exposition nous allons supposer les espaces de Banach E_x séparables, ce qui nous permettra d'appliquer les théorèmes de Lusin (compacité des boréliens, continuité des applications mesurables).

Définition 23 *On dira qu'un fibré vectoriel $E = \sqcup_{x\in X} E_x$ est mesurable s'il existe une partition borélienne de X, $X = \cup_{i\in I} X_i$ et des espaces de Banach séparables E_i, $F_i \subset E_i$ tels qu'en tout point $x \in X_i$, $E_x \oplus F_i = E_i$ (où la somme est topologique) et $x \in X_i \mapsto E_x$ est un application mesurable à valeur dans la grasmannienne des sous-espaces vectoriels fermés de E_i admettant un supplémentaire topologique.*

On peut alors parler de cocycles mesurables d'opérateurs, ou bien de sous-fibrés vectoriels équivariants mesurables. Nous arrivons ainsi à l'énoncé du théorème d'Oseledets pour des cocycles asymptotiquement compacts :

Théorème 24 [1] *Soit $E = \sqcup x \in X E_x$ un fibré vectoriel mesurable au dessus d'un système dynamique inversible (X, ϕ), ergodique et $T = \{T_x\}_{x\in X}$ un cocycle mesurable d'opérateurs asymptotiquement compacts tel que*

$$\int \ln^+ \|T_x\| \, dm(x) < +\infty.$$

Il existe alors une suite de réels $(\lambda_i)_{i\geq 1}$, finie ou infinie, strictement décroissante tendant vers $-\infty$ telle que˜ :

- *(1) $F_i = \sqcup_{x\in X} F_x^{\lambda_i}(E)$ est un sous fibré équivariant mesurable*
- *(2) $E_i = \sqcup_{x\in X} G_x^{\lambda_i}(E)$ est un sous fibré équivariant mesurable de dimension finie et non nulle*
- *(3) $F_1 = E$, $F_i = E_i \oplus F_{i+1}$, $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_i \oplus F_{i+1}$*
- *(4) pour tout $v \in F_x^{\lambda_i} \setminus F_x^{\lambda_{i+1}}$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln \|T_x^n v\| = \lambda_i = \lim \frac{1}{n} \ln \|T_x^n \mid F_x^{\lambda_i}\|,$$

- *(5) le cocycle T est injectif sur le fibré G_i et pour tout $v \in G_x^{\lambda_i} \setminus \{0\}$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln \|T_x^{-n} v\| = -\lambda_i \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln \|T_x^n v\| = \lambda_i.$$

Sur chaque E_i, T se comporte en gros comme une homothetie mais en réalité, des phénomènes plus compliqués peuvent apparaître, comme cela sera développé dans le chapitre **6**. L'idée fondamentale pour montrer que $\dim E_i \geq 1$ est d'utiliser le lemme de Mañé-Pliss [Man1] sur l'existence de temps hyperboliques. Ce lemme a beaucoup d'analogie avec les lemmes maximaux de différentiation des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Nous reverrons au chapitre **5** une autre utilisation de ce lemme dans la théorie des transformations non-singulières pour démontrer l'équivalent du théorème de Birkhoff. Le terme "temps hyperbolique" est arrivé plus tard dans des articles de Alves [Alv] ou Alves-Bonatti-Viana [AlBoVi].

Définition 25 *Soit $T = \{T_x\}_{x\in X}$ un cocycle d'opérateurs de $E = \sqcup_{x\in X} E_x$ (supposé non injectif a priori). On dit que x admet un temps hyperbolique (rétrograde) d'ordre p et d'exposant λ, s'il existe $(w_{-p}, \cdots, w_{-1}, w_0)$ des vecteurs non nuls de $E_{\phi^{-p}(x)}, \cdots, E_{\phi^{-1}(x)}, E_x$ tels que pour tout $k = 0, 1, \cdots, p$*

$$T_{\phi^{-k}(x)}(w_{-k}) = w_{-k+1} \quad et \quad \|w_{-k}\| \leq \exp(-k\lambda)\|w_0\|.$$

On remarque que si x admet un temps hyperbolique d'exposant λ d'ordre infini, $\dim G_x^\lambda \geq 1$ et le théorème est quasiment démontré. De plus, comme ces vecteurs $\{w_{-k}\}$ apparaissent comme image par des itérés de T de vecteurs de norme controlée, et comme T est asymptotiquement compact, si x admet des temps hyperboliques de tout ordre, il admet aussi un temps hyperbolique d'ordre infini. Il reste donc à utiliser le lemme de Mañé-Pliss :

Lemme 26 [Man1], [1] *On fait l'hypothèse que $\|T_x\| \leq \exp(\nu)$ uniformément en x et on choisit deux exposants λ, μ vérifiant $\mu < \lambda$. Si une orbite de longueur n, $\{x, \phi(x), \cdots, \phi^{n-1}(x)\}$ admet un exposant λ, c'est-à-dire si*

$$\|T_x^n w\| \geq \|w\| \exp(n\lambda)$$

pour un certain $w \neq 0$, alors la proportion des points de cette orbite qui ont des temps hyperboliques d'exposant μ et dordre p est supérieure à :

$$\frac{\lambda - \mu}{\nu - \mu} - \frac{p}{n}.$$

En particulier, la proportion limite lorsque n tend vers $+\infty$ est minorée uniformément par $(\lambda - \mu)/(\nu - \mu)$: c'est un énoncé remarquable qui ne fait pas intervenir de théorie ergodique.

3.2 Exposant, entropie et dimension [1]-[2]-[3]-[4]

C'était une vieille conjecture due à Yorke de majorer la dimension d'un attracteur (un compact invariant X vérifiant exactement $\phi(X) = X$) en fonction de la dimension de Lyapunov du cocycle $T = D\phi$. Douady-Oesterlé [DoOe] en donne une démonstration, Ledrappier [Le1] l'améliore pour les mesures. Il restait alors à démontrer cette conjecture dans le cadre de la dimension infinie. A cette occasion, il est apparu intéressant d'introduire un nouvel outil : l'α-entropie d'une mesure invariante.

Définition 27 [2] *Soit (X, ϕ, m) un système dynamique ergodique. Pour tout $\alpha \geq 0$ et $n \geq 1$ on introduit la métrique :*

$$d_n^\alpha(x, y) = \max_{0 \leq k < n} d(\phi^k(x), \phi^k(y)) \exp(k\alpha)$$

où $d(x, y)$ désigne la métrique usuelle sur X. On pose alors :

$$h_\alpha(\phi, m) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \ln m[B_n^\alpha(x, \epsilon)] \quad \textit{(const. m-p.p.)}$$

où $B_n^\alpha(x,\epsilon)$ est la boule de centre x et de rayon ϵ pour la métrique d_n^α. On définit de même l'α-entropie uniforme de toute partie Y, ϕ-invariante :

$$h_\alpha(\phi, Y) = \lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln r_n^\alpha(Y,\epsilon)$$

où $r_n^\alpha(Y,\epsilon)$ est le nombre minimum de boules B_n^α de rayon ϵ, nécessaires pour recouvrir Y. Dans le cas où $T : E \to E$ est un cocycle d'opérateurs, on définit :

$$h_\alpha(T,m) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln R(T_x^n, e^{-n\alpha}) \quad \textit{(const. m-p.p.)}$$

où $R(T_x^n,\epsilon)$ est le nombre minimal de boules de $E_{\phi^n(x)}$ de rayon ϵ nécessaires pour recouvrir l'image $T_x^n B_x$ de la boule unité de E_x.

Bien sûr, pour $\alpha = 0$, on reconnaît la définition (équivalente) de l'entropie de Brin-Katok. Mais contrairement à ce qui se passe pour $\alpha = 0$, il n'est pas claire qu'on obtienne la même entropie en prenant $\liminf$ au lieu de $\limsup$. L'α-entropie permet de passer continument de l'entropie de m à sa dimension fractale. Rappelons la définition de la dimension fractale :

Définition 28 *Si m est une mesure ergodique, on appelle dimension fractale de m*

$$\dim_F(m) = \limsup_{\epsilon\to 0}\frac{\ln m[B(x,\epsilon)]}{\ln\epsilon} \quad \textit{(const. m-p.p.)}$$

De même, on appelle dimension fractale uniforme de X :

$$\dim_F(X) = \limsup_{\epsilon\to 0} -\frac{\ln r(X,\epsilon)}{\ln\epsilon}$$

où $r(X,\epsilon)$ est le nombre minimum de boules de rayon ϵ (pour la métrique usuelle) nécessaires pour recouvrir X.

On remarque que $\dim_H(X) \le \dim_F(X)$. L'idée de base pour calculer ces dimensions fractales est de recouvrir X (ou toute autre partie Y de X) par des boules $B(x,\epsilon)$ de rayon ϵ petit, puis de recouvrir chaque image $\phi(B(x,\epsilon))$ par des boules de rayon moitié et de répéter ce procédé en diminuant le rayon par 2 à chaque fois. Si ϵ est petit et ϕ suffisamment différentiable, cela revient à déterminer combien de boules de rayon $\frac{1}{2}$ dans l'espace tangent, il faut pour recouvrir l'image $T_x B_E$. Dans ce qui précède, le cocycle d'opérateurs T pouvait être quelconque ; on suppose maintenant que T est "la différentielle" de ϕ au sens suivant :

Définition 29 *On suppose ici que* $E = \sqcup_{x\in X} E_x$ *est un fibré vectoriel continu et qu'il existe une fonction* $K : \mathbb{R}^+_* \to \mathbb{R}^+_*$ *et une famille* $\{\psi_x\}_{x\in X}$ *de quasi-isométries locales,* $\psi_x : B(x,\rho) \to E_x$ *servant à représenter localement* X *dans chaque* E_x *telles que*

$$K(\epsilon)^{-1}\, d(y,z) \le \|\psi_x(y) - \psi_x(z)\| \le K(\epsilon)\, d(y,z), \quad \lim_{\epsilon\to 0} K(\epsilon) = 1$$

pour tout x *dans* X *et tout* y, z *dans* $B(x,\epsilon)$. *On définit alors une dynamique locale en posant* $f_x = \psi_{\phi(x)} \circ \phi \circ \psi_x^{-1}$ *sur chaque* $\psi_x(B(x,\rho)) \cup \phi^{-1}B(\phi(x),\rho)$. *On dit que* $T = \{T_x\}_{x\in X}$ *est une "différentielle" de* ϕ *si on a*

$$\|f_x(v) - f_x(w) - T_x(v-w)\| \le C(\|v-w\|)\|v-w\|$$

pour tout v, w *dans* $B(x,\epsilon)$. *Si* $C(\epsilon) = o(1)$, *on dit que* ϕ *est de classe* $\mathcal{C}^1$, *si* $C(\epsilon) = C_0\epsilon^t$, *on dit que* ϕ *est de classe* $\mathcal{C}^{1+t}$.

On peut alors maintenant définir une deuxième notion de dimension : la dimension de Lyapunov qui mesure la plus petite des dimensions d pour laquelle le cocycle T contracte les volumes d-dimensionnels de tout fibré. On introduit plus précisément une dimension fractionnaire par interpolation linéaire :

Définition 30 *Soient* (X,ϕ,m) *un système dynamique ergodique,* T *un cocycle mesurable d'opérateurs asymptotiquement compacts et* $\{\lambda_i\}_{i\ge1}$ *la suite des exposants de Lyapunov de multiplicité* $\{d_i\}_{i\ge1}$. *On introduit pour tout réel* $d \ge 0$ *:*

$$\Lambda_d(T,m) = \sum_{i=1}^n d_i\lambda_i + \alpha d_{n+1}\lambda_{n+1} \quad \textit{dès que} \quad d = \sum_{i=1}^n d_i + \alpha d_{n+1}.$$

On choisit le plus grand entier $n \ge 0$ *tel que* $\sum_{i=1}^n d_i\lambda_i \ge 0$ *et on appelle dimension de Lyapunov, le nombre réel*

$$\dim_L(T,m) = \sum_{i=1}^n d_i + \frac{\sum_{i=1}^n d_i\lambda_i}{|\lambda_{n+1}|} = \sup\{d \ge 0 \mid \Lambda_d(T,m) \ge 0\}.$$

La courbe $d \mapsto \Lambda_d(T,m)$ est concave affine par morceau et intersecte l'axe horizontal en $\dim_L(T,m)$. Nous verrons plus tard comment définir une dimension de Lyapunov uniforme. Les résultats qui suivent étaient déjà connus en dimension finie [Le1], les travaux **[1]**, **[2]**, **[3]**, **[4]** ont pour objectif de les étendre en dimension infinie.

Théorème 31 [1], [2], [3] *Soit (X, ϕ, m) un système dynamique ergodique de classe $\mathcal{C}^{1+t}$ vérifiant $\int \ln^+ \|T_x\| dm(x) < +\infty$. On obtient alors*

(i) si les espaces E_x sont de Hilbert, on obtient une définition équivalente

$$\Lambda_d(T, m) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln \| \wedge^d T_x^n \| \quad \textit{const. p.p.}$$

où $\wedge^d$ désigne le produit extérieur d fois,

(ii) l'α-entropie du cocycle linéaire est donné par :

$$h_\alpha(T, m) = \sum_{i\geq 1} d_i(\lambda_i + \alpha)^+ = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln R(T_X^n, e^{-n\alpha}),$$

(iii) l'α-entropie de l'application est majorée par celle de sa différentielle :

$$\alpha \dim_F(m) \leq h_\alpha(\phi, m) \leq h_\alpha(T, m)$$

(iv) la fonction $\alpha \mapsto h_\alpha(\phi, m)$ est Lipschitz, plus précisément :

$$h_\beta(\phi, m) - h_\alpha(\phi, m) \leq h_\beta(T, m) - h_\alpha(T, m) \quad (\forall \beta \geq \alpha)$$

(v) la dimension de Lyapunov majore la dimension fractale :

$$\dim_F(m) \leq \dim_L(T, m) = \inf_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha} h_\alpha(T, m)$$

(vi) un cas d'égalité dans la formule entropique de Pesin

$$\dim_F(m) = \dim_L(T, m) \Rightarrow h_0(\phi, m) = \sum_{i\geq 0} d_1\lambda_i^+$$

Le dernier résultat (vi) est nouveau, même en dimension finie : on obtient l'égalité entropique de Pesin, $h(\phi, m) = \sum_{i\geq 0} d_i\lambda_i^+$, pour des transformations ϕ qui ne sont plus supposées inversibles. Le calcul exacte de $h_\alpha(\phi, m)$ en termes d'exposants de Lyapunov et de dimensions transverses n'est pas connu. On pourrait conjecturer :

Question 32 *Peut-on definir des dimensions transverses de mesure $\delta_i(m)$ associées à chaque exposant distinct λ_i de sorte que pour tout $\alpha \geq 0$*

$$h_\alpha(\phi, m) = \sum_{i\geq 1} \delta_i(m)(\lambda_i + \alpha)^+$$

Par contre, dans le cas de la mesure de Lebesgue :

Proposition 33 [4] *Si M est une variété compacte et $\phi : M \to M$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^{1+t}$ préservant une mesure de Lebesgue m, alors*

$$h_\alpha(\phi, m) = \sum_{i=1}^{N} d_i(\lambda_i + \alpha)^+$$

pour tout $\alpha \geq 0$. Ici $\dim(M) = \sum_{i=1}^{N} d_i$ et $\sum_{i=1}^{N} d_i\lambda_i = 0$.

Si $h_\alpha(\phi, m)$ avait été défini en termes de nombre de recouvrement (par exemple en prenant l'infimum sur tous les ensembles de mesures 1), l'inégalité $h_\alpha(\phi, m) \leq h_\alpha(T, m)$ aurait été plus facile à montrer. En fait, toutes les démonstrations du théorème précédent sont basées sur un lemme "maximal" de recouvrement :

Définition 34 [4] *On appelle recouvrement symétrique $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x\in X}$, une famille de parties boréliennes de X indexées par les points de X telle que*

(i) pour tout $x \in X$, $x \in A_x$

(ii) pour toute sous famille d'indices (pas forcément dénombrable), $Y \subset X$, il existe une famille dénombrable de parties boréliennes de X, $\{B_i\}_{i\geq 1}$, telle que $\cup_{y\in Y} A_y = \cup_{i\geq 1} B_i$ et telle que chaque B_i est inclus dans un des A_y.

On appelle double d'un recouvrement symétrique $\{A_x\}_{x\in X}$, le recouvrement symétrique $\{A_x^2\}_{x\in X}$, où $A_x^2 = \cup_{y\in A_x} A_y$.

C'est un peu abstrait, mais cette notion permet de traiter simultanément les recouvrements par des boules et les recouvrements par des partitions dénombrables. Elle permet aussi de dégager un lemme clef sur le rapport entre nombre de recouvrement et la mesure des parties qui servent à recouvrir :

Lemme 35 [4] *Soit $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x\in X}$ et $\mathcal{B} = \{B_x\}_{x\in X}$ deux recouvrements symétriques et $R(x)$ le nombre minimum de parties de $\mathcal{B}$ nécessaires pour recouvrir A_x^2. Alors, pour toute mesure de probabilité m sur X et pour tout $\lambda \in [0, 1]$,*

$$m\{x \in X \mid m(B_x^2) \leq \frac{\lambda}{R(x)} m(A_x)\} \leq \lambda.$$

En utilisant Borel-Cantelli, ce lemme entraîne immédiatement par exemple :

$$\limsup_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} \ln m[B_n^\beta(x,\epsilon)] \leq \limsup_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} \ln m[B_n^\alpha(x,\epsilon)] + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln r_n^{\alpha,\beta}(x,\epsilon)$$

où $r_n^{\alpha,\beta}(x,\epsilon)$ est le nombre minimum de boules de type $B_n^\beta(x, \frac{1}{2}\epsilon)$ nécessaires pour recouvrir $B_n^\alpha(x, 2\epsilon)$.

S'il est relativement naturel de définir sans ambiguïté des entropies et des dimensions fractales uniformes, on peut choisir plusieurs définitions (équivalentes comme on le verra) pour la dimension de Lyapunov.

Pour la suite de l'exposé, il est nécessaire de restreindre un peu plus le cadre de travail : on supposera que le cocycle d'opérateurs est uniformément asymptotiquement compact.

Définition 36 *Si $T : E \to E$ est un cocycle continu d'opérateurs, on dira qu'il est uniformément asymptotiquement compact si :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} \frac{1}{n} \ln \|T_x^n\|_\alpha = -\infty.$$

Définition 37 *Pour un cocycle continu d'opérateurs, uniformément asymptotiquement compact, $T : E \to E$ d'un fibré vectoriel de Banach, on définit d'abord une α-entropie uniforme par*

$$h_\alpha(T) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} \frac{1}{x} \ln R(T_x^n, e^{-n\alpha})$$

et dans le cas particulier d'un fibré vectoriel de Hilbert, on définit aussi un taux uniforme d'expansion d-dimensionelle :

$$\Lambda_d(T) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} \ln \| \wedge^d T_x^n \|$$

et par extension pour $s \in [0, 1[$:

$$\| \wedge^{d+s} T_x^n \| = \| \wedge^d T_x^n \|^{1-s} \| \wedge^{d+1} T_x^n \|^s.$$

On démontre d'abord facilement le théorème suivant :

Théorème 38 [3] *Dans le cadre d'un cocycle continu d'opérateurs, uniformément asymptotiquement compact ;*
(i) $h_\alpha(T) = \sup\{h_\alpha(T, m) \mid m \in \mathcal{M}_1^e(X, \phi)\}$
(ii) Dans le cas particulier d'un fibré vectoriel de Hilbert :

$$\Lambda_d(T) = \sup\{\Lambda_d(T, m) \mid m \in \mathcal{M}_1^e(X, \phi)\}$$

L'outil principal est un lemme de principe variationnel pour les suites sous-additives :

Lemme 39 [Le1] *Si* (X, ϕ) *est un système dynamique topologique et* $(f_n)_{n\geq 0}$ *est une suite sous-additive de fonctions réelles semi-continues supérieurement, il existe alors une mesure invariante ergodique* m *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} \frac{1}{n} f_n(x) = \lim_{n\to} \frac{1}{n} f_n(y) \quad m(dy) \ p.p.$$

C'est un principe variationnel différent de celui de Ruelle, mais dans les deux cas, il permet d'extraire du système dynamique, une mesure (pas forcément unique) aux propriétés prescrites. Nous verrons dans le chapitre **7** comment interpréter cette mesure maximisante, mais seulement pour un cocycle additif.

Le résultat qui suit est par contre un peu surprenant car il introduit des dimensions entières uniformes. On introduit d'abord deux définitions (a priori non équivalentes) suivant qu'on utilise $h_\alpha(T)$ ou $\Lambda_\alpha(T)$:

Définition 40 *Pour un cocycle* $T : E \to E$ *continu, uniformément asymptotiquement compact à valeur dans un Banach. On définit deux dimensions de Lyapunov :*

$$\dim_L^*(T) = \inf_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha} h_\alpha(T), \quad \dim_L(T) = \sup\{\dim_L(T, m) \mid m \in \mathcal{M}_1^e(, \phi)\}.$$

Théorème 41 [3] *Si* $T : E \to E$ *est un cocycle uniformément asymptotiquement compact à valeurs dans un espace de Banach* E*, on peut définir une suite strictement décroissante* $\{\lambda_i(T)\}_{i\geq 1}$ *(éventuellement finie) de réels et une suite d'entiers* $\{d_i(T)\}_{i\geq 1}$ *supérieurs ou égaux à 1 telles que*

$$h_\alpha(T) = \sum_{i\geq 1} d_i(T)\big(\lambda_i(T) + \alpha\big)^+ \qquad \forall\, \alpha \geq 0.$$

Ainsi, $\dim_L^*(T)$ *prend la même forme que précédemment avec :*

$$\dim_L^*(T) = \sum_{i=1}^{n} d_i(T) + \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i(T)\lambda_i(T)}{|\lambda_{n+1}(T)|},$$

où n *est le plus grand entier vérifiant :* $\sum_{i=1}^{n} d_i(T)\lambda_i(T) \geq 0$.

Dans le cas où T est la différentielle de ϕ et X vérifie exactement $\phi(X) = X$, on peut majorer la dimension de X en fonction du cocycle T :

Théorème 42 **[3]** *Si* (X, ϕ, T, E) *est un système dynamique de classe* $\mathcal{C}^1$*, où* X *vérifie* $\phi(X) = X$ *et où* T *est uniformément asymptotiquement compact, alors :*

$$\dim_F(X) \leq \dim_L^*(T) \quad \textit{et} \quad \dim_H(X) \leq \dim_L(T).$$

Si de plus T *est à valeurs dans un Hilbert, on peut alors trouver une mesure ergodique* $m \in \mathcal{M}_1^e(X, \phi)$ *qui réalise le supremum :*

$$\dim_L(T) = \dim_L(T, m).$$

4 Exposants de lyapunov en dimension 1

Le cadre de travail est ici encore beaucoup plus restrictif. Il s'agit de systèmes dynamiques unidimensionnels $(I, \{f_a\}_{a\in\mathcal{A}})$ où I est un intervalle, par exemple $I = [-1, 1]$, $\{f_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ est une famille $\mathcal{C}^3$ d'applications unimodales de I ayant un unique point critique c_0, non plat, par exemple :

$$c_0 = 0, \quad \text{et} \quad f_a''(c_0) \neq 0.$$

On peut choisir, pour simplifier, un système de coordonnées convenables, de sorte que, $c_1 = f_a(c_0) = 1$ et $c_2 = f_a^2(c_0) = -1$. L'exposant de Lyapunov est ici facile à calculer et s'obtient comme limite de Birkhoff des sommes

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln Df_a \circ f_a^k(x)$$

pour un x non pré-critique pour lequel la limite existe.

4.1 Cas d'une seule application f

L'orbite du point critique $\{c_n\}_{n\geq 0}$ est un invariant topologique et il est naturel d'introduire un exposant de Lyapunov "topologique" :

Définition 43 *Soit $f : I \to I$, une application unimodale $\mathcal{C}^2$. Si le point critique c_0 n'est pas périodique, on appelle exposant de Lyapunov "topologique" :*

$$\lambda_{\text{top}}(f) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |Df^n(c_1)|.$$

La condition $\lambda_{\text{top}} > 0$ est appelée première condition de Collet-Eckmann : il existe des constantes $\lambda > 0$ et $K > 0$ telles que

$$\text{(CE1)} \qquad |Df^n(c_1)| \geq K \exp(n\lambda) \quad \forall\, n \geq 0$$

On introduit aussi la deuxième condition de Collet-Eckmann :

$$\text{(CE2)} \qquad |Df^n(x)| \geq K \exp(n\lambda) \qquad \forall\, x \quad \text{t.q.} \quad f^n(x) = c_0$$

ainsi que la condition de Misiurewicz :

$$\text{(M)} \qquad \exists\, \epsilon > 0 \quad \text{t.q.} \quad f^n(c_0) \notin\,]c_0 - \epsilon, c_0 + \epsilon[. \quad \forall\, n \geq 1$$

La valeur de l'exposant n'est pas un invariant topologique, mais le fait qu'il soit nul ou bien strictement positif est par contre topologique :

Théorème 44 **[NoSa]** *Si $f, g : I \to I$ sont deux applications unimodales, de point critique non plat, à dérivée Schwarzienne strictement négative, et topologiquement conjuguées, alors*

$$\lambda_{\text{top}}(f) > 0 \iff \lambda_{\text{top}}(g) > 0.$$

L'existence d'un exposant topologique positif entraîne, pour simplifier dans le cas S-unimodal non plat, l'existence d'une mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à Lebesgue [CoEc], [BeCa1] ; en fait cette mesure est unique, ergodique, d'entropie strictement positive [BlLy3] et a des décroissances de corrélation exponentielles [CoEc]. Dans le théorème qui suit, on classifie toutes les applications S-unimodales non plates en fonction de leurs attracteurs : attracteur topologique A_{top} ou attracteur métrique A_{Leb} :

Théorème 45 [BlLy1], [BlLy2], [BrKeNoSt], [GrSw2], [Guc1], [Guc2], [HoKe2], [Mi1],[Mi2], [NoSt2]
Soit $f : I \to I$ une application S-unimodale $\mathcal{C}^3$ a point critique non plat. Alors un des trois cas suivants est réalisé,

- **cas I :** *f admet une orbite périodique attractive $A_{\text{top}} = \text{orb}(x^*)$, (i.e. $f^p(x^*) = x^*$ et $|Df^p(x^*)| \leq 1$). Génériquement (en fait pour un ouvert dense), presque tout point x satisfait $\omega(x) = A_{\text{top}}$. Lebesgue presque tout point x vérifie $\omega(x) = A_{\text{Leb}}$ pour un certain compact invariant A_{leb}. De plus $A_{\text{top}} = A_{\text{Leb}} = \omega(c_0)$, $h_{\text{top}}(f) = 0$ et $\lambda_{\text{top}} = 0$.*
- **cas II :** *f est renormalisable un nombre fini de fois. f admet un cycle d'intervalle : $A_{\text{top}} = \cup_{k=0}^{p-1} f^k(J)$ où J est un intervalles contenant le point critique, où $f^k(J)$ sont des intervalles deux à deux disjoints, où $f^p(J) = J$ et $f^p : J \to J$ est exacte (i.e. pour tout ouvert $U \subset J$, il existe $n \geq 0$ tel que $f^n(U) = J$) et donc en particulier transitive. Génériquement, presque tout x satisfait $\omega(x) = A_{\text{top}}$, Lebesgue presque tout point x vérifie $\omega(x) = A_{\text{Leb}}$ pour un certain compact invariant $A_{\text{Leb}} \subset A_{\text{top}}$ contenant $\omega(c_0)$. Ou bien $A_{\text{Leb}} = A_{\text{top}}$, ou bien $A_{\text{Leb}} = \omega(c_0)$ et A_{Leb} est alors de mesure nulle. De même, ou bien $\omega(c_0) = A_{\text{top}}$ et donc coïncide aussi avec A_{Leb}, ou bien $\omega(c_0)$ est de mesure nulle et $\omega(c_0)$ est alors minimal et $h_{\text{top}}(f) = 0$. Dans le cas où $A_{\text{Leb}} = A_{\text{top}}$, $\omega(c_0)$ de mesure nulle ou non, $f : A_{\text{top}} \to A_{\text{top}}$ est conservative ergodique comme endomorphisme non-singulier pour la mesure de Lebesgue. Dans le cas où $A_{\text{Leb}} = A_{\text{top}}$, et $\omega(c_0)$ de mesure nulle,*

$f : A_{\mathrm{top}} \to A_{\mathrm{top}}$ est de type II (i.e. admet une mesure σ-finie équivalente à Lebesgue) ; si f est de plus de type II_1, l'unique probabilité invariante m absolument continue à Lebesgue est d'entropie métrique $h_m(f) > 0$. L'exposant λ_{top} peut être nul ou strictement positif.

– **cas III :** *f est infiniment renormalisable. Il existe une suite décroissante d'intervalles $\{I_n\}_{n\geq 0}$ contenant c_0, il existe une suite croissante d'entiers $\{p_n\}_{n\geq 0}$, p_n divisant p_{n+1} strictement, tel que $\{f^k(I_n)\}_{k=0}^{p_n-1}$ soient deux à deux disjoints et $f^{p_n}(I_n) \subset I_n$. On note $A_{\mathrm{top}} = \cap_{n\geq 0}\cup_{k=0}^{p_n-1} f^k(I_n)$. Génériquement et Lebesgue presque tout x vérifie $\omega(x) = A_{\mathrm{top}}$. Ici $A_{\mathrm{top}} = A_{\mathrm{Leb}} = \omega(c_0)$ est minimal, uniquement ergodique, de mesure nulle, conjugué à une rotation sur un groupe compact et $h_{\mathrm{top}}(f) = 0$ et $\lambda_{\mathrm{top}} = 0$.*

De ce théorème, on dégage une classification en trois sous-cas du cas renormalisable un nombre fini de fois :

– **cas II$_a$:** $\omega(c_0) = A_{\mathrm{Leb}} = A_{\mathrm{top}}$,
– **cas II$_b$:** $\omega(c_0) \subsetneq A_{\mathrm{Leb}} = A_{\mathrm{top}}$ et $\mathrm{Leb}(\omega(c_0)) = 0$,
– **cas II$_c$:** $\omega(c_0) = A_{\mathrm{Leb}} \subsetneq A_{\mathrm{top}}$ et $\mathrm{Leb}(\omega(c_0)) = 0$.

Le cas II_b arrive par exemple pour des applications Misiurewicz [Mi1]. Dans le cas II_c, A_{Leb} s'appelle attracteur étrange. Un tel attracteur existe pour des applications où le degré de criticalité est élevé [BrKeNoSt] mais il n'existe pas dans la famille quadratique. Dans le cas II_a, f est conservative ergodique sur un cycle d'intervalles [BlLy3].

Question 46 *Existe-t-il un exemple d'application f, $\mathcal{C}^3$, S-unimodale, à point critique non plat et renormalisable un nombre fini de fois qui vérifie à la fois :*
(i) $A_{\mathrm{top}} = A_{\mathrm{Leb}} = \omega(c_0)$,
(ii) f est de type III au sens de Krieger ?

Le théorème précédent permet de cerner le cas qui peut supporter une mesure invariante de probabilité absolument continue par rapport à Lebesgue. On commence par introduire la définition :

Définition 47 [Ke] *Si $f : I \to I$ est S-unimodale non plate, il existe un réel $\lambda_{\mathrm{Leb}}(f)$ vérifiant pour Lebesgue presque tout x*

$$\lambda_{\mathrm{Leb}}(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |Df^n(x)|.$$

Keller a montré la classification suivante :

Théorème 48 [Ke] *Si $f : I \to I$ est S-unimodale non plate,*

(i) si $\lambda_{\mathrm{Leb}}(f) > 0$, f est renormalisable un nombre fini de fois d'attracteur topologique un cycle transitif d'intervalles et f admet une probabilité invariante absolument continue μ :

$$h_\mu(f) = \lambda_{\mathrm{Leb}}(f), \quad \mathrm{supp}(\mu) = A_{\mathrm{top}} = A_{\mathrm{Leb}}, \quad \omega(\delta_x) = \{\mu\}, \quad \textit{Leb. p.p.}$$

(ii) si $\lambda_{\mathrm{Leb}}(f) \leq 0$, f n'admet pas de probabilité invariante absolument continue et l'enveloppe convexe de $\omega(\delta_c)$ contient $\omega(\delta_x)$ pour Lebesgue presque tout x.

Dans le cas $\lambda_{\mathrm{Leb}}(f) > 0$, quelle relation a-t-on entre μ et $\omega(\delta_c)$) ? Quelle relation a-t-on entre λ_{Leb} et λ_{top} ? Peut-on avoir tout le temps $\lambda_{\mathrm{Leb}} \geq \lambda_{\mathrm{top}}$? Un troisième exposant uniforme peut servir de critère pour l'existence de mesures invariantes à densité :

Définition 49 *Soit $\mathrm{Per}_n(f)$, l'ensemble des points périodiques de f d'ordre n. On appelle exposant uniforme :*

$$\lambda_{\mathrm{per}}(f) = \inf_{n\geq 1} \inf_{x\in \mathrm{Per}_n(f)} \frac{1}{n} \ln |Df^n(x)|.$$

Nowicki et Sands ont alors démontré le résultat suivant :

Théorème 50 [NoSa] *Si f est S-unimodale, non plate, sans point périodique stable, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lambda_{\mathrm{top}} > 0$,

(ii) $\lambda_{\mathrm{per}} > 0$,

(iii) f admet une probabilité invariante à densité avec des taux de décroissance exponentielle de corrélation.

Le cas des applications unimodales qui ne sont pas à dérivée schwarzienne négative est bien moins compris. Le seul résultat suffisamment général est le suivant :

Théorème 51 [NoSt1], [St] *Soit $f : I \to I$ une application $\mathcal{C}^3$, unimodale, sans point critique plat et sans point périodique stable.*

(i) si f vérifie les deux conditions de Collet-Eckmann (CE1) et (CE2), f admet alors une probabilité invariante absolument continue par rapport à Lebesgue,

(ii) si f est Misiurewicz (M), f vérifie alors les deux conditions de Collet-Eckmann. De plus, il existe $K^* > 0$, $\lambda^* > 0$ et $\epsilon^* > 0$ telles que, pour toute orbite $\{x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\}$ disjointe du point critique $c_0 = 0$:

$$f^n(x) \in]-\epsilon^*, \epsilon^*[\quad \Longrightarrow \quad |Df^n(x)| \geq K^* \exp(n\lambda^*).$$

La deuxième partie de ce théorème n'est pas énoncée telle quelle dans la littérature mais elle permet de supprimer une hypothèse technique dans [**6**]. La question de savoir si (CE1) $\Rightarrow$ (CE2) pour des applications unimodales pas forcément à dérivée schwarzienne négative n'a pas encore de réponse.

4.2 Famille à 1 paramètre [5]-[6]

On considère maintenant une famille $\{f_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ d'applications unimodales, de classe $\mathcal{C}^2$, sur $I = [-1, 1]$ (normalisée une fois pour toute par $f'(0) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ et à point critique c_0 non plat $f_a''(0) \neq 0$). On suppose que pour un paramètre particulier a^*, la transformation f_{a^*} est Misiurewicz et vérifie une condition de transversalité (T) que nous allons expliciter. Rappelons d'abord l'existence d'une famille de cantors hyperboliques décrivant la structure topologique du système dynamique.

Théorème 52 **[Man2]** *Si $f_* : I \to I$ est une application unimodale $\mathcal{C}^2$, sans point périodique stable, alors pour tout $\epsilon > 0$, le compact*

$$\Lambda_\epsilon = \mathrm{adh}\{x \in I \mid f^n(x) \notin]-\epsilon, \epsilon[\quad \forall n \geq 0\}$$

est un ensemble uniformément hyperbolique de mesure de Lebesgue nulle.

On peut améliorer sensiblement ce résultat en précisant cette structure hyperbolique sous-jacente si on suppose de plus la transformation f non plate et Misiurewicz :

Théorème 53 **[BeCa1], [6]** *Soit $f_* : I \to I$, unimodale, $\mathcal{C}^2$, sans point périodique stable, non plate et Misiurewicz. Alors il existe un exposant $\lambda^* > 0$, une constante $K^* > 0$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ (suffisamment petit) et pour toute orbite $\{x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\}$ de longueur n, disjointe du voisinage $]-\epsilon, \epsilon[$ du point critique, c'est-à-dire vérifiant, $\forall\, 0 \leq k < n \quad f_*^k(x) \notin]-\epsilon, \epsilon[$, on a*

(i) $|Df_*^n(x)| \geq K^* \epsilon \exp(n\lambda^*)$, *(on note la dépendance en* ϵ*),*
(ii) si de plus $f^n(x) \in]-\epsilon, \epsilon[$ *alors* $|Df_*^n(x)| \geq K^* \exp(n\lambda^*)$,
(iii) si de plus $x \in]-\epsilon, \epsilon[$ *et* $f^n(x) \in]-\epsilon, \epsilon[$ *alors* $|Df_*^n(x)| \geq \exp(n\lambda^*)$.

La preuve de ce théorème utilise à la fois le résultat de Mañé [Man2] et aussi le lemme des retours bornés de Benedicks-Carleson [BeCa1] (version affaiblie due à l'hypothèse Misiurewicz). Ce théorème affirme l'existence d'un exposant λ^* uniforme indépendant de l'orbite qui peut être aussi proche de point critique que l'on veut. Il dit aussi que, pour le calcul de $|Df^n(x)|$, une seule mauvaise dérivée intervient :

$$|Df^n(x)| \geq K^* \inf_{0 \leq k < n} |Df \circ f^k(x)| \exp(n\lambda^*).$$

Par ailleurs, il n'est pas difficile de démontrer une version perturbée du théorème précédent pour des familles à un paramètre $\{f_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ au voisinage d'un f_{a^*} Misiurewicz. Le voisinage des paramètres dépend alors de la taille ϵ du voisinage critique que l'on évite.

Si f_{a^*} est Misiurewicz, le Cantor $\Lambda^* = \{x \mid f^n(x) \notin]-\epsilon^*, \epsilon^*[\}$ est hyperbolique pour un certain ϵ^* petit et contient l'orbite de la valeur critique $\{c_n(a^*)\}_{n \geq 1}$. Un tel Cantor sera appelé ultérieurement Cantor de Misiurewicz. Pour décrire proprement la condition de transversalité (T), on introduit la notion de continuation $\mathcal{C}^1$ d'un Cantor :

Définition 54 *Soit* $\{f_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ *une famille* $\mathcal{C}^2$ *à un paramètre,* $a^* \in \mathcal{A}$ *et* Λ^* *un compact de* I*, invariant par* f_{a^*}*,* $f_{a^*}(\Lambda^*) \subset \Lambda^*$*. On appelle continuation* $\mathcal{C}^1$ *de* Λ^**, une application* $\chi : \Lambda^* \times \mathcal{A} \to I$ *telle que :*
(i) $\forall\, a \in \mathcal{A}$*,* $\chi(x, a)$ *est injective en* x *et* $\chi(x, a^*) = x$ *pour tout* $x \in \Lambda^*$*,*
(ii) $\forall\, x \in \Lambda^*$*,* $\chi(x, a)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *en* a*,*
(iii) $\chi(x, a)$ *et* $\frac{\partial}{\partial a}\chi(x, a)$ *sont continues en* (x, a)*.*
(iv) $\forall\, x \in \Lambda^*$*,* $\forall\, a \in \mathcal{A}$*,* $f_a \circ \chi(x, a) = \chi(f_{a^*}(x), a)$*.*

Pour chaque $a \in \mathcal{A}$, χ_a (défini par $\chi_a(x) = \chi(x, a)$) envoie Λ^* sur un compact Λ_a invariant par f_a et conjugue la dynamique de (f_{a^*}, Λ^*) à celle de (f_a, Λ_a).

Proposition 55 [6] *Soit* $\mathcal{F} = \{f_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ *une famille* $\mathcal{C}^2$ *à un paramètre,* a^* *un point de Misiurewicz et* Λ^* *un Cantor de Misiurewicz. On note par*

$c_n(a) = f_a^n(c_0)$ *l'orbite de la valeur critique, et par* $\chi_n(a) = \chi(c_n(a^*), a)$, *la continuation* $\mathcal{C}^1$ *de cette orbite. Alors en* $a = a^*$, *on a* $\chi_n(a^*) = c_n(a^*)$ *et*

$$\big(\frac{d}{da}c_{n+k} - \frac{d}{da}\chi_{n+k}\big)_{a=a^*} = Df_{a^*}^k(c_n(a^*))\big(\frac{d}{da}c_n - \frac{d}{da}\chi_n\big)_{a=a^*}.$$

Et on dira que la famille $\mathcal{F}$ *est transverse au Cantor de Misiurewicz (ou vérifie la condition de transversalité (T)) si pour un entier* $n \geq 1$ *ou pour tout entier* $n \geq 1$ *:*

$$\text{(T)} \qquad \frac{d}{da}c_n(a^*) \neq \frac{d}{da}\chi_n(a^*).$$

Une manière équivalente d'écrire la condition (T) sans introduire un Cantor de Misiurewicz est par exemple de vérifier la condition :

$$\begin{aligned}
\text{(T)} \qquad Q(a^*, \mathcal{F}) &\overset{def}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{d}{da}c_n(a^*)/Df_{a^*}^{n-1}(c_1) \\
&= \big(\frac{d}{da}c_n(a^*) - \frac{d}{da}\chi_n(a^*)\big)/Df_{a^*}^{n-1}(c_1) \qquad \forall\, n \geq 1 \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

C'est une condition difficile à vérifier dans la pratique. Dans le cas où c_0 est pré-périodique, c'est-à-dire dans le cas où il existe x^*, p-périodique pour f_{a^*} tel que $c_N(a^*) = x^*$ pour un certain $N \geq 1$, la condition de transversalité (T) revient à montrer la transversalité de $a \mapsto c_N(a)$ et de $a \mapsto \chi_N(a)$ au point a^* où $\chi_N(a)$ est la continuation $\mathcal{C}^1$ du point périodique x^*. Tsujii [Tsu2] a montré que la famille quadratique $q_a(x) = 1 - ax^2$, $x \in [-1, 1]$ vérifie bien la condition (T) en tout point de Misiurewicz.

L'écriture explicite de la condition de transversalité (T) permet de montrer aussi que cette condition est génériquement vérifiée parmi les familles à un paramètre $\mathcal{C}^2$. On considère ici l'espace $\mathcal{R}(a^*, f_*)$ des applications continues $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^2(I)$ telles que $f_{a^*} = f_*$, muni de la topologie uniforme

$$\|F = \{f_a\}\| = \sup_{x,a}\{|f_a(x)| + |Df_a(x)| + |D^2 f_a(x)|\}$$

où f_* est une application unimodale Misiurewicz non plate.

Le but de l'article **[6]** est d'étendre [BeCa1] dans deux directions. Benedicks-Carleson considère la famille quadratique $\{q_a\}_{a\in[1,2]}$ et le paramètre de

Misiurewicz $a^* = 2$. Dans **[6]**, nous considérons des familles génériques à un paramètre et des paramètres quelconques de Misiurewicz. Nous montrons que ces paramètres sont tous points de densité des paramètres Collet-Eckmann, montrant ainsi, comme dans Jacobson [Ja], qu'ils sont points de densité des paramètres a pour lesquels f_a admet une probabilité invariante absolument continue par rapport à Lebesgue. Plus précisément, le résultat central de **[6]** est le suivant (voir aussi [MoVi], [Tsu1]) :

Théorème 56 **[5], [6]** *Soit* $\{f_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ *une famille à un paramètre de classe* $\mathcal{C}^2$*, d'applications unimodales de l'intervalle* $I = [-1, 1]$ *de point critique* $c_0 = 0$ *supposé non plat,* $f_a''(c_0) \neq 0$. *On suppose que le paramètre* a^* *est Misiurewicz (M) et que* f_{a^*} *vérifie la condition de transversalité (T). Il existe alors des constantes* $K^* > 0$*,* $\epsilon^* > 0$ *et des exposants* $\alpha^* > 0$ *et* $\lambda^* > 0$ *tels que* a^* *soit point de densité de l'ensemble des paramètres* $a \in \mathcal{BC}(K^*, \epsilon^*, \alpha^*, \lambda^*)$ *défini par les propriétés suivantes :*

(PS) f_a *n'a pas de point périodique stable,*

(RE) $\mathrm{dist}(f_a^n(c_0), c_0) \geq \epsilon^* \exp(n\alpha^*) \quad (\forall\, n \geq 0),$

(CE1) $|Df_a^n(c_1)| \geq K^* \exp(n\lambda^*) \quad (\forall\, n \geq 0),$

(CE2) si $f_a^n(x) = c_0$ *alors* $|Df_a^n(x)| \geq K^* \exp(n\lambda^*) \quad (\forall\, n \geq 0).$

On remarque dans l'énoncé précédent que les exposants et les constantes ne dépendent pas de a suggérant une continuité (au sens point de densité) de l'exposant $\lambda_{\mathrm{top}}(f_a)$ par rapport à a. On remarque enfin qu'en combinant le théorème général de [NoSt1] et le résultat précédent, on obtient que tout point a^* Misiurewicz vérifiant la condition (T) est point de densité des paramètres a admettant une probabilité invariante à densité.

Bien sûr, plein d'autres paramètres n'ont pas d'aussi jolies propriétés ergodiques vis-à-vis de Lebesgue. Dans la famille quadratique, Sands [San] a montré que les paramètres Misiurewicz avaient une mesure de Lebesgue nulle ; Graczyk et Swiatek [GrSw2] ont montré que l'ensemble des paramètres admettant un point périodique stable (unique) est ouvert et dense ; Martens et Nowicki [MaNo] ont montré que parmi les paramètres a sans point périodique stable et renormalisable un nombre fini de fois, pour Lebesgue presque tout a, q_a admet une probabilité invariante à densité. Lyubich a montré que l'ensemble des paramètres infiniment renormalisables de la famille quadratique est de mesure de Lebesgue nulle.

5 Transformations non-singulières

Au lieu de s'intéresser à des transformations ϕ préservant une mesure donnée m, comme nous l'avons fait précédemment, nous considérons ici des transformations qui préservent seulement la classe de la mesure. Par exemple, si $\phi : M \to M$ est une transformation lisse sur une variété M, ϕ préserve la classe de la mesure de Lebesgue. On peut aussi construire des exemples abstraits, de type Bernoulli, comme dans le lemme :

Lemme 57 **[Kak]** *On considère comme système dynamique, le shift bilatéral complet à deux symboles* $\{0, 1\}$*, le décalage vers la gauche* σ *et la mesure produit* $m = \Pi_{k\in\mathbb{Z}}(p_k\delta_0 + q_k\delta_1)$ *: produit infini des mesures chargeant 0 avec probabilité* p_k *et 1 avec probabilité* q_k*. Alors* σ *est non-singulière pour la mesure* m *si et seulement si* $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\ln p_k/q_k)^2 < +\infty$*.*

Parmi ces transformations non-singulières ϕ, certaines n'admettent pas de mesure σ-finie (ou finie) invariante par ϕ et équivalente à la mesure de référence m. On appelle ces transformations, des transformations de type III.

5.1 Transformations de type III

Krieger [Kri] a donné une description plus précise des transformations de type III en utilisant les valeurs essentielles du cocycle $\omega(n, x)$. Rappelons qu'il existe par hypothèse, dans le cas inversible, une dérivee de Radon Nikodym, ou jacobien, $\omega(x)$ caractérisée par

$$\int f \circ \phi \, \omega \, dm = \int f \, dm$$

pour toute fonction test $f \in L^1(m)$. Le jacobien de f^n est alors

$$\omega(n, x) = \omega \circ \phi^{n-1}(x) \cdots \omega \circ \phi(x)\omega(x).$$

Définition 58 *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$*,* $N_\epsilon(\lambda)$ *désigne un voisinage de* λ*, (pour* $\lambda = \infty$*, ce voisinage vaut* $]1/\epsilon, \infty]$*). On dit que* $\lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ *est une valeur essentielle de* $\omega(n, x)$ *si pour tout borélien* B *de mesure positive et pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe un entier* $n \geq 1$ *telque*

$$m\{x \in B \mid \phi^n(x) \in B \quad et \quad \omega(n, x) \in N_\epsilon(\lambda)\} > 0.$$

On note $\mathcal{R}(\phi, m)$*, l'ensemble des valeurs essentielles de* $\omega(n, x)$*.*

Cette notion n'est intéressante que si ϕ est déjà conservative. Or, pour des transformations inversibles non-singulières, la conservativité de ϕ est équivalente à la récurence du cocycle $\omega(n,x)$, c'est-à-dire au fait que 1 est valeur essentielle de $\omega(n,x)$. On arrive ainsi à la classification :

Définition 59 *Soit $\phi : X \to X$ inversible, non-singulière, conservative et ergodique pour une mesure m. Alors $\mathcal{R}(\phi,m) \cap]0,+\infty[$ est un sous-groupe multiplicatif de $]0,+\infty[$ et $\mathcal{R}(\phi,m)$ est fermé dans $[0,+\infty]$.*
(i) ϕ est dite de type III_λ, $\lambda \in]0,1[$, si $\mathcal{R}(\phi,m) = \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0,+\infty\}$,
(ii) ϕ est dite de type III_0, si $\mathcal{R}(\phi,m) = \{0,1,+\infty\}$, (i.e. $\lambda = 0$),
(iii) ϕ est dite de type III_1 si $\mathcal{R}(\phi,m) = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, (i.e. $\lambda = 1$).

Ornstein [Or] fut le premier à construire un rang 1 non-singulier de type III_λ (par rapport à la mesure de Lebesgue). Katznelson a construit ensuite un exemple lisse de telles transformations :

Théorème 60 [Kat1] *Il existe pour tout $\lambda \in [0,1]$ un ensemble dense de difféomorphismes ϕ du cercle, conservatifs, non-singuliers du type III_λ.*

Hawkins a généralisé par la suite ce résultat en montrant :

Théorème 61 [Haw] *Pour tout $\lambda \in [0,1]$, toute variété compacte de dimension supérieure ou égale à 3 supporte un difféomorphisme conservatif non-singulier de type III_λ.*

Enfin Ckoksi, Hawkins et Prasad on obtenu :

Théorème 62 [ChHaPr] *Les difféomorphimes $\mathcal{C}^\infty$ du cercle, ergodiques non-singuliers, conservatifs de type III_1 forme un G_δ dense pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$.*

Pour des variétés quelconques, de type III_1, un résultat similaire n'est pas connu.

5.2 Transformations markoviennes [7], [8]

La théorie des transformations non-singulières et non bijectives est bien moins connue et nous reprenons dans les articles [7] et [8] la théorie à ses débuts (Birkhoff, Kingman, extension naturelle, entropie). Un des objectifs que nous poursuivions aussi était de construire un exemple, dans la famille quadratique q_a précédente, de transformations conservatives ergodiques de type III.

Dans le cas des endomorphismes non-singuliers, il n'y a pas unicité de la "dérivée de Radon Nikodym". On introduit alors une notion similaire :

Définition 63 [7] *On dit qu'une transformation $\phi : X \to X$ est markovienne s'il existe une fonction mesurable $\omega : X \to \mathbb{R}^+$ telle que*

$$\int f \circ \phi \, \omega \, dm = \int f \, dm$$

pour toute fonction borélienne positive f. On pose alors

$$\omega(n, x) = \omega \circ \phi^{n-1} \cdots \omega \circ \phi(x) \omega(x).$$

On appelle un tel ω, un jacobien markovien.

Remarquons que, pour une transformation "monotone par morceau", si $\mathcal{L}$ désigne l'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius, ϕ est markovienne pour ω si et seulement si $\mathcal{L}(\omega) = 1$.

Nous allons supposer dans la suite que la transformation est conservative. Dans le cas bijectif, conservativité est équivalent à ω-récurence. Dans le cas non bijectif, cela n'est plus vrai.

Définition 64 [7] *La transformation ϕ est dite ω-récurente si*

$$\sum_{k \geq 0} f \circ \phi^k \omega_k = +\infty$$

pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}^+_*$ strictement positive (ou pour seulement une seule fonction f).

Une transformation ω-récurente est bien sûr conservative. Eigen-Silva [EiSi] on montré que, pour des transformations monotones par morceaux et markoviennes, on pouvait toujours construire un ω non récurent. Par contre :

Proposition 65 [7] *Si ϕ est de type II (II_1 ou II_∞), conservative non-singulière, alors ϕ admet un unique jacobien marcovien récurent.*

Le cas des transformations de type III n'est pas connu. Tester si ω est récurent n'est pas facile, on peut utiliser le critère suivant :

Proposition 66 [7] *Si ϕ est markovienne pour ω et si $\omega > 0$ p.p., les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) ϕ est ω-récurente,
(ii) le produit fibré $\phi_\omega(x,t) = (\phi(x), t/\omega(x))$ sur $X \times \mathbb{R}_*^+$ est conservatif pour la mesure invariante σ-finie $m \otimes \mathrm{Leb}$,
(iii) 1 est valeur essentielle du cocycle $\omega(n,x)$.

Le produit fibré précédent est appelé extension de Maharam ; il est par exemple conservatif ergodique si et seulement si ϕ est de type III_1. Rappelons, en rapport avec le résultat [ChHaPr], que l'ensemble des transformations m-ergodiques, pour une mesure invariante σ-finie m fixée, forme un G_δ dense pour la topologie :

$$(\phi_n)_{n\geq 0} \quad \text{converge vers} \quad \phi \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} m(\phi_n(B)\Delta\phi(B)) = 0$$

pour tout borélien B de mesure finie (Δ désigne la différence symétrique).

La démonstration de ces résultats a nécessité de reprendre la théorie de Hurewicz (l'équivalent de Birkhoff en théorie non-singulière) pour des transformations markoviennes qui ne sont plus a priori inversibles.

Théorème 67 [7] *Supposons pour simplifier $m(X) = 1$. Alors pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}_*^+$ intégrables*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f \circ \phi^k \omega_k}{\sum_{k=0}^{n-1} g \circ \phi^k \omega_k} = \frac{\mathbf{E}[f \mid \mathcal{I}]}{\mathbf{E}[g \mid \mathcal{I}]}$$

m p.p. en tout point où $\sum_{k\geq 0} g\circ\phi^k\omega_k = +\infty$. ($\mathcal{I}$ désigne la tribu des boréliens invariants).

Pour la démonstration, nous utilisons la notion de temps hyperbolique rencontrée au chapitre **3** ou plus précisément un lemme maximal temporel. En fait, le même lemme permet d'étendre Hurewicz à des suites sous-additives et de démontrer un théorème de type Kingman [Ki] pour des transformations non-singulières :

Théorème 68 [**7**] *Supposons pour simplifier,* $m(X) = 1$*. Alors pour toute suite* (f_n) *sous-additive de fonctions intégrables, c'est-à-dire toute suite vérifiant*

$$f_{n+m} \leq f_n \circ \phi^m \omega_m + f_m \quad m \ p.p.,$$

pour tout $g : X \to \mathbb{R}_*^+$ *intégrable et* $g_n = \sum_{k=0}^{n-1} g \circ \phi^k \omega_k$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_n}{g_n} = \inf\{\frac{1}{n}\frac{\mathbf{E}[f_n \mid \mathcal{I}]}{\mathbf{E}[g \mid \mathcal{I}]} \mid n \geq 1\}$$

m p.p. en tout point où $\sum_{k\geq 0} g \circ \phi^k \omega_k = +\infty$.

Nous n'avons pas d'application à ce théorème comme par exemple une application à l'existence d'exposants de Lyapunov pour des transformations non-singulières. Dans [**8**], nous poursuivons cette étude de base des endomorphismes non-singuliers markoviens : nous développons par exemple les notions d'entropie et d'extension naturelle. Rapellons pour commencer le théorème d'Abramov :

Théorème 69 (Abramov) *Si* $\phi : X \to X$ *préserve une mesure de masse finie m et s'il existe un borélien B qui "engendre" X, au sens* $\cup_{n\geq 1}\phi^{-n}B = X$*, alors*

$$h_m(\phi) = m(B)h_{m_B}(\phi_B)$$

où $\phi_B : B \to B$ *est l'application induite sur B et m_B est la mesure normalisée sur B.*

Ce théorème permet de définir une entropie pour des transformations préservant une mesure σ-finie. Krengel propose la définition suivante :

Définition 70 [**Kre**] *Si* $\phi : X \to X$ *préserve une mesure σ-finie et conservative, on appelle entropie de ϕ :*

$$k_m(\phi) = \sup\{m(B)h_{m_B}(\phi_B) \mid B \textit{ borélien de mesure finie}\}.$$

En dehors d'une normalisation de m choisie à l'avance, l'entropie de Krengel prend essentiellement 3 valeurs : $\{0, \text{finie}, +\infty\}$. Par exemple, nous avons le lemme suivant (similaire à celui de Parry [Pa], mais il semblerait qu'il y ait une erreur dans celui-ci) :

Proposition 71 [8] *Si $\phi : X \to X$ est conservative et préserve une mesure σ-finie m, si $\psi : Y \to Y$ préserve une mesure finie (de masse 1 par exemple) λ, alors $\phi \times \psi$ est conservative pour la mesure $m \otimes \lambda$ et*

$$k_{m\otimes\lambda}(\phi \times \psi) \geq \lambda(Y)k_m(\phi) + m(X)h_\lambda(\psi).$$

En particulier, si $m(X) = +\infty$ et si $h_\lambda(\phi) > 0$ alors $k_{m\otimes\lambda}(\phi \times \psi) = +\infty$.

Il n'y a pas égalité comme on le verra plus tard. En utilisant de nouveau le produit fibré de Maharam ϕ_ω, on peut introduire une notion d'entropie pour les transformations non-singulières ω-récurentes :

Définition 72 [8] *Si $\phi : X \to X$ est une transformation ω-markovienne pour une mesure σ-finie m, si ϕ est ω-récurente, on appelle entropie de ϕ :*

$$s_{\omega,m}(\phi) = k_{m\otimes\mathrm{Leb}}(\phi_\omega)$$

où $\phi_\omega(x, t) = (\phi(x), t/\omega(x))$ est le produit fibré de Maharam.

Cet entropie, maintenant, ne prend plus que 2 valeurs $\{0, +\infty\}$ mais possède en revanche toutes les propriétés d'une entropie, par exemple :

Lemme 73 [8] *Si ϕ est non-singulière et ω-récurente,*
(i) $s_{\omega,m}(\phi) \in \{0, +\infty\}$,
(ii) $s_{\omega\otimes 1,m\otimes\lambda}(\phi \times \psi) = +\infty$ si ψ préserve une mesure finie λ d'entropie non nulle,
(iii) $s_{\omega_B,m_B}(\phi_B) = s_{\omega,m}(\phi)$ pour tout borélien B non trivial de masse finie.

Nous finirons cette partie par des calculs explicites d'entropie de transformations de type III_λ. Rappelons qu'un tel ω est cohomologue à un ω' ne prenant des valeurs que dans $\{\lambda^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et pour cet ω', son entropie est calculable plus simplement :

Lemme 74 [8] *Si ϕ est markovienne pour (ω, m) et si ω prend ses valeurs dans $\{\lambda^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ pour un certain $\lambda \in]0, 1[$, alors $\phi_1 : X \to X$, défini comme application induite de ϕ_ω sur $X \times \{1\}$, préserve m et*

$$s_{\omega,m}(\phi) = k_m(\phi_1).$$

Par exemple, l'odomètre non- singulier à deux états où $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ϕ est l'addition par 1 avec retenue et $m = \Pi_{\mathbb{N}}(1/(1+\lambda), \lambda/(1+\lambda))$, est ergodique conservatif et de type III_λ. De plus :

Lemme 75 [8] *Pour l'odomètre non singulier binaire ϕ, on a :*
(i) $\phi_1(0 \overset{p}{\cdots} 01 \overset{q}{\cdots} 110 \cdots) = (1 \overset{q}{\cdots} 10 \overset{p}{\cdots} 001 \cdots)$,
(ii) $h_m(\phi_1) = s_{\omega,m}(\phi) = 0$.

Un autre exemple de calcul d'entropie pour un odomètre ternaire est rédigé dans [8] et le calcul donne aussi sans grande surprise, $s_{\omega,m}(\phi) = 0$.

Enfin, dans une dernière partie, nous construisons l'extension naturelle d'une transformation markovienne récurente. Rappelons que, si $\mathcal{F}$ désigne une tribu invariante par ϕ, i.e. $\phi^{-1}\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$, si ϕ est bijective, on dit que $\mathcal{F}$ engendre $\mathcal{B}(X)$, la tribu des boréliens de X, si $\bigvee_{n\geq 0} \phi^n \mathcal{F} = \mathcal{B}(X)$.

Proposition 76 [8] *Si ϕ est markovienne pour (ω, m),*
(i) il existe une unique extension (à isomorphisme près), $(\tilde{X}, \tilde{\phi}, \tilde{m}, \tilde{\pi})$, où $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to X$ commute avec $\tilde{\phi}$ et ϕ, où $\tilde{\pi}_* \tilde{m} = m$, où $\tilde{\phi}$ est bijective non-singulière pour $\tilde{m}$ de jacobien (unique) $\tilde{\omega} = \omega \circ \tilde{\pi}$ et où $\tilde{\pi}^{-1}\mathcal{B}(X)$ engendre $\mathcal{B}(\tilde{X})$,
(ii) $\tilde{\phi}$ est conservative si et seulement si ϕ est ω-récurente,
(iii) $\tilde{\phi}$ est conservative ergodique de type III si et seulement si ϕ est ergodique ω-récurente de type III.

Le lemme essentiel qui sert à la démonstration de cette proposition est :

Lemme 77 [8] *Si ϕ est une transformation non-singulière conservative et bijective, si $\mathcal{F}$ est ϕ-invariante (i.e. $\phi^{-1}\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$) et engendre $\mathcal{B}(X)$, si on se donne $h : X \to \mathbb{R}_*^+$, a priori $\mathcal{B}(X)$-mesurable et telle que $h/h \circ \phi$ est $\mathcal{F}$-mesurable, alors h en en fait déjà $\mathcal{F}$-mesurable.*

Ce résultat est standard en mesure invariante finie ; nous l'avons étendu aux transformations non singulières.

5.3 Entropie et distalité d'un système

Dans un travail en cours, nous montrons qu'on peut construire ϕ préservant une mesure de probabilité, faiblement mélangeante, d'entropie nulle et ψ préservant une mesure σ-finie d'entropie nulle telle que $k(\phi \times \psi) = +\infty$. En fait, on peut caractériser par couplage le fait que ϕ ne soit pas distal. Rappelons d'abord le théorème de structure de Furstenberg :

Définition 78 *Soient $\phi : X \to X$ une transformation préservant une probabilité m, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, deux sous-tribus de $\mathcal{B}(X)$, ϕ-invariantes. On dit que $\mathcal{G}$ est une extension compacte de $\mathcal{F}$ si pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\mathcal{G})$ et $\epsilon > 0$, il existe $g_1, \cdots, g_r$ dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{B}(X))$ tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$m\{x \in X \mid \min_{1 \leq i \leq r} \mathbf{E}[(f \circ \phi^n - g_i)^2 \mid \mathcal{F}](x) < \epsilon\} > 1 - \epsilon.$$

Définition 79 [Fu3] *On dit qu'une sous-tribu $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}(X)$, ϕ-invariante est distale s'il existe une famille croissante (pour l'inclusion) $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ parmétrée par un ensemble dénombrable bien ordonné I telle que*

(i) $\min\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\} = \{\emptyset, X\}$, $\max\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\} = \mathcal{F}$,

(ii) $\mathcal{F}_{i+1}$ est une extension compacte de $\mathcal{F}_i$,

(iii) si i n'a pas de prédécesseur, alors $\bigvee_{j<i} \mathrm{L}^2(\mathcal{F}_j) = \mathrm{L}^2(\mathcal{F}_i)$.

Théorème 80 [Fu3] *Si $\phi : X \to X$ préserve une mesure de probabilité m, il existe alors un unique facteur $\mathcal{D}_\phi$ tel que*

(i) $\mathcal{D}_\phi$ contient tous les facteurs distaux,

(ii) $\mathcal{B}(X)$ est relativement faiblement mélangeant au dessus de $\mathcal{D}_\phi$.

En utilisant ce théorème de classification, nous avons pu obtenir dans un travail en cours :

Théorème 81 (en cours) *Soit $\phi : X \to X$ une transformation préservant une mesure de probabilité m.*

(i) ϕ est distale si et seulement si, pour toute transformation $\psi : Y \to Y$ conservative de type II_1 ou II_∞ d'entropie nulle, l'entropie du produit $\phi \times \psi$ est nulle.

(ii) si ϕ n'est pas distale, on peut trouver ψ conservative de type II_∞ d'entropie nulle tel que le produit $\phi \times \psi$ soit d'entropie infinie.

Rappelons qu'on peut construire des rang 1 mélangeants [AdFr] et donc des transformations d'entropie nulle non distales.

6 Réduction de cocycles dans SL$(2,\mathbb{R})$

On considère ici un système dynamique (X,ϕ,m) abstrait (sans structure topologique) et un cocycle $M : X \to G$ à valeurs dans un groupe G, localement compact et à base dénombrable. Ici, comme l'action du système dynamique est $\mathbb{Z}$, le cocycle se réduit à une seule fonction $M(x)$; on définit alors plus généralement une fonction $M : \mathbb{Z} \times X \to G$ par :

$$M(n,x) = M \circ \phi^{n-1}(x) \cdots M \circ \phi(x) M(x) \quad n \geq 0$$
$$M(-n,x) = \left(M \circ \phi^{-1}(x) \cdots M \circ \phi^{-n}(x)\right)^{-1} \quad n \geq 0.$$

Le théorème d'Oseledets affirme, pour un cocycle $M(n,x)$ à valeurs dans $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ et dans le cas d'un spectre de Lyapunov simple, que $M(n,x)$ est cohomoloque à un cocycle diagonal $D(n,x)$, c'est-à-dire donné par une fonction $D : X \to \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ partout diagonale. Plus généralement, peut-on réduire dynamiquement $M(n,x)$ à un cocycle "plus simple" ? Dans une première partie, nous rappelons la méthode de Furstenberg-Mackey-Zimmer ; puis dans une deuxième partie, dans le cas où $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, nous redonnons une autre approche, plus géométrique, de cette réduction. Rappelons d'abord :

Définition 82 *On dit qu'un cocycle $M(n,x)$, à valeurs dans un groupe G, au dessus d'un système dynamique (X,ϕ,m), est cohomologue à un autre cocycle $M'(n,x)$, s'il existe une fonction mesurable $K : X \to G$ telle que*

$$M(n,x) = K^{-1} \circ \phi^n(x) M'(n,x) K(x) \quad m \text{ p.p.}$$

6.1 La théorie de Furstenberg-Mackey-Zimmer

Zimmer a montré que tout cocycle $M(n,x)$, à valeurs dans un groupe algébrique, admet une extension finie cohomologue à un cocycle à valeurs dans un sous-groupe moyennable. Arnold-Cong-Oseledets ont amélioré ce résultat en précisant la forme du sous-groupe moyennable :

Théorème 83 **[ArCoOs]** *Si $M(n,x)$ est un cocycle à valeurs dans $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$, alors $M(n,x)$ est cohomologue à un cocycle $M'(n,x)$ triangulaire supérieur par bloc. On note chaque bloc matriciel de la diagonale par $M_i(n,x)$. Chaque sous-cocycle $M_i(n,x)$ laisse un sous-espace invariant W_i, soit*

$$\mathbb{R} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$$

et chaque W_i se décompose en somme directe

$$W_i = W_i(1) \oplus \cdots \oplus W_i(s(i))$$

de sous espaces $W_i(j)$ permutés par $M_i(n,x)$, soit

$$M_i(n,x)W_i(j) = W_i(\sigma_i(n,x)j)$$

où $\sigma_i(n,x)$ est un cocycle à valeurs dans le groupe des permutations de $\{1,\cdots,s(i)\}$. De plus, chaque $M_i(n,x)$ sur $W_i(j)$ se comporte comme une similitude : la matrice bloc correspondante est proportionnelle à une matrice orthogonale.

Ce résultat est très proche de celui de Zimmer qui introduit plutôt une extension finie au lieu d'un cocycle de permutation $\sigma_i(n,x)$. Pour démontrer ce théorème, on utilise essentiellement trois théorèmes, l'un de Zimmer et les deux autres de Furstenberg. Rappelons d'abord :

Définition 84 *On dit qu'une G-action continue agit de manière lisse sur une espace standard $\mathcal{M}$ si toute orbite $G.p \in \mathcal{M}$, est localement fermée.*

Théorème 85 [Zi1], [Zi2] *Si G agit continument et lissement sur un espace standard $\mathcal{M}$, tout cocycle $M(n,x)$ à valeurs dans G est cohomologue à un cocycle $M'(n,x)$ à valeurs dans le stabilisateur $G_p = \{g \in G \mid g.p = p\}$ d'un point $p \in \mathcal{M}$.*

Théorème 86 [Fu4] $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ *agit lissement sur $\mathcal{M}(\mathbb{P}^{d-1})$, l'ensemble des mesures de probabilité sur l'espace projectif $\mathbb{P}^{d-1} = \mathbb{R}^d/(x \sim tx)$.*

Théorème 87 [Fu4] *Si μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{P}^{d-1}$ de support engendrant $\mathbb{P}^{d-1}$ et si $G_\mu = \{g \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R}) \mid g_*\mu = \mu\}$ désigne le stabilisateur de μ, on peut alors construire une décomposition directe, $\mathbb{R}^d = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$, de sous espaces permutés par tous les éléments de G_μ, soit $g.W_i = W_{\sigma(g)i}$ où $\sigma(g)$ est un morphisme à valeurs dans le groupe des permutations de $\{1,2,\cdots,r\}$. De plus, sur chaque W_i, on peut construire une forme quadratique Q_i telle que g_*Q_i soit proportionnelle à $Q_{\sigma(g)i}$.*

Ces théorèmes ne donnent pas de critères d'existence d'exposants positifs. Il est par ailleurs difficile d'être exhaustif sur le sujet et nous allons rappeler seulement quelques résultats que nous retrouverons dans l'article **[9]** décrit dans la section 6.2. Le premier résultat traite des produits indépendants de matrices.

Théorème 88 [Fu1] *On suppose que (X, ϕ, m) est Bernoulli et qu'on s'est donné un cocycle $M : X \to \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ log-intégrable, $\ln \|M(x)\|$ est dans $\mathrm{L}^1(m)$, vérifiant les deux conditions :*

(i) il n'existe pas de groupe compact K tel que $M(x) \in K$ p.p.

(ii) il n'existe pas de réunion finie de sous-espaces stricts de $\mathbb{R}^d$ et indépendants du point x, soit $\{F_i\}_{i=1}^r$, tel que $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^r F_i$ soit globalement invariant par $M(x)$ p.p.

Alors le cocycle $M(n, x)$ admet au moins un exposant de Lyapunov strictement positif.

Gol'dsheid et Margulis ont amélioré cet énoncé dans une autre direction :

Théorème 89 [GoMa] *On suppose que (X, ϕ, m) est Bernoulli et que $M : X \to \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ est un cocycle log-intégrable. Si la cloture algébrique du support de la mesure M_*m est égale à $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ tout entier, alors le spectre de Lyapunov de $M(n, x)$ est simple (en particulier le plus grand exposant est strictement positif).*

Dans le cas où le système de base n'est plus Bernoulli, on ne peut plus donner de résultats généraux. En utilisant des techniques d'exclusion de paramètres de Benedicks-Carleson, Young obtient :

Théorème 90 [Yo2] *On suppose ici que $\phi : S^1 \to S^1$ est une rotation vérifiant la condition de Brjuno et que $\{M_t\}_{t\in[0,1]}$ est une famille $\mathcal{C}^1$ à un paramètre de cocycles à valeurs dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. On note $N_{t,\lambda} = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{smallmatrix}\right] M_t$ pour un réel fixé $\lambda > 1$ et $\Delta(\lambda)$ l'ensemble des paramètres $t \in [0, 1]$ pour lesquels $N_{t,\lambda}$ a un exposant supérieur à $\frac{1}{2} \ln \lambda$. Alors, génériquement pour de telle famille à un paramètre, $\lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{Leb}(\Delta(\lambda)) = 1$.*

Wojtkowshi obtient aussi un critère de positivité des exposants dans le cas des cocycles symplectiques préservant une famille de cônes (symplectiques).

Notation 91 *On considère ici la forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2d}$ donnée par $\omega(\left[\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right]) = (X \mid Y') - (X' \mid Y)$, où $(. \mid .)$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$ et on considère les deux cônes associés :*

$$\mathcal{C}^+ = \{ \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \mid (X \mid Y) \ \geq 0\}, \quad \mathcal{C}^- = \{ \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \mid (X \mid Y) \ \leq 0\}.$$

Toute matrice $M \in \mathrm{SP}(2d, \mathbb{R})$ peut se mettre sous la forme $M = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ et si on suppose de plus que M préserve $\mathcal{C}^+$ et que M^{-1} préserve aussi $\mathcal{C}^-$, on peut montrer que C^*B est diagonalisable de valeurs propres positives ou nulles.

Théorème 92 [Wo1], [Wo2] *Soit (X, ϕ, m) un système dynamique ergodique abstrait et $M(n, x)$ un cocycle log-intégrable à valeurs dans* $\mathrm{SP}(2d, \mathbb{R})$ *tel que $M(x)$ et $M(x)^{-1}$ préservent respectivement $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{C}^-$ (m p.p.) On note $\chi_1 \geq \cdots \geq \chi_d$ le spectre (compté avec multiplicité répétée) de $C^*(x)B(x)$ et $\lambda_1 > \cdots > \lambda_r$, le spectre de Lyapunov (sans répétition) de multiplicité $d_1, \cdots, d_r$. Alors*

$$h_0(M, m) = \sum_{i=1}^{r} d_i \lambda_i^+ \geq \sum_{i=1}^{d} \int \ln \left(\sqrt{\chi_i(x)} + \sqrt{\chi_i(x) + 1} \right) dm(x) \geq 0.$$

On peut bien sûr obtenir 0 dans le membre de droite comme dans le cas des matrices $\left[\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{smallmatrix}\right]$. Comme tout cocycle vérifiant les hypothèses du théorème précédent peut se mettre sous la forme $M = \left[\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} I & R \\ P & I+PR \end{smallmatrix}\right]$ où P et R sont symétriques positives ou nulles, il suffit que $P(x)R(x)$, c'est-à-dire $= C^*(x)B(x)$ soit non nulle sur une ensemble de mesure positive pour que le cocycle $M(n, x)$ ait des exposants de Lyapunov strictement positifs.

6.2 Réduction géométrique [9]

L'objectif de l'article **[9]** que nous allons décrire est double. Nous montrons d'une part une version quantitative du théorème de Furstenberg-Mackey-Zimmer : nous montrons en particulier que le nouveau cocycle est log-intégrable si le premier l'est (la méthode de réduction de Zimmer ne donne aucune information puisqu'il s'agit d'un théorème abstrait d'existence de sections mesurables). Nous redémontrons d'autre part le théorème de Furstenberg sur la positivité de l'exposant maximal mais sans utiliser cette fois-ci dans la démonstration, le théorème des martingales (qui n'existe plus dans le cas des systèmes dynamiques seulement stationnaires).

L'idée de base de **[9]** est de ne plus travailler dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\pm Id$ mais dans le groupe des homographies du disque $\mathbb{D}$, soit Möb($\mathbb{D}$), qui lui est isomorphe. Ce groupe est vu comme le groupe des isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{D}$ muni de la métrique de Poincaré. Le bord à l'infini de cet espace, soit S^1, est vu comme l'espace des directions (en fait, il faut considérer un revêtement $z \mapsto z^2$ sur S^1) et $\mathbb{D}$ lui même est vu comme l'ensemble des coefficients de non-conformalité d'une matrice (ou plus précisément comme l'ensemble des coefficients de Beltrami). Le théorème de base est le suivant :

Théorème 93 **[9]** *Soient (X, ϕ, m) un système dynamique ergodique abstrait et $M(n, x)$ un cocycle log-intégrable. Dans les 4 cas suivants, on construit une* *matrice de tranfert* $K(x)$*, on note*

$$N(x) = K^{-1} \circ \phi(x) M(x) K(x) \quad et \quad \lambda_+ \geq 0 \geq \lambda_-$$

les deux exposants de Lyapunov. Alors un des 4 cas suivants a lieu m*-presque partout :*

I $N(x) = \begin{bmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & 1/a(x) \end{bmatrix}$ *et l'exposant vaut* $\int \ln|a(x)|\,dm(x) = \lambda_+ > 0$*,*

II $N(x) = \begin{bmatrix} a(x) & b(x) \\ 0 & 1/a(x) \end{bmatrix}$*,* $\ln|a|$ *et* $\ln|b|$ *sont intégrables et l'exposant vaut* $\int \ln|a(x)|\,dm(x) = \lambda_+ = 0$*,*

III $N(x) = R(\omega(x)) = \begin{bmatrix} \cos\omega(x) & -\sin\omega(x) \\ \sin\omega(x) & \cos\omega(x) \end{bmatrix}$*,* ω *n'est pas cohomologue à 0 modulo* π *et l'exposant vaut* $\lambda_+ = 0$*,*

IV $N(x) = R(1_A(x)\frac{\pi}{2}) \begin{bmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & 1/a(x) \end{bmatrix}$ *où* $\ln|a|$ *est intégrable,* 1_A *n'est pas cohomologue à 0 modulo 2 et l'exposant vaut* $\lambda_+ = 0$*.*

Dans les 4 cas,

$$\|K \circ \phi(x) K^{-1}(x)\| \leq \|M(x)\| \quad et \quad \|N(x)\| \leq \|M(x)\|.$$

En fait K *envoie les deux vecteurs canoniques sur deux vecteurs de même norme* $(\sin\theta_x)^{-1/2}$ *et d'aire égale à 1. Si* $\tilde{K}$ *est une autre matrice de transfert et* $\tilde{N}(x) = \tilde{K}^{-1} \circ \phi(x) M(x) \tilde{K}(x)$*, alors* $\|K(x)\| \leq \|\tilde{K}(x)\|$ *p.p.*

Dans le cas I, on retrouve le théorème d'Oseledets pour deux exposants distincts. Dans les trois autres cas, l'exposant est nul. Dans le cas II, il existe au moins une direction équivariante $\xi_x = K(x)\mathbb{R}[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}]$ et la matrice de transfert $K(x)$ est une matrice de rotation. Dans les cas III et IV, il ne peut exister de solution à l'équation $M(x)\xi(x) = \xi \circ \phi(x)$ où ξ est une direction de $\mathbb{R}^2$. Dans le cas IV, $\xi(x) = K(x)\mathbb{R}[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}]$ et $\zeta(x) = K(x)\mathbb{R}[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}]$ forment un couple de directions globalement invariantes. Dans les cas I, III et IV, la matrice de transfert $K(x)$ est non triviale.

Si on cherche une classification sans chevauchement dans le théorème précédent, on peut exclure dans le cas IV, le cas des rotations (par exemple $a(x) = 1$) en introduisant la notion de valeur essentielle en ∞.

Définition 94 *On dit que* ∞ *est valeur essentielle du cocycle* $M(n, x)$ *si pour tout* $R > 0$ *et pour tout borélien* B *de mesure positive, il existe* $n \geq 1$ *tel que*

$$m\{x \in B \mid \phi^n(x) \in B \ et \ \|M(n,x)\| > R\} > 0.$$

On dit aussi que $M(n,x)$ est récurent si Id est valeur essentielle.

Proposition 95 [9] *Pour un cocycle de la forme*

$$M(x) = R(1_B(x)\frac{\pi}{2})\mathrm{diag}(a(x), a(x)^{-1})$$

où 1_B *n'est pas un cobord (modulo 2) et* $\ln|a|$ *est intégrable (quelconque). On obtient :*

(i) le cocycle $M(n,x)$ *est récurent (en particulier* $\lambda_+ = 0$*),*

(ii) si ∞ *n'est pas valeur essentielle,* $M(n,x)$ *est cohomologue à une rotation.*

Corollaire 96 [9] *Si* $M : X \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *est log-intégrable et si* $\|M(n,x)\|$ *tend vers* $+\infty$ m *p.p., il existe alors au moins une direction équivariante* $\xi(x)$*,* $M(x)\xi(x) = \xi \circ \phi(x)$*, p.p.*

Les hypothèses de ce corollaire excluent en effet les cas III et IV qui sont récurents. Remarquons dans ce corollaire qu'on ne suppose pas que la vitesse vers l'infini est exponentielle. Enfin, on retrouve aussi le théorème de Furstenberg en dimension deux :

Corollaire 97 *On suppose que* (X, ϕ, m) *est Bernoulli et que* $\lambda_+ = 0$*. Alors Il existe une matrice* K *(constante) telle que* $N(x) = K^{-1}M(x)K$ *soit égale à l'un des 3 cocycles suivants*

i) $N(x) = \left[\begin{smallmatrix} a(x) & b(x) \\ 0 & 1/a(x) \end{smallmatrix}\right]$ *où* $\ln|a|$ *et* $\ln|b|$ *sont intégrables,*

(ii) $N(x) = \left[\begin{smallmatrix} \cos\omega(x) & -\sin\omega(x) \\ \sin\omega(x) & \cos\omega(x) \end{smallmatrix}\right]$*,*

(iii) $N(x) = R(1_A(x)\frac{\pi}{2})\left[\begin{smallmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & 1/a(x) \end{smallmatrix}\right]$ *où* $\ln|a|$ *est intégrable et* 1_A *est non-cohomologue à* 0 *modulo* 2.

En particulier, pour des produits iid, d'exposants nuls, ou bien le cocycle est conjugué à une matrice de rotation, ou bien il laisse globalement invariant une ou deux directions. On peut aussi retrouver le théorème de Wojtkowski géométriquement :

Notation 98 *Pour toute matrice* $M = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ *à coefficients positifs ou nuls, on note :*

$$\rho(M) = \ln(\sqrt{cb} + \sqrt{1+cb}) = \ln(\sqrt{ad} + \sqrt{bc}).$$

Pour tout quadruplet (z_1, z_2, z_3, z_4) *du cercle, on appelle birapport*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}.$$

Corollaire 99 *Si $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ a tous ses coefficients positifs ou nuls, si h désigne la transformation de Möbius qui lui est associée et si $d_{\mathbb{D}}$ désigne la distance hyperbolique de Poincaré sur $\mathbb{D}$, h envoie l'axe réel $\mathbb{R}$ sur un cercle disjoint $h.\mathbb{R}$ qui est à distance (hyperbolique) de $\mathbb{R}$ exactement $\rho(M)$:*

$$d_{\mathbb{D}}(\mathbb{R}, h.\mathbb{R}) = \rho(M) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{\zeta}+1}{\sqrt{\zeta}-1}\right) \quad \textit{où} \quad \zeta = [1, h(1), h(-1), -1].$$

Il est alors facile de montrer les inégalités :

$$\rho(MN) \geq \rho(M) + \rho(N), \quad \ln\|M\| \geq \rho(M),$$

et de conclure à l'existence d'un exposant positif :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\|M(n,x)\| \geq \int \ln(\sqrt{ad} + \sqrt{bc})\, dm.$$

L'outil principal de la démonstration du théorème 93 est le théorème de Douady-Earle. Rappelons d'abord que Dunford-Pettis nous permet toujours de trouver une solution mesure $\mu(x)$ à l'équation :

$$h(x)_* \mu(x) = \mu \circ \phi(x)$$

où $x \mapsto \mu(x)$ est une fonction mesurable à valeurs dans l'ensemble des probabilités sur S^1 (on utilise ici que les transformations de Möbius associées préservent le bord à l'infini). Le théorème de Douady-Earle nous garantit l'existence d'un baricentre hyperbolique. Nous donnons ici une version un peu différente :

Théorème 100 [DoEa] *Soit ν une mesure de probabilité sur S^1 vérifiant $\nu(\{z\}) < \frac{1}{2}$ pour tout $z \in S^1$. On note $B_\xi(z,w) = "d_{\mathbb{D}}(z,\xi) - d_{\mathbb{D}}(w,\xi)"$ la distance de busemann. Alors*

(i) $z \mapsto \int_{\partial\mathbb{D}} B_\xi(z,0)\, d\nu(\xi)$ est une fonction strictement convexe qui atteint un minimum en un seul point noté $\mathrm{bar}(\nu) \in \mathbb{D}$,

(ii) pour toute transformation de Möbius de $\mathbb{D}$,

$$h(\mathrm{bar}(\nu)) = \mathrm{bar}(h_*\nu).$$

Besson-Courtois-Gallot [BeCoGa] ont montré une généralisation partielle de ce théorème pour des espaces hyperboliques de rang supérieur.

7 Mesures minimisantes et sous cobords

Il s'agit ici d'un travail en cours et récent, **[10]** et **[11]**, autour des problèmes de mesures minimisantes en mécanique lagrangienne. Plus particulièrement, nous nous intéressons au lagrangien $L(q,v) = \frac{1}{2}\|v\|_q^2$ provenant d'une métrique g d'une surface riemannienne compacte, et aux mesures minimisant son action. Notre objectif, loin d'être atteint, est de ramener ce problème à un problème en dimension 1.

7.1 Motivations

Dans la suite, M désigne une surface riemannienne compacte, $\phi^t : TM \to TM$, le flot géodésique du fibré tangent, $H^1(M,\mathbb{R})$, l'espace des 1-formes fermées modulo les 1-formes exactes et $H_1(M,\mathbb{R})$, son dual. Une trajectoire mécanique minimise localement l'action, mais il n'existe peut-être pas de trajectoire globale périodique, d'homologie donnée, minimisant l'action. On cherche alors à affaiblir le problème en cherchant une mesure au lieu d'une orbite périodique.

Problème 101 *Soit $\omega \in H^1(M,\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_1(TM,\phi^t)$, l'ensemble des mesures de probabilité ϕ^t-invariantes à support compact dans TM. Peut-on alors trouver une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1(TM,\phi^t)$ minimisant l'action :*

$$\int_{TM} (L-\omega)\, d\mu = \min_{\nu\in\mathcal{M}} \int_{TM} (L-\omega)\, d\nu \stackrel{\text{def}}{=} -\alpha(\omega),$$

et dans l'affirmative, peut-on décrire ces mesures ? A-t-on, par exemple, génériquement en ω ou génériquement pour la métrique, une unique mesure minimisante portée par une orbite périodique ?

Il n'est pas difficile de ré-écrire ce problème en termes de norme stable comme l'ont fait Bangert ou Massart

Proposition 102 [Ban], [Mas] *On définit la norme stable de tout $\omega \in H^1(M,\mathbb{R})$ par :*

$$\|\omega\|_s = \sup\{\int \omega\, dm \mid m \in \mathcal{M}_1(T_1M,\phi^t)\}$$

où $\mathcal{M}_1(T_1M, \phi^t)$ désigne l'ensemble des probabilités ϕ^t-invariantes à support dans le fibré unitaire tangent T_1M. On a alors

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2}\|\omega\|_s^2.$$

Les mesures minimisantes du problème de Mather sont en correspondance bijective avec les mesures maximisantes servant à définir la norme stable. En utilisant la section de Poincaré d'un domaine de Dirichlet, on peut réécrire ce problème en dimension 2. On obtient ainsi un système dynamique (Σ, ψ) appelé billard géodésique. Bowen et Series ont montré par ailleurs comment définir sur le bord à l'infini $X = S^1$, un système dynamique (X, f), markovien sur une partition de la forme $X = \sqcup_{i=1}^r G_i^+ \cup G_i^-$ où $G_i^\pm$ sont des intervalles naturellement deux à deux associés par les générateurs du groupe fondamental. On note $(\hat{\Sigma}, \hat{\psi})$, l'extension naturelle de (X, f). On peut alors montrer que (Σ, ψ) est un facteur de $(\hat{\Sigma}, \hat{\psi})$ et que le problème de minimisation de Mather est équivalent au problème suivant :

Problème 103 *Soient (X, f) un système dynamique topologique et $A : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue (ou Hölder,...).Peut-on alors caractériser les mesures maximisantes μ du problème variationnel :*

$$\int A\, d\mu = \sup\{ \int A\, dm \mid m \in \mathcal{M}_1(X, f) \} \stackrel{\text{def}}{=} m(A, f)$$

où $\mathcal{M}_1(X, f)$ désigne l'ensemble des probabilités f-invariantes ? On notera par la suite $\mathcal{M}_1(X, f, A)$, l'ensemble de ces mesures maximisantes.

Dans le cas du flot géodésique, cela revient à chercher les mesures maximisantes d'une famille $A_c : S^1 \to \mathbb{R}$ de fonctions :

$$A_c = \sum_{i=1}^r \omega_i(1_{G_i^+} - 1_{G_i^-}) - c \ln |f'|,$$

où c est le plus petit réel garantissant $m(A_c, f) \leq 0$.

7.2 Théorème de Livciz pour les sous actions [10]-[11]

Dans un premier temps [**10**], nous étudions les propriétés de ces mesures maximisantes pour des transformations dilatantes du cercle. Dans un deuxième temps [**11**], nous étendons un lemme fondamental de Livsic d'existence de sous-cobords.

Théorème 104 [10] *Soit $f : S^1 \to S^1$ une application $\mathcal{C}^1$ dilatante et α un réel dans $]0,1[$.*

(i) Il existe un ouvert $\mathcal{G}_\alpha$ (pour la topologie α-hölder) de fonctions $A : S^1 \to \mathbb{R}$ qui admettent une unique mesure maximisante portée par une orbite periodique.

(ii) L'adhérence de $\mathcal{G}_\alpha$ dans la topologie α-Hölder contient toutes les fonctions A, β-Hölder, avec $\beta > \alpha$.

(iii) Si A est β-Hölder, $\beta > \alpha$ et si $\mathcal{M}_1(X, f, A)$ contient une mesure maximisante qui n'est pas supportée par un nombre fini d'orbites périodiques, A est limite de fonctions A_n, dans la topologie α-Hölder ; chaque A_n admet une unique mesure maximisante de support uniquement ergodique et d'entropie strictement positive.

Dans le théorème suivant, $A = -\ln|f'|$ et nous cherchons à nouveau un énoncé générique. La difficulté supplémentaire provient ici du fait que l'ensemble des mesures invariantes varie avec f. Ce problème est par contre beaucoup plus proche des questions posées en 7.1

Théorème 105 [10] *Soient $\alpha \in]0,1[$ et $d \geq 1$ le degré des transformations qui interviennent dans cet énoncé.*

(i) Il existe un ouvert $\mathcal{F}_\alpha$, pour la topologie $\mathcal{C}^{1+\alpha}$, de transformations $f : S^1 \to S^1$ dilatantes, de degré d, de classe $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ telles que $A = -\ln|f'|$ admet une unique mesure maximisante supportée par une orbite périodique.

(ii) Toute transformation dilatante, de degré d et de classe $\mathcal{C}^{1+\beta}$, $\beta > \alpha$, est limite en topologie $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ de transformations $f_n \in \mathcal{F}_\alpha$.

(iii) Si de plus f admet une mesure maximisante qui n'est pas supportée par une réunion finie d'orbites périodiques, f est limite de transformations f_n, dans la topologie $\mathcal{C}^{1+\alpha}$, qui admettent une unique mesure maximisante de support uniquement ergodique et d'entropie strictement positive.

Le lemme clef du premier théorème est l'existence de sous-cobords. A l'origine, Mañé [Man3] utilise aussi ce lemme clef en mécanique lagrangienne, mais le cobord qu'il construit n'est défini que sur le support des mesures maximisantes. Fathi [Fat1], [Fat2] généralise par la suite ce résultat en introduisant des solutions faibles KAM. Il est aussi crucial pour nous d'avoir un sous-cobord défini sur tout l'espace X. Pour des sous-shifts de type fini et unilatéraux, ou pour des revêtements dilatants $\mathcal{C}^1$, la démonstration est facile.

Lemme 106 [Bou], [10] *Si $f : S^1 \to S^1$ est une application $\mathcal{C}^1$ dilatante et si $A : X \to \mathbb{R}$ est un fonction α-Hölder, on peut construire $V : S^1 \to \mathbb{R}$, α-Hölder, tel que*

$$A - m(A,f) \leq V \circ f - V$$

partout sur S^1. De plus $\text{Höld}_\alpha(V) \leq C(f)\text{Höld}_\alpha(A)$ pour une constante $C(f)$ ne dépendant que de f.

Nous appelons ces cobords, des sous-actions, par analogie avec le problème de Mather. On peut aussi utiliser le formalisme thermodynamique pour les construire :

Proposition 107 [Sav], [10] *Si $f : S^1 \to S^1$ est une application $\mathcal{C}^1$ dilatante et si A est une fonction α-Hölder, on appelle μ_t la mesure d'équilibre associée au potentiel tA et $\exp(tV_t) = h_t$ la solution propre de l'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius : $\mathcal{L}_t h_t = \lambda_t h_t$ où $\ln \lambda_t$ est la pression de tA. On montre alors :*

(i) toute limite faible de $(\mu_t)_t$ pour $t \to +\infty$ est une mesure maximisante,

(ii) la suite $(V_t)_t$ reste dans un compact pour la topologie uniforme et toute limite V de $(V_t)_t$ est une sous-action vérifiant de plus

$$V(x) = \max_{f(y)=x} \{V(y) + A(y) - m(A,f)\}.$$

Bousch [Bou] obtient aussi cet énoncé par une autre méthode. Le lemme clef s'étent aussi dans le cadre des difféomorphismes transitifs d'Anosov, mais la sous-action obtenue perd beaucoup en régularité.

Lemme 108 [11] *Soit $\phi : M \to M$ un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme d'Anosov sur une variété compacte riemannienne et sans bord de spectre uniformément inclus dans $[\Lambda_s, \lambda_s] \cup [\lambda_u, \Lambda_u]$. Pour toute fonction $A : M \to \mathbb{R}$, α-Hölder, il existe $V : M \to \mathbb{R}$, β-Hölder telle que*

$$A - m(A,f) \leq V \circ \phi - V$$

où $\beta = \alpha \ln(1/\lambda_s)/\ln(\Lambda_u/\lambda_s)$ et $\text{Höld}_\beta(V) \leq C(\phi)\text{Höld}_\alpha(A)$ (en courbure uniforme l'estimation donne $\beta = \frac{1}{2}\alpha$).

La démonstration est plus longue (sans être difficile) car on ne peut pas utiliser le fait que (M, ϕ) admet comme extension finie, un sous-shift de type fini bilatéral. Le premier théorème reste vrai en prenant α petit et β proche de 1. Un énoncé équivalent au deuxième théorème dans le cadre du flot géodésique sur une surface peut être envisagé. Cela reviendrait à reconstruire la métrique en fonction des cocycles de Busemann.

Références

Liste générale :

[AdFr] T. Adams, N.A. Friedman : Strairecase mixing. *Ergodic Theory and Dynamical Systems.*

[Alv] J.F. Alves : SRB measures for nonhyperbolic systems with multidimentional expansion. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*

[AlBoVi] J.F. Alves, C. Bonatti, M. Viana : SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding. *Invent. math.*, Vol. 140, 2000, p. 351–398.

[ArCoOs] L. Arnold, N.D. Cong, V.I. Oseledets : Jordan normal form for linear cocycles. *Random Operators and Stochastic Equations*, Vol. 7, 1999, p. 303–358.

[At] G. Atkinson : Recurrence of co-cycles and random walks. *J. London Math. Soc.*, Vol. 13, No. 2, 1976, p. 486–488.

[Ban] V. Bangert : Minimal measures and minimizing closed normal one-currents. *Geom. Funct. anal.*, Vol. 9, 1999, p. 413–427.

[BeCa1] M. Benedicks, L. Carleson : On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$, *Ann. Math.*, Vol. 122, 1985, p. 1–25.

[BeCa2] M. Benedicks, L. Carleson : The dynamics of the Hénon map. *Ann. Math.*, Vol. 133, 1991, p. 73–169.

[BeCoGa] G. Besson, G. courtois, S. Gallot : Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative.

[BlLy1] A.M. Blokh, M.Ju. Lyubich : Non-existence of wandering intervals and structure of topological attractors of one dimensional dynamical systems. II. the smooth case. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 9, 1989, 751–758.

[BlLy2] A.M. Blokh, M.Ju. Lyubich : Measure and dimension of solenoidal attractors of one dimensional dynamical systems. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 127, 1990, p. 573–583.

[BlLy3] A.M. Blokh, M.Ju. Lyubich : Measurable dynamics of S-unimodal maps of the interval. *Ann. Ec. Norm. Sup.*, Vol. 24, 1991, 545–573.

[Bou] T. Bousch : Le poisson n'a ps d'arête. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Prob. et Stat.*, Vol. 36, 2000, p. 489–508.

[BrKa] M. Brin, A. Katok : On local entropy. *Lecture Notes in Mathematics*, 1007, *Geometrics Dynamic*, p. 30–38.

[BrHa] H. Bruin, J. Hawkins : Examples of expanding $\mathcal{C}^1$ maps having no σ-finite invariant measure equivalent to Lebesgue. *Israel Journal of Mathematics*, Vol. 108, 1998, p. 83–107.

[BrKeNoSt] H. Bruin, G. Keller, T. Nowicki, S. van Strien : Wilde attractors exsit. *Ann. of Math.*, Vol. 143, 1996, p. 97–130.

[BrKePi] H. Bruin, G. Keller, M. St. Pierre : Adding machines and wild attractors. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 17, 1997, p. 1267–1287.

[ChOr] R.V. Chacon, D.S. Ornstein : A general ergodic theorem. *Illinois J. Math.*, Vol. 4, 1960, p. 153–160.

[ChHaPr] J.R. Choksi, J.M. Hawkins, V.S. Prasad : Abelian cocycles for nonsingular ergodic transformations and the genericity of type III_1 transformations. *Monatsh. Math.*, Vol. 103, 1987, p. 187-205.

[CoEc] P. Collet, J.-P. Eckmann : Positive Lyapunov exponents and absolutely continuity for maps of the interval. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 3, 1983, p. 13–46.

[DoEa] A. Douady, C. Earle : Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle. *Acta Math.*, Vol. 157, 1986, p. 23–48.

[DoOe] A. Douady, J. Oesterlé : Dimension de Hausdorff des attracteurs. *CRAS Paris*, Vol. 290, Ser. A, 1980, p. 1135–1138.

[EcRu] I. Eckmann, D. Ruelle : Ergodic theory and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 57, 1985, p. 617–656.

[EiSi] S.J. Eigen, C.E. Silva : A structure theorem for n-to-1 endomorphisms and existence of recurrent measures. *J. London Math. Soc.*, Vol. 40, No. 2, 1989, p. 441–451.

[Fat1] A. Fathi : Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens. *CRAS Paris*, Vol. 324, T. I, 1997, p. 1043–1046.

[Fat2] A. Fathi : Solutions KAM faibles et barrières de Peierls. *CRAS Paris*, Vol. 325, 1997, p. 649–652.

[Fu1] Y. Furstenberg : Non-commuting random products. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 108, 1963, p. 377–428.

[Fu2] H. Furstenberg : Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces, *Proc. Symp. Pure Math. (Williamstown) Amer. Math. Soc. Providence*, Vol. 26, 1973, p. 193–229.

[Fu3] H. Furstenberg : Ergodic behavoir of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arthmetic progressions. *Journal d'Analyse Mathématique*, Vol. 31, 1977, p. 204–256.

[Fu4] H. Furstenberg : Rigidity and cocycles for ergodic actions of semisimple Lie groups. *Astérisques*, Vol. 559, 1980, p. 273–292.

[GoMa] I. Ya. Gol'dsheid, G.A. Margulis : Lyapunov indices of a product of random matrices. *Russian Math. Surveys*, Vol. 44, Num. 5, 1989, p. 11–71.

[GrSaSw] Graczyk, D. Sands, Swiatek. La dérivee schwarzienne en dynamique unimodale. *C.R. Acad. Sciences Paris, Série I*, 332 (2201), p. 329–332.

[GrSw1] J. Graczyk, G Swiatek : Singular measures in circle dynamics. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 157, 1993, p. 157–230.

[GrSw2] J. Graczyk, G Swiatek : Generic hyperbolicity in the logistic family. *Ann. of Math.*, Vol. 146, 1997, p. 1–52.

[Guc1] J. Guckenheimer : Sensitive dependence on initial conditions for one dimensional maps. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 70, 1979, p. 133–160.

[Guc2] J. Guckenheimer : Limit sets of S-unimodal maps with zero entropy. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 110, 1987,655–659.

[Ham] T. Hamachi : On a Bernoulli shift with non-identical factor measures. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 1, 1981, p. 273–283.

[Haw] J. Hawkins : Smooth type III diffeomorphisms of manifolds. *Trans. of the American Mathematical Society*, Vol. 276, Num. 2, 1983, p. 625–643.

[Her] M. Herman : Une méthode pour minorer les exposants de Lyapunov et quelques exemples montrant le carctère local d'un théorème d'Arnold et de Moser sur le tore en dimension 2. *Commun. Math. Helv.*, Vol. 58, 1983, 453–502.

[HoKe1] F. Hofbauer, K. Keller : Quadratic maps without asymptotic measure. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 127, 1990, p. 319–337.

[HoKe2] Some remarks on recent results about S-unimodal maps. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique*, Vol. 53, 1990, 413–425.

[Ja] M. Jakobson : Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 81, 1981, p. 39–88.

[Kak] S. Kakutani : On equivalence of infinite product measures. *Ann. of Math.*, Vol. 49, 1948, p. 214–224.

[Kat1] Y. Katznelson : Sigma-finite invariant measures for smooth maps of the circle. *Journal d'Analyse Mathématique*, Vol. 31, 1977, p. 1–18.

[Kat2] Y. Katznelson : The action of diffeomorphism of the circle on the Lebesgue measure. *Journal d'Analyse Mathématique*, Vol. 36, 1979, p. 156–166.

[KaWe1] Y. Katznelson, B. Weiss : A simple proof of some ergodic theorems. *Israel Journal of Mathematics*, Vol. 42, No. 4, 1982.

[KaWe2] Y. Katznelson, B. Weiss : The classification of nonsingular actions, revisited. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 11, 1991, p. 333–348.

[Ke] G. Keller : Exponents, attractors and Hopf decompositions for interval maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 10, 1990, p. 717–744.

[Ki] J.F.C. Kingman : The ergodic theory of subadditive stochastic processes. *J. Royal. Stat. Soc.* , Vol. 30, Ser. B, 1968, p. 499–510.

[Koz] O. Koslovski, Getting rid of the negative derivative condition. *Ann. of Math.* 152 (2000), p. 743–762.

[Kre] U. Krengel : Entropy of conservative transformations. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, Vol. 7, 1967, p. 161–181.

[Kri] W. Krieger : On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non-singular transformations of a measure space. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 160, 1970, p. 158–177.

[Le1] F. Ledrappier : Some relations between dimension and Lyapunov exponents. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 81, 1981, p. 229–238.

[Le2] F. Ledrappier : Some properties of absolutely continuous invariant measures of an interval. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 1, 1981, p. 77–93.

[Le3] F. Ledrappier : Quelques propriétés des exposants caractéristiques. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1097, 1984.

[Li] A. Livciz : Some homology properties of Y-systems. *Mathematical Notes of the USSR Academy of Sciences*, Vol. 10, 1971, 758–763.

[Mak] G.W. Mackey : Induced representation of locally compact groups. *Ann. of Math.*, Vol. 55, 1952, p. 101–139.

[Man1] R. Mañé : Lyapounov exponents and stable manifolds for compact transformations. *Lecture Notes in Mathematics*, 1007, *Geometric Dynamic*, 1983, p. 522–577.

[Man2] R. Mañé : Hyperbolicity, sinks and invariant measure in one-dimensional dynamics. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 112, 1987, p. 721–724.

[Man3] R. Mañé : Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems. *Nonlinearity*, Vol. 9, Num. 2, 1996, p. 273–310.

[Mar] M. Martens : Distortion results and invariant Cantor sets of unimodal mappings. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 14, 1994, p. 331–349.

[MaNo] M. Martens, T. Nowicki. Invariant measures for typical quadratic maps. *Astérisque*, Vol. 261, 2000, p. 239–252.

[Mas] D. Massart : Stable norms of surfaces : local structure of the unit ball at rational directions. *Geom. Funct. anal.*, Vol. 7, 1997, p. 996–1010.

[Mat] J.N. Mather : Action minimising invariant measures for positive definite Lagrangian systems. *Math. Z.*, Vol. 207, 1991, 169–207.

[Mi1] M. Misiurewicz : Absolutely continuous invariant measures for certain maps of the interval. *IHES Publ. Math.*, Vol. 53, 1981, p. 17–51.

[Mi2] M. Misiurewicz : Attracting Cantor set of positive measure for $\mathcal{C}^\infty$ map of an interval. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 2, 1982, p. 405–415.

[MoVi] L. Mora, M. Viana : Abundance of strange attractors. *Acta Math.*, Vol. 171, 1993, p. 1–71.

[New] S. Newhouse : Quasi-elliptic periodic points in conservative dynamical systems. *Amer. J. Math.*, Vol. 99, 1977, p. 1061–1087.

[No] T. Nowicki : A positive Lyapunov exponent of the critical value of S-unimodal mapping implies uniform hyperbolicity. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 8, 1988, p. 425–435.

[NoSa] T. Nowicki, D. Sands : Non-uniform hyperbolicity and universal bounds for S-unimodal maps. *Invent. Math.*, Vol. 132, 1998, p. 633–680.

[NoSt1] T. Nowicki, S. van Strien : Absolutely continuous invariant measures for Collet-Eckmann maps without Schwarzian derivative condition. *Invet. Math.*, Vol. 93, 1988, p. 619–635.

[NoSt2] T. Nowicki, S. van Strien : Absolutely continuous measures under a summability condition. *Invent. Math.*, Vol. 93, 1988, p. 619–635.

[Or] D. Ornstein : On invariant measures. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 66, 1960, p. 297–300.

[Os] V.I. Oseledets : A multiplicative ergodic theorem. *Trans. Moscow. Math. Soc.*, Vol. 19, 1968, p. 197–231.

[Pa] W. Parry : Entropy and generators in ergodic theory. *Benjamin, New York*, 1969.

[PaPo] W. Parry, M. Pollicott : Zeta function and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. *Astérisques*, 1990.

[Pe1] Ya Pesin : Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Mathematical Surveys*, Vol. 32, No. 4, 1977, p. 55114.

[Ru1] D. Ruelle : Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Publ. IHES*, Vol. 50, 1979, p. 275–306.

[Ru2] D. Ruelle : Characteristic exponents and invariant manifolds in Hilbert space. *Annals of Mathematics*, Vol. 115, 1982, p. 243–290.

[San] D. Sands : Miurewicz maps are rare. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 197, 1998, p. 109–129.

[Sav] S.V. Savchenko : Cohomological inequalities for topological Markov chains. *Funkts. Annl. Prilozh.*, Vol. 33, 1999, p. 91–93.

[St] S. van Strien : Hyperbolicity and invariant measures for general $\mathcal{C}^2$ interval maps satisfying the Misiurewicz condition. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 128, 1990, p. 437–495.

[Tsu1] M. Tsujii : Positive Lyapunov exponents in families of one-dimensional systems. *Inventiones Mathematicae*, Vol. 111, 1993, p. 113–137.

[Tsu2] M. Tsujii : A simple proof for monotonicity of entropy in the quadratic family. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 20, 2000, p. 925–933.

[Wo1] M. Wojtkowski : Principles for the design of biliards with nonvanishing Lyapunov exponents. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 105, 1986, p. 319–414.

[Wo2] M. Wojtkowski : Measure theoretic entropy of the system of hard spheres. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 8, 1988, p. 133–153.

[Yo1] L.S. Young : Some open sets of nonuniformly hyperbolic cocyces. *Ergodic Theory od Dynamical Systems*, Vol. 13, 1993, p. 409–415.

[Yo2] L.S. Young : Lyapunov exponents for some quasi-periodic cocycles. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 17, 1997, p. 483–504.

[Zi1] R.J. Zimmer : Extensions of ergodic group actions. *Illinois J. Math.*, Vol. 20, 1976, p. 373–409.

[Zi2] R.J. Zimmer : Ergodic actions with generalized spectrum. *Illinois, J. Math.*, Vol. 20, 1976, p. 555–588.

Liste personnelle :

[**1**] Fibrés dynamiques asymptotiquement compacts. Exposants de Lyapounov. Entropie. Dimension. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. 4, Num. 1, **1987**, p. 49–97.

[**2**] Fibrés dynamiques. Entropie et dimension. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. 9, Num. 2, **1992**, p. 119–146.

[**3**] Entropy and Hausdorff dimension for infinite-dimensional dynamical systems. *Journal of Dynamics and Differnetial Equations*, Vol. 4, No. 1, **1992**, p. 127–159.

[**4**] Généralisation du théorème de Pesin pour l'α-entropie. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1486, *Eds. L.Arnold, H. Crauel, J.-P. Eckmann*, **1990**, p. 232–242.

[**5**] (avec C. Tresse et L. S. Young) Exposant de Lyapunov positif dans une famille à un paramètre d'applications unimodales. *CRAS Paris*, Vol. 315, Ser. I, **1992**, p. 69–72.

[**6**] (avec C. Tresse et L. S. Young) Positive Lyapunov exponent for generic one-parameter families of unimodal maps. *Journal d'Analyse Mathématique*, Vol. 64, **1994**, p. 121–172.

[**7**] (avec C. Silva) The subadditive ergodic theorem and recurrence properties of markovian transformations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 154, **1991** p. 83–99.

[**8**] (avec C. Silva) A skew produc entropy for nonsingular transformations. *J. London Math. Soc.*, Vol. 52, No. 2, **1995**, p. 497–516.

[**9**] Ergodic reduction of random products of two-by-two matrices. *Journal d'Analyse Mathématique*, Vol. 73. **1997**, p. 19–64.

[**10**] (avec A. Lopes) Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 21, **2001**, p. 1–31.

[**11**] (avec A. Lopes) Sub-actions for Anosov diffeomorphisms. soumis au colloque en l'honneur de J. Palis, 15p.