Généralisation du théorème de Pesin pour l'α-entropie.

P. THIEULLEN [1]
Université de Paris Sud, Mathématiques
91405 Orsay Cedex, France

ABSTRACT: Let M be a compact d-dimensional manifold, $t\in]0,1[$ and $\phi.M\to M$ a $\mathcal{C}^{1,t}$ diffeomorphism preserving a Lebesgue measure m. If we define $h_m(\alpha,x,\phi)$ the α-entropy of ϕ and $\mu_1(x) \geq \mu_2(x) \geq \ldots \geq \mu_d(x)$ the Lyapunov exponents of the tangent map$T\phi$, then for m-almost every x:

$$h_m(\alpha,x,\phi) = \sum_{i=1}^{d} [\mu_i(x)+\alpha]^+ \qquad (\forall\ 0 \leq \alpha \leq -\mu_d(x)),$$
$$h_m(\alpha,x,\phi) = \alpha d \qquad (\forall\ \alpha \geq -\mu_d(x)).$$

RESUME: Soient M une variété compacte de dimension finie d, $t\in]0,1[$ et $\phi:M\to M$ un $\mathcal{C}^{1,t}$ difféomorphisme préservant une mesure de Lebesgue m. Si $h_m(\alpha,x,\phi)$ désigne l'α-entropie de ϕ et $\mu_1(x) \geq \mu_2(x) \geq \ldots \geq \mu_d(x)$, les exposants de Lyapunov de l'application tangente$T\phi$, alors pour m-presque tout x:

$$h_m(\alpha,x,\phi) = \sum_{i=1}^{d} [\mu_i(x)+\alpha]^+ \qquad (\forall\ 0 \leq \alpha \leq -\mu_d(x)),$$
$$h_m(\alpha,x,\phi) = \alpha d \qquad (\forall\ \alpha \geq -\mu_d(x)).$$

REMERCIEMENT: Je voudrais remercier le rapporteur pour l'attention qu'il a apportée à cet article, pour ses commentaires précis et les améliorations détaillées qu'il m'a demandé d'y inclure.

I. Notations et énoncé du résultat principal

Dans tout ce qui suit, M désigne une variété compacte riemannienne de dimension d, m une mesure de Lebesgue (cf. [Di], p. 158) de masse totale égale à 1 définie sur les boréliens $\mathcal{B}$ de M, $\phi:M\to M$ un $\mathcal{C}^{1,t}$ difféomorphisme préservant la mesure m, c'est à dire un difféomorphisme $\mathcal{C}^1$ de différentielle $T\phi$ Hölder d'exposant $t\in]0,1[$ vérifiant la propriété:

$$m(\phi^{-1}(B)) = m(B) \quad (\forall\ B\in \mathcal{B}).$$

M sera muni de la distance géodésique d(x,y) et on appellera $B(x,\varepsilon)$ la boule de centre x et de rayon ε pour cette distance.

[1] Université de Paris Sud
Mathématiques, bât.425
91405 Orsay Cedex

I.1 Rappel de la théorie d'Oseledec ([Os],[Ru],[Le])

En chaque point $x \in M$, l'image par l'application tangente $T_x\phi^n$ de la boule unité $B_x(0,1)$ de T_xM est un ellipsoïde dont les axes principaux ont pour longeur $\chi^n{}_1(x) \geq \chi^n{}_2(x) \geq \ldots \geq \chi^n{}_d(x)$. Le théorème de Kingman ([Ki], théorème I.4) appliqué à la suite sous additive de fonctions

$$f_n(x) = \log \| \Lambda^k T_x\phi^n \| = \sum_{i=1}^{k} \log \chi_i^n(x),$$

$$f_{m+n}(x) \leq f_m(x) + f_n \circ \phi^m(x),$$

(où Λ^k désigne le produit tensoriel k fois, [Sc]) donne l'existence pour presque tout x de la limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \chi_i^n(x) = \mu_i(x) \quad (\forall\ i = 1,2,\ldots,d),$$

où $\mu_1(x) \geq \mu_2(x) \geq \ldots \geq \mu_d(x)$ est la suite des exposants de Lyapunov de ϕ au point x. Comme ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur M compacte, les exposants $\mu_i(x)$ sont des réels finis:

$$-\sup_{x \in M} \log \| T_x\phi^{-1} \| \leq \mu_d(x) \leq \mu_1(x) \leq \sup_{x \in M} \log \| T_x\phi \|,$$

(on notera $\| T_x\phi \| = \sup_{v \neq 0} \frac{\| T_x\phi.v \|}{\| v \|}$, $T_x\phi^n = T_x(\phi^n)$ et $\| T\phi^n \| = \sup_{x \in M} \| T_x\phi^n \|$ $(\forall\ n \in \mathbb{Z})$).

Soient $r = r(x)$ le nombre d'exposants de Lyapunov distincts, $(\lambda_1(x) > \ldots > \lambda_r(x))$ la suite de ces exposants distincts et $d_i(x)$ la multiplicité de $\lambda_i(x)$ dans la suite $(\mu_1(x), \ldots ,\mu_d(x))$. On définit alors la filtration croissante instable

$$E_x^s = \{\ v \in T_xM : \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \| T_x\phi^{-n}.v \| \leq -\lambda_s(x)\ \} \qquad (\forall\ s = 1, \ldots ,r).$$

ainsi que la filtration décroissante stable

$$F_x^s = \{\ v \in T_xM : \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \| T_x\phi^{n}.v \| \leq \lambda_s(x)\ \} \qquad (\forall\ s = 1, \ldots ,r).$$

Le théorème d'Oseledec peut s'énoncer de la manière suivante:

Théorème I.1.1 [Os] Pour presque tout x de M, pour tout s=1,...,r

i) $T_xM = E_x^s \oplus F_x^{s+1}$, $T_x\phi(E_x^s) = E_{\phi(x)}^s$, $T_x\phi(F_x^s) = F_{\phi(x)}^s$, $\lambda_s \circ \phi(x) = \lambda_s(x)$,

ii) $\forall\ v \in F_x^s \backslash F_x^{s+1}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \| T_x\phi^n.v \| = \lambda_s(x)$,

iii) $\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \max (\| P_{\phi^n(x)}^s \| , \| Q_{\phi^n(x)}^s \|) = 0$,

où $F_x^{r+1} = \{ 0 \}$ et (P_x^s , Q_x^s) désigne les deux projecteurs sur E_x^s (resp. sur F_x^{s+1}) parallèlement à F_x^{s+1} (resp. à E_x^s).

La troisième propriété montre que l'angle entre les sous espaces ($E_{\phi^n(x)}^s$, $F_{\phi^n(x)}^s$) le long de l'orbite ne tend pas exponentiellement vite vers zéro. On remarque de plus qu'on peut définir une décomposition en somme directe de T_xM invariante par $T_x\phi$ en posant $G_x^s = E_x^s \cap F_x^s$, alors

iv) $T_xM = G_x^1 \oplus \ldots \oplus G_x^r$, $T_x\phi(G_x^s) = G_{\phi(x)}^s$,

v) $\forall\ v \in G_x^s$ $\quad \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \| T_x\phi^n.v \| = \lambda_s(x)$,

vi) $\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \| \pi_{\phi^n(x)}^s \| = 0$,

où $(\pi_x^1 , \ldots ,\pi_x^r)$ désigne les projecteurs associés à la décomposition: $T_xM = G_x^1 \oplus \ldots \oplus G_x^r$.

Si on appelle m l'élément de volume canonique associée à la métrique riemannienne (cf. [Sp], p. 9-

17), par définition de m, il existe une fonction $h:M \to \mathbb{R}$ borélienne strictement positive telle que

$$m(B) = \int_B h\, d\underline{m} \qquad (\forall B \in \mathcal{B}).$$

Comme $\underline{m}$ est de masse totale finie, h^{-1} est intégrable par rapport à m et si on appelle maintenant $J_x(\phi)$ le jacobien de ϕ au point x, alors

$$J_x(\phi^n) = \chi_1^n(x) \dots \chi_d^n(x) = \frac{h(x)}{h\circ\phi^n(x)} \qquad \text{m p.p.}$$

ce qui montre, en appliquant le théorème de Birkhoff à $h(x)/h\circ\phi(x)$,

$$\sum_{i=1}^{d} \mu_i(x) = \sum_{s=1}^{r} d_s(x)\lambda_s(x) = 0.$$

I.2 Définition de l'α-entropie et résultat principal

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \geq 0$ on définit une nouvelle distance:

$$d_n^{\alpha}(x,y) = \max_{0 \leq k \leq n} \{d(\phi^k(x), \phi^k(y))e^{k\alpha}\}.$$

Une boule de centre x et de rayon η pour cette distance d_n^{α} est de la forme

$$B_n^{\alpha}(x,\eta) = B_n^{\alpha,\phi}(x,\eta) = \bigcap_{k=0}^{n} \phi^{-k}(B(\phi^k(x),\eta e^{-k\alpha})),$$

(pour chaque $\alpha > 0$ fixé, la distance entre deux orbites de deux points quelconques de cette boule décroit exponentiellement vite vers zéro).

On appelle α-entropie locale de la mesure invariante m, les réels positifs suivant:

$$\overline{h}_m(\alpha,x,\phi) = \lim_{\eta \to 0} \limsup_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \log m\,[B_n^{\alpha}(x,\eta)],$$

$$\underline{h}_m(\alpha,x,\phi) = \lim_{\eta \to 0} \liminf_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \log m\,[B_n^{\alpha}(x,\eta)].$$

Cette définition d'α-entropie généralise la notion usuelle d'entropie $h_m(\phi)$ correspondant au cas $\alpha = 0$. Brin et Katok ont en effet démontré l'équivalence suivante:

Théorème I.2.1 [Br-Ka] Pour presque tout x de M,

i) $\overline{h}_m(0,x,\phi) = \underline{h}_m(0,x,\phi) \overset{\text{déf}}{=} h_m(x,\phi)$,

ii) $\int h_m(x,\phi)\, dm(x) = h_m(\phi)$.

Par ailleurs, Pesin [Pe] a démontré dans le cas précisément où m était une mesure de Lebesgue:

Théorème I.2.2 [Pe] Pour tout difféomorphisme ϕ de classe $\mathcal{C}^2$ préservant une mesure de Lebesgue m, $h_m(\phi) = \int \sum_{i=1}^{d} \mu_i^+(x)\, dm(x)$.

Le but de cette article est de généraliser cette égalité (ou plutôt l'égalité locale) à l'α-entropie.

Théorème I.2.3 Pour presque tout $x \in M$

i) $\overline{h}_m(\alpha,x,\phi) = \underline{h}_m(\alpha,x,\phi) = \alpha d \qquad (\forall\, \alpha \geq -\mu_d(x))$,

ii) $\overline{h}_m(\alpha,x,\phi) = \underline{h}_m(\alpha,x,\phi) = \sum_{i=1}^{d} [\mu_i(x) + \alpha]^+ \qquad (\forall\, 0 \leq \alpha \leq -\mu_d(x))$.

Ces inégalités s'appuient beaucoup sur le fait que la dimension fractale de la mesure m est précisément d (ou plus exactement égale à la dimension de Lyapunov ([Ec-Ru], chapitre 4-3)):

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{\log m(B(x,\eta))}{\log \eta} = d \qquad m \text{ p.p.}$$

Il semble probable que le théorème I.2.2 reste encore vrai lorsque la dimension fractale et la dimension de Lyapunov coïncident, même si ϕ n'est plus supposée inversible.

II. Démonstrations

II.1 Cas $\alpha > -\mu_d(x)$

Dans ce cas là, seule la mesure de la dernière boule $\phi^{-n}(B(\phi^n(x),\eta e^{-n\alpha}))$ compte dans le calcul de $m(B_n^\alpha(x,\eta))$. Auparavant nous avons besoin d'établir le lemme suivant:

Lemme II.1.1 Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction K_ε: $M \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que, pour presque tout x, pour tout $\eta > 0$ et pour tout $n \geq 0$

$$(K_\varepsilon(x))^{-1}\,\eta^d \leq m(B(x,\eta)) \leq K_\varepsilon(x)\,\eta^d,$$
$$e^{-n\varepsilon} K_\varepsilon(x) \leq K_\varepsilon(\phi^n(x)) \leq e^{+n\varepsilon} K_\varepsilon(x).$$

Démonstration Grâce à la compacité de M on peut trouver une constantye $C > 0$ telle que

$$C^{-1}\,\eta^d \leq \underline{m}(B(x,\eta)) \leq C\,\eta^d \qquad (\forall\, x \in M,\ \forall\, \eta > 0).$$

Comme la dérivée de Radon-Nikodym de m par rapport à $\underline{m}$ est h (cf. [LY], lemma 4.1.2),

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{m(B(x,\eta))}{\underline{m}(B(x,\eta))} = h(x) \qquad m \text{ p.p.}$$

d'où l'existence de deux fonctions positives finies

$$S(x) = \sup_{\eta > 0}\ m(B(x,\eta))\,\eta^{-d} < +\infty \quad m \text{ p.p.}$$
$$I(x) = \inf_{\eta > 0}\ m(B(x,\eta))\,\eta^{-d} > 0 \quad m \text{ p.p.}$$

Comme $\phi(B(x,\eta\, \| T\phi^{-1} \|)) \supseteq B(\phi(x),\eta) \supseteq \phi(B(x,\eta\, \| T\phi \|^{-1}))$,

$$S\circ\phi(x) \leq \| T\phi^{-1} \|^d\, S(x) \quad \text{et} \quad I\circ\phi(x) \geq \| T\phi \|^{-d}\, I(x).$$

D'apres le lemme III.8 de Mañé $[Ma]_2$ on en déduit

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log S\circ\phi^n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log I\circ\phi^n(x) \quad m \quad \text{p.p.}$$

Le lemme II.1.1 est démontré en prenant par exemple

$$K_\varepsilon(x) = \sup_{n \geq 0} \{\max(S\circ\phi^n(x), I^{-1}\circ\phi^n(x))e^{-n\varepsilon}\}$$

CQFD

Démonstration du théorème I.2.3 (cas $\alpha > -\mu_d(x)$) On remarquera d'abord que $(\alpha \to \underline{h}_m(\alpha,x,\phi))$ est une fonction croissante en α et que pour tout $x \in M$, $\alpha \geq 0$ et $\eta > 0$

$$B_n^\alpha(x\,\eta) \subseteq \phi^{-n}(B(\phi^n(x),\eta e^{-n\alpha}))$$

et donc en utilisant l'invariance de m par ϕ et le lemme II.1.1 on obtient bien $\underline{h}_m(\alpha,x,\phi) \geq \alpha d$.

Réciproquement,appelons $M_\alpha = \{x \in M : -\mu_d(x) < \alpha\}$ et montrons que:

$$\int_{M_\alpha} \overline{h}_m(\alpha,x,\phi)\, dm(x) \leq \alpha d\, m(M_\alpha).$$

On peut supposer d'abord que $m(M_\alpha) > 0$ et appelons $A_N = \{ x \in M_\alpha : \| T_x\phi^{-N} \| < e^{N\alpha} \}$. Comme $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \| T_x\phi^{-N} \| = -\mu_d(x)$ m p.p., $\lim_{N\to\infty} m(A_N) = m(M_\alpha)$. Par continuité de $(x \to \| T_x\phi^{-N} \|)$, on peut trouver un voisinage d'ordre η_N de A_N sur lequel $\| T_x\phi^{-N} \| \le e^{N\alpha}$, en particulier

$$\forall x \in A_N \ \forall y \in B(x,\eta_N) \quad \| T_y\phi^{-N} \| \le e^{\alpha N}.$$

Par ailleurs, en choisissant $\nu \ge \alpha$ tel que $\| T_x\phi^{-1} \| \le e^{\nu}$ pour tout $x \in M$,

$$\forall x \in A_N^c \ \forall y \in B(x,\eta_N) \ \| T_y\phi^{-N} \| \le e^{N\nu},$$

$$\forall x \in M \ \forall \eta < \eta_N \quad \phi^{-N}(B(\phi^N(x),\eta)) \subseteq B(x,\eta e^{\beta\circ\phi^N(x)})$$

où $\beta(x) = N(\alpha \mathbb{1}_{A_N}(x) + \nu \mathbb{1}_{A_N^c}(x)) \ge N\alpha$.

Plus généralement pour tout $0 \le k \le n$

$$\phi^{-kN}(B(\phi^{nN}(x), \eta \exp - \sum_{i=1}^{n} \beta\circ\phi^{iN})) \subseteq B(\phi^{(n-k)N}(x), \eta \exp - \sum_{i=1}^{n-k} \beta\circ\phi^{iN}),$$

$$\phi^{-nN}(B(\phi^{nN}(x), \eta \exp - \sum_{i=0}^{n-1} \beta\circ\phi^{iN})) \subseteq B_n^{N\alpha,\phi^N}(x,\eta).$$

En appliquant le théorème de Birkhoff à β et de nouveau le lemme II.1.1 on obtient

$$\overline{h}_m(N\alpha,x,\phi^N) \le d \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \beta\circ\phi^{iN},$$

$$\overline{h}_m(N\alpha,x,\phi^N) \le dN [\, \alpha\, m(A_N \,|\, \mathcal{I}_N) + \nu\, m(A_N^c \,|\, \mathcal{I}_N) \,]$$

où $m(. \,|\, .)$ désigne la mesure conditionnelle par rapport à la tribu $\mathcal{I}_N$ des ensembles ϕ^N–invariants.

Enfin $\overline{h}_m(\alpha,x,\phi) = \frac{1}{N} \overline{h}_m(N\alpha,x,\phi^N)$ et par intégration sur M_α:

$$\int_{M_\alpha} \overline{h}_m(\alpha,x,\phi)\, dm(x) \le d\alpha\, m(A_N) + d\nu\, m(M_\alpha \setminus A_N).$$

On termine la démonstration en faisant tendre N vers $+\infty$. *CQFD*

II.2 Nombre de recouvrement local

Pour terminer la démonstration du théorème I.2.3, il suffit d'établir la proposition suivante. On appellera par la suite:

$$\Lambda(\alpha,x) = \sum_{i=1}^{d} [\alpha + \mu_i(x)]^+ \qquad (\forall\, 0 \le \alpha \le -\mu_d(x)),$$
$$\Lambda(\alpha,x) = \alpha d \qquad (\forall\, \alpha \ge -\mu_d(x)).$$

Proposition II.2.1 Pour m-presque tout x et pour tout $0 \le \alpha \le \beta$

i) $\overline{h}_m(\beta,x,\phi) - \overline{h}_m(\alpha,x,\phi) \le \Lambda(\beta,x) - \Lambda(\alpha,x)$,

ii) $\underline{h}_m(\beta,x,\phi) - \underline{h}_m(\alpha,x,\phi) \le \Lambda(\beta,x) - \Lambda(\alpha,x)$.

Démonstration du théorème I.2.3 (cas $0 \le \alpha \le -\mu_d(x)$). Les théorèmes I.2.1 et I.2.2 entrainent $\underline{h}_m(0,x,\phi) = \overline{h}_m(0,x,\phi) = \Lambda(0,x)$ m-p.p.. La première inégalité de II.2.1 donne donc $\overline{h}_m(\beta,x,\phi) \le \Lambda(\beta,x)$ $(\forall\, \beta \ge 0)$. La deuxième inégalité montre d'abord que $(\alpha \to \underline{h}_m(\alpha,x,\phi))$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et grâce à $\underline{h}_m(-\mu_d(x),x,\phi) = -d\mu_d(x) = \Lambda(-\mu_d(x),x)$, elle montre que alors $\underline{h}_m(\alpha,x,\phi) \ge \Lambda(\alpha,x)$ pour tout $0 \le \alpha \le -\mu_d(x)$. *CQFD*

La démonstration de la proposition II.2.1 se décompose en deux parties. On appelle nombre de recouvrement local $R_n^{\alpha,\beta}(x,\eta)$ le nombre minimum de boules $B_n^\beta(y,\eta/2)$ nécéssaires pour recouvrir $B_n^\alpha(x,2\eta)$:

$$R_n^{\alpha,\beta}(x,\eta) = \inf \{N : \exists\, y_1, \dots, y_N \in M \mid B_n^\alpha(x,2\eta) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_n^\beta(y_i,\eta/2)\}.$$

La première partie est très générale.

Lemme II.2.3 Soient $(M,\mathcal{B})$ un espace de Borel standard (cf. [Pa], chapitre, V.2.2), m une mesure de probabilité, d_1, d_2 deux distances vérifiant

i) $((x,y) \in M^2 \to d_i(x,y))$ est une application mesurable,

ii) $m(\{ x \in M : m(B_i(x,\eta) = 0 \}) = 0 \quad (\forall\, \eta > 0)$,

où $B_1(x,\eta)$ et $B_2(x,\eta)$ désignent les boules associées et $R(x,\eta)$ le nombre minimum de boules $B_2(y,\eta/2)$ nécessaires pour recouvrir $B_1(x,2\eta)$. Alors pour tout $\lambda \in \,]0,1[$, $\eta > 0$

$$m(\{ x \in M : m(B_2(x,\eta)) \leq \lambda\, m(B_1(x,\eta)) / R(x,\eta) \}) \leq \lambda.$$

Démonstration Nous commençons par montrer une inégalité maximale plus générale. Pour toute fonction f intégrable positive on appellera

$$f_\eta(x) = \frac{1}{m(B_1(x,\eta)} \int_{B_1(x,2\eta)} f(y)\, m(dy).$$

Alors pour tout $\lambda \in \,]0,1[$

$$(*) \qquad m(\{ x \in M : f_\eta(x) \leq \lambda\, f(x) \}) \leq \lambda.$$

On peut commencer par supposer que le support de m est M et que $\inf_{x \in M} f(x) > 0$ (en prenant par exemple $f^{(\varepsilon)} = \varepsilon + f(x)$), alors

$$m(\{ x \in M : f_\eta(x) \leq \lambda\, f(x) \}) \leq \lambda \int \frac{f(x)}{f_\eta(x)}\, m(dx)$$
$$= \lambda \int \frac{f(x)\, m(B_1(x,\eta)}{\int_{B_1(x,2\eta)} f(y)\, m(dy)}\, m(dx)$$

(en utilisant l'identité $\mathbb{1}_{B_1(x,\eta)}(z) = \mathbb{1}_{B_1(z,\eta)}(x)$ et le théorème de Fubini, on obtient:)

$$= \lambda \int \Big[\int_{B_1(z,\eta)} \frac{f(x)}{\int_{B_1(x,2\eta)} f(y)\, m(dy)}\, m(dx) \Big]\, m(dz)$$

ce qui montre l'inégalité maximale (*) en remarquant

$$(\forall\, x \in B_1(z,\eta)) \qquad B_1(x,2\eta) \supseteq B_1(z,\eta).$$

On applique maintenant cette inégalité à $f(x) = \dfrac{1}{m(B_2(x,\eta))}$ et on remarque que

$$\int_{B_1(x,2\eta)} \frac{m(dy)}{m(B_2(y,\eta))} \leq R(x,\eta).$$

On peut en effet recouvrir $B_1(x,2\eta)$ par $R(x,\eta)$ boules $B_2(y_i,\eta/2)$ et de nouveau utiliser

$$(\forall\, y \in B_2(y_i,\eta/2)) \quad B_2(y,\eta) \supseteq B_2(y_i,\eta/2).$$

CQFD

Corollaire II.2.4 Pour presque tout x et pour tout $0 \leq \alpha \leq \beta$, $\eta > 0$,

$$\limsup_{n \to +\infty} \; -\frac{1}{n} \log \Big[\frac{m(B_n^\beta(x,\eta))}{m(B_n^\alpha(x,\eta))} \Big] \leq \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log R_n^{\alpha,\beta}(x,\eta).$$

Démonstration Fixons $\zeta > 0$ et appelons

$$A_n = \{ x \in M : m(B_n^\beta(x,\eta)) \leq e^{-n\zeta} \frac{m(B_n^\alpha(x,\eta))}{R_n^{\alpha,\beta}(x,\eta)} \}.$$

D'après le lemme précédent II.2.2, $m(A_n) \leq e^{-n\zeta}$, et d'apres Borel-Cantelli, presque tout x n'appartient pas à A_n à partir d'un certain rang n, d'où

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \frac{m(B_n^\alpha(x,\eta))}{m(B_n^\beta(x,\eta))\, R_n^{\alpha,\beta}(x,\eta)} \leq \zeta$$

pour tout $\zeta > 0$. *CQFD*

II.3 Métrique de Lyapunov et cônes invariants

La deuxième partie de la démonstration de II.2.1 consiste à majorer $R_n^{\alpha,\beta}(x,\eta)$ en fonction des exposants de Lyapunov. Comme dans tout ce qui suit nous allons travailler autour de l'orbite d'un point $x \in M$ fixé (générique pour m), nous commençons par remplacer ϕ par son relevé dans l'espace tangent au moyen de l'application exponentielle.

Notations II.3.1 Par compacité de M, on peut trouver des constantes $\varepsilon_0 > 0$, $C \geq 1$ telles que

i) $\exp_x$ soit un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $\{ v \in T_xM : \| v \| < \varepsilon_0 C \}$ sur $B(x,\varepsilon_0 C)$,

ii) $\max_{x \in M} (\| T_x\phi \| , \| T_x\phi^{-1} \| , \mathrm{lip}(\exp_x) , \mathrm{lip}(\exp_x^{-1})) \leq C$,

iii) $\| D_vf_x - D_wf_x \| \leq C \| v - w \|^t \quad (\forall \ \| v \|, \|w \| < \varepsilon_0)$,

où $f_x = \exp_{\phi(x)}^{-1} \circ \phi \circ \exp_x$ sur $\{ v \in T_xM : \| v \| < \varepsilon_0 \}$, D_vf_x est la différentielle de f_x au point $v \in T_xM$ (en particulier $D_0f_x = T_x\phi$).

Pour simplifier on écrira par la suite $T_x = T_x\phi$. On construit maintenant sur chaque espace tangent une nouvelle métrique (dite de Lyapunov) $\| . \|_\varepsilon$ dépendant mesurablement de x et d'un paramètre ε qu'on fera tendre 0 à la fin de la démonstration, de manière que sur chaque sous espace G_x^s, T_x se comporte comme une homothétie de rapport $e^{\lambda_s(x)}$. On notera dans la suite $(\varepsilon : M \to]0,\varepsilon_0[)$ une fonction mesurable invariante par ϕ ($\varepsilon \circ \phi = \varepsilon$ m-p.p.).

Définition II.3.2 Pour presque tout x, pour tout $v = v_1 + \ldots + v_r \in T_xM$, où $v_s \in G_x^s$, on pose

$$\| v \|_\varepsilon = \max(\| v_1 \|_\varepsilon, \ldots, \| v_r \|_\varepsilon),$$

$$\| v_s \|_\varepsilon = \sqrt{r(x)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-n\, \lambda_s(x) - |n|\, \varepsilon(x)) \ \| T_x^n v_s \|.$$

Rappelons les propriétés de la métrique de Lyapunov (cf. [Ka-St], théorème 2.2, p. 10):

Proposition II.3.3 Pour toute fonction ϕ-invariante $(\varepsilon : M \to]0,\varepsilon_0[)$, on peut construire une fonction mesurable $(\rho_\varepsilon : M \to]0,\varepsilon[)$ qui vérifie les propriétés suivantes:

i) $e^{-\varepsilon(x)} \leq \rho_\varepsilon \circ \phi(x) / \rho_\varepsilon(x) \leq e^{\varepsilon(x)}$,

ii) $\forall\ v \in T_xM \qquad \| v \| \leq \| v \|_\varepsilon \leq \| v \| \, (\rho_\varepsilon(x))^{-1}$,

iii) $\forall\ v \in G_x^s \qquad e^{\lambda_s - \varepsilon} \| v \|_\varepsilon \leq \| T_xv_s \|_\varepsilon \leq \| v \|_\varepsilon\, e^{\lambda_s + \varepsilon}$,

iv) $\forall\ v \in T_xM \qquad \| v \|_\varepsilon , \| w \|_\varepsilon \leq \rho_\varepsilon(x) \Rightarrow \| D_vf_x - D_wf_x \|_\varepsilon < \varepsilon(x)$,

v) $\| P^s_x \|_\varepsilon = \| Q^s_x \|_\varepsilon = 1$.

La construction fait intervenir les fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-n\,\lambda_s(x) - |n|\frac{\varepsilon}{2}(x))\ \| T^n_x \mid G^s_x \|$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-|n|\frac{\varepsilon}{2}(x))\ \max(\| P^s_{\phi^n(x)} \|, \| Q^s_{\phi^n(x)} \|)$, le lemme III.8 de Mañé $[\mathrm{Ma}]_2$ et pour la première fois le fait que $T\phi$ est Hölder d'exposant $t \in\ ]0,1[$.

On notera dans la suite $B_{x,\varepsilon}(v,\eta) = \{ w\in T_xM : \| v-w \|_\varepsilon < \eta \}$ une boule de centre v et de rayon η pour cette nouvelle métrique dans chaque espace tangent. Une propriété importante des systèmes hyperboliques est l'invariance des cônes par la transformation. On supposera de plus dans la suite que pour presque tout x de M:

$$2\varepsilon(x) < \min_{1\le s\le r} \left(e^{\lambda_s(x) - \varepsilon(x)} - e^{\lambda_{s+1}(x) + \varepsilon(x)} \right).$$

Proposition II.3.4 Pour presque tout $x\in M$, pour tout $0 \le s \le r$, v,w dans $B_{x,\varepsilon}(0,\rho_\varepsilon(x))$

i) si $\| P^s_x (v-w) \|_\varepsilon \ge \| Q^s_x (v-w) \|_\varepsilon$ alors
$\| P^s_{\phi(x)} (f_x(v)-f_x(w)) \|_\varepsilon \ge \| Q^s_{\phi(x)} (f_x(v)-f_x(w)) \|_\varepsilon$ et
$\| v-w \|_\varepsilon \le (e^{\lambda_s - \varepsilon} - \varepsilon)^{-1} \| f_x(v)-f_x(w) \|_\varepsilon$

ii) si $\| P^s_{\phi(x)} (f_x(v)-f_x(w)) \|_\varepsilon \le \| Q^s_{\phi(x)} (f_x(v)-f_x(w)) \|_\varepsilon$ alors
$\| P^s_x (v-w) \|_\varepsilon \le \| Q^s_x (v-w) \|_\varepsilon$ et
$\| f_x(v)-f_x(w) \|_\varepsilon \le (e^{\lambda_{s+1} + \varepsilon} + \varepsilon) \| v-w \|_\varepsilon$.

Démonstration La propriété iv) de la proposition II.3.3 donne

$$\| f_x(v)-f_x(w) - T_x(v-w) \|_\varepsilon \le \varepsilon \| v-w \|_\varepsilon.$$

On obtient le résultat en projettant cette inégalité sur E^s_x et F^{s+1}_x et en utilisant

$$\forall\ v\in E^s_x \qquad \| T_x v \|_\varepsilon \ge e^{\lambda_s - \varepsilon} \| v \|_\varepsilon,$$
$$\forall\ v\in F^{s+1}_x \qquad \| T_x v \|_\varepsilon \le e^{\lambda_{s+1}+\varepsilon} \| v \|_\varepsilon.$$

CQFD

On notera enfin $\mathcal{D}_{x,\varepsilon,n} = \{ v\in T_xM : \forall\ 0\le k\le n \quad \| f^k_x(v) \|_\varepsilon < \rho_\varepsilon\circ\phi^k(x) \}$, le domaine de validité des propositions II.3.3 et II.3.4 pour la suite des transformations $(f^k_x)^n_{k=0}$ où pour tout $v\in \mathcal{D}_{x,\varepsilon,n}$

$$f^k_x = f_{\phi^{k-1}(x)} \circ \ldots \circ f_{\phi(x)} \circ f_x$$
$$B^\alpha_{x,\varepsilon,n}(v,\eta) = \{ w\in \mathcal{D}_{x,\varepsilon,n} : \| f^k_x(w) - f^k_x(v) \| < \eta\, e^{-k\alpha}\ (\forall\ 0\le k\le n) \}.$$

Corollaire II.3.5 Pour presque tout $x\in M$, pour tout $\eta\in\ ]0,\rho_\varepsilon[$ et β tels que

$$e^{\lambda_{s+1} + \varepsilon} + \varepsilon \le e^{-\beta} \le e^{\lambda_s - \varepsilon} - \varepsilon.$$

Si $(v,w)\in \mathcal{D}_{x,\varepsilon,n}$, $\| Q^s_x(v-w) \|_\varepsilon < \eta$ et $\| P^s_{\phi^n(x)}(f^n_x(v) - f^n_x(w)) \|_\varepsilon < \eta e^{-n\beta}$ alors

$$\| f^k_x(v) - f^k_x(w) \|_\varepsilon < \eta e^{-k\beta} \quad (\forall\ 0\le k\le n).$$

Démonstration Deux cas apparaîssent suivant que $f^k_x(v) - f^k_x(w)$ appartienne au cône instable ou stable:
Ou bien $\| P^s_{\phi^k(x)}(f^k_x(v) - f^k_x(w)) \|_\varepsilon \ge \| Q^s_{\phi^k(x)}(f^k_x(v) - f^k_x(w)) \|_\varepsilon$ alors

$$\| f^k_x(v) - f^k_x(w) \|_\varepsilon \le [\, e^{\lambda_s - \varepsilon} - \varepsilon]^{-(n-k)} \| f^n_x(v) - f^n_x(w) \|_\varepsilon.$$

Ou bien $\| P^s_{\phi^k(x)}(f^k_x(v) - f^k_x(w)) \|_\varepsilon \le \| Q^s_{\phi^k(x)}(f^k_x(v) - f^k_x(w)) \|_\varepsilon$ alors

$$\| f_x^k(v) - f_x^k(w) \|_\varepsilon \le [\, e^{\lambda_{s+1}+\varepsilon} + \varepsilon \,]^k \, \| v - w \|_\varepsilon . \qquad \textit{CQFD}$$

II.4 Démonstration de la proposition II.2.1 (cas $0 \le \alpha \le -\mu_d(x)$)

Appelons $R^{\alpha,\beta}_{x,\varepsilon,n}(v,\eta)$ le nombre minimum de boules $B^{\beta}_{x,\varepsilon,n}(v_i,\eta/2C)$ nécessaires pour recouvrir $B^{\alpha}_{x,\varepsilon,n}(v,2C\,\eta/\rho_\varepsilon(x))$. Alors une première étape de la démonstration de II.2.5 consiste à établir:

Lemme II.4.1 Pour presque tout $x \in M$, pour tout $0 \le \alpha \le \beta$

$$\limsup_{\eta\to 0}\ \limsup_{n\to+\infty}\ -\frac{1}{n}\log\frac{m(B^{\beta}_n(x,\eta))}{m(B^{\alpha}_n(x,\eta))} \le \limsup_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{\eta\to 0}\ \limsup_{n\to+\infty}\ \frac{1}{n}\log R^{(\alpha-\varepsilon)^+,\beta}_{x,\varepsilon,n}(0,\eta).$$

Démonstration Supposons d'abord $\alpha > 0$ et choisissons ε tel que $2\varepsilon(x) < \alpha$ m-p.p. Alors l'inégalité demandée découle du corollaire II.2.4 et de l'inégalité

$$R^{\alpha,\beta}_n(x,\eta) \le R^{\alpha-\varepsilon,\beta}_{x,\varepsilon,n}(0,\eta) \qquad (\forall\, \eta < (\rho_\varepsilon(x))^2/2C).$$

En effet
$$(\exp_x)^{-1}(B^{\alpha}_n(x,2\eta)) \subseteq B^{\alpha-\varepsilon}_{x,\varepsilon,n}(0,2C\eta\rho_\varepsilon(x)^{-1}),$$
et
$$(\exp_x)\,(B^{\beta}_{x,\varepsilon,n}(0,\eta/2C)) \subseteq B^{\beta}_n(x,\eta/2).$$

Dans le cas où $\alpha = 0$, comme ρ_ε est une fonction régulière le long des orbites (inégalités i) de la proposition II.3.3), le lemme 2 de Mañé s'applique [Ma]$_1$. Pour tout $\eta < (\rho_\varepsilon(x))^2/2C$, $\delta \in]0,1[$ il existe un borélien A vérifiant $m(A) > 1-\delta$ et une partition $\mathcal{P}_n$ d'entropie finie telle que pour tout $x \in A$, $n \ge 0$,

$$\mathcal{P}_n(x,\eta) := \bigcap_{k=0}^{n} \phi^{-k}(\mathcal{P}_n \circ \phi^k(x)) \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} \phi^{-k}(B(\phi^k(x),2\eta(\rho\circ\phi^k(x))^2/\rho_\varepsilon(x)).$$

Ce qui montre

$$(\exp_x)^{-1}\,(\mathcal{P}_n(x,\eta)) \subseteq B^{0}_{x,\varepsilon,n}(0,2C\eta/\rho_\varepsilon(x)) \quad (\forall\, x\in A,\ \forall\, n \ge 0).$$

Le nombre minimum de boules $B^{\beta}_n(y_i,\eta/2)$ nécessaires pour recouvrir $\mathcal{P}_n(x,\eta)$ est donc au plus $R^{0,\beta}_{x,\varepsilon,n}(0,\eta)$ pour tout $x \in A$ et $n \ge 0$. De la même manière que pour le corollaire II.2.4 on peut démontrer

$$\limsup_{n\to+\infty}\ -\frac{1}{n}\log\frac{m(B^{\beta}_n(x,\eta))}{m(\mathcal{P}_n(x,\eta))} \le \limsup_{n\to+\infty}\ \frac{1}{n}\log R^{0,\beta}_{x,\varepsilon,n}(0,\eta) \quad (\forall\, x\in A).$$

Par ailleurs, en utilisant le théorème de Brin et Katok [Br-Ka]

$$\underline{h}_m(0,x,\phi) = \overline{h}_m(0,x,\phi) = \lim_{\eta\to 0}\ \lim_{n\to+\infty}\ -\frac{1}{n}\log m(\mathcal{P}_n(x,\eta)),$$

on obtient pour presque tout $x \in M$

$$\limsup_{n\to+\infty}\ -\frac{1}{n}\log m(B^{\beta}_n(x,\eta)) \le \underline{h}_m(0,x,\phi) + \limsup_{n\to+\infty}\ \frac{1}{n}\log R^{0,\beta}_{x,\varepsilon,n}(0,\eta). \qquad \textit{CQFD}$$

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant élémentaire (cf. [Li-Tz], proposition I.c.3):

Lemme II.4.2 Pour tout espace vectoriel normé de dimmension d, il existe une constante $\Gamma(d)$ ne dépendant que de la dimension d telle que, en appelant $r(\eta)$ le nombre minimum de boules de rayon η nécessaires pour recouvrir la boule unité, on a

$$r(\eta) \le \Gamma(d)\max(1,\eta^{-d}) \qquad (\forall\, \eta > 0).$$

Démonstration de la proposition II.2.1 Il ne reste plus maintenant qu'à majorer $R^{\alpha,\beta}_{x,\varepsilon,n}(0,\eta)$ pour tout $0 < \alpha < \beta$, $\eta \in]0,\rho_\varepsilon[$, $n \ge 0$ et ε suffisament petit dépendant de α et β. Plus généralement on cherchera à majorer $R^{\alpha,\beta}_{x,\varepsilon,n}(w,\eta)$ pour $w \in \mathcal{D}_{x,\varepsilon,n}$, ce qui permettra de supposer $\beta-\alpha$ petit: si $\alpha < \beta < \gamma$ on utilisera l'inégalité suivante:

$$R^{\alpha,\gamma}_{x,\varepsilon,n}(0,\eta) \leq R^{\alpha,\beta}_{x,\varepsilon,n}(0,\eta) \sup_{w \in \mathcal{D}_{x,\varepsilon,n}} R^{\beta,\gamma}_{x,\varepsilon,n}(w,\eta).$$

Premier cas: $-\mu_d(x) = -\lambda_r(x) \leq \alpha < \beta$. Fixons $w \in \mathcal{D}_{x,\varepsilon,n}$. On commence par recouvrir $B_{\phi^n(x),\varepsilon}(f^n_x(w),2C\eta e^{-n\alpha}/\rho_\varepsilon(x))$ par des boules $B_{\phi^n(x),\varepsilon}(w_i,\eta e^{-n\beta}/4C)$, $i = 1,2,\ldots,N$ avec

$$N \leq \Gamma(d) \left(\frac{\eta e^{-n\beta}/4C}{2C\eta e^{-n\alpha}/\rho_\varepsilon(x)}\right)^{-d}.$$

Quitte à doubler le rayon de ces boules, on peut trouver $(v_1,\ldots,v_N) \in \mathcal{D}_{x,\varepsilon,n}$ tels que

$$f^n_x(B^\alpha_{x,\varepsilon,n}(w,2C\eta/\rho_\varepsilon(x)) \subsetneq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\phi^n(x),\varepsilon}(f^n_x(v_i),\eta e^{-n\beta}/2C).$$

Mais si $v \in B^\alpha_{x,\varepsilon,n}(x,2C\eta/\rho_\varepsilon(x))$

$$\| f^n_x(v) - f^n_x(v_i) \|_\varepsilon < \eta e^{-n\beta}/2C,$$

comme

$$\| f^{n-k}_x(v) - f^{n-k}_x(v_i) \|_\varepsilon \leq [e^{\lambda_r - \varepsilon} - \varepsilon]^{-k} \eta e^{-n\beta}/2C.$$

En supposant maintenant ε suffisament petit: $e^{\lambda_r - \varepsilon} - \varepsilon > \varepsilon^{-\beta}$,on obtient donc

$$v \in B^\beta_{x,\varepsilon,n}(v_i,\eta/2C) \ , \ R^{\alpha,\beta}_{x,\varepsilon,n}(w,\eta) \leq \Gamma(d)\, \rho_\varepsilon^{-d}(x) \frac{e^{-n(\alpha-\beta)d}}{(8C)^{-d}},$$

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \sup_w R^{\alpha,\beta}_{x,\varepsilon,n}(w,\eta) \leq (\alpha-\beta)d = \Lambda(\beta,x) - \Lambda(\alpha,x).$$

Deuxième cas. $-\lambda_s \leq \alpha \leq \beta \leq -\lambda_{s+1}$, $\gamma \in]\alpha,\beta[$ et $w \in \mathcal{D}_{x,\varepsilon,n}$. On recouvre de nouveau $P^s_{\phi^n(x)}[B_{\phi^n(x),\varepsilon}(f^n_x(w),2C\eta e^{-n\alpha}/\rho_\varepsilon(x))]$ par des boules $B_{\phi^n(x),\varepsilon}(b_j,\eta e^{-n\beta}/4C)$, $b_j \in E^s_{\phi^n(x)}$, $j = 1,\ldots,N$ avec

$$N \leq \Gamma(\delta_s) \left(\frac{2C\eta e^{-n\alpha}/\rho_\varepsilon(x)}{\eta e^{-n\beta}/4C}\right)^{\delta_s}$$

où $\delta_s = d_1 + \ldots + d_s = \dim(E^s_x)$.

Puis on recouvre $Q^s_x[B_{x,\varepsilon}(w,2C\eta/\rho_\varepsilon(x))]$ par des boules $B_{x,\varepsilon}(a_i,\eta e^{-n(\beta-\gamma)}/4C)$, $a_i \in F^{s+1}_x$, $i = 1,\ldots,M$ avec

$$M \leq \Gamma(d-\delta_s) \left(\frac{2C\eta/\rho_\varepsilon(x)}{\eta e^{-n(\beta-\gamma)}/4C}\right)^{d-\delta_s}.$$

On choisit pour chaque (i,j) un vecteur $v_{i,j} \in \mathcal{D}_{x,\varepsilon,n}$ tel que:

$$\| Q^s_x(v_{i,j} - a_i) \|_\varepsilon < \eta e^{-n(\beta-\gamma)}/4C \quad \text{et} \quad \| P^s_{\phi^n(x)}(f^n_x(v_{i,j}) - b_j) \|_\varepsilon < \eta e^{-n\beta}/4C.$$

Si maintenant ε est tel que

$$e^{\lambda_{s+1} + \varepsilon} + \varepsilon \leq e^{-\gamma} \leq e^{\lambda_s - \varepsilon} - \varepsilon,$$

en appliquant le principe d'invariance des cônes (corollaire II.3.5), pour tout $v \in B^\alpha_{x,\varepsilon,n}(w,2C\eta/\rho_\varepsilon(x))$ on peut trouver deux indices i,j tels que

$$\| Q^s_x(v - v_{i,j}) \|_\varepsilon < \eta e^{-n(\beta-\gamma)}/2C \quad \text{et} \quad \| P^s_{\phi^n(x)}(f^n_x(v) - f^n_x(v_{i,j})) \|_\varepsilon < \eta e^{-n(\beta-\gamma)} e^{-n\gamma}/2C$$

et donc

$$\| f^k_x(v) - f^k_x(v_{i,j}) \|_\varepsilon \leq \eta e^{-n(\beta-\gamma)} e^{-k\gamma}/2C \leq \eta e^{-k\beta}/2C,$$

ce qui montre:

$$R^{\alpha,\beta}_{x,\varepsilon,n}(w,\eta) \leq MN = \Gamma(\delta_s)\Gamma(d-\delta_s) \left(\frac{8C}{\rho_\varepsilon(x)}\right)^d e^{n(\beta-\alpha)\delta_s + n(\beta-\gamma)(d-\delta_s)},$$

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \sup_w R^{\alpha,\beta}_{x,\varepsilon,n}(w,\eta) \leq \Lambda(\beta,x) - \Lambda(\alpha,x) + (\beta-\gamma)(d-\delta_s).$$

Il reste à faire tendre η vers 0, ε vers 0 et γ vers β. *CQFD*

Références

[Br-Ka] M. Brin & A. Katok. On local entropy. *Geometric Dynamics. Lecture Notes in Mathematics,* **1007**(1983), 30-38.

[Di] J. Dieudonné. *Eléments d'analyse. Tome III. Chapitre XVI et XVII.* Cahiers Scientifiques. (1970). Gauthier-Villars Editeurs.

[Ec-Ru] I. Eckmann & D. Ruelle. Ergodic theory and strange attractors. *Reviews of Modern Physics, Vol.* **57**(1985), 617-656.

[Ka-St] A. Katok & J.M.Strelcyn. Invariants manifolds, Entropy and Billiards; Smooth Maps with Singularities. *Lecture Notes in Mathematics, Vol.***1222**(1980). Springer-Verlag.

[Ki] J.F.C. Kingman. Subadditive processes. *Springer Lecture Notes in Math.* **539**(1976).

[Le] F. Ledrappier. Quelques propriétés des exposants caractéristiques. *Springer Lecture Notes in Math.* **1097** (1984).

[Li-Tz] J. Lindenstrauss & L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces. Volume I.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgegiete, **97**(1979). Springer-Verlag.

[LY] F. Ledrappier & L.S. Young. The metric entropy of diffeomorphisms. *Ann. of Math.* **122**(1985), 509-574.

[Ma]$_1$ R. Mañé. A proof of Pesin formula. *Ergodic Theory and Dynamical Systems,* **1**(1981), *p.*95-102.

[Ma]$_2$ R. Mañé. Lyapunov exponents and stable manifolds for compact transformations. *Geometric Dynamic, Lecture Notes in Mathematics, Vol.***1007**(1983), *p.*522-577.

[Os] V.I. Oseledets. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov Characteristic numbers for dynamical systems. *Trudy Moskov. Math. Obsc.* **19**(1968), [=*Trans. Moscow Math. Soc.* **19**(1968), *p.* 197-221].

[Pa] K.R. Parthasarathy. *Probability measures on metric spaces.* Probability and Mathematical Statistics. **3**(1967). Academic Press.

[Pe] Ya. Pesin. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Mathematical Surveys,* **32:4**(1977), 55-114. From *Uspekhi Mat. Nauk* **32:4**(1977), 55-112.

[Ru] D. Ruelle. Characteristic exponents and invariant manifolds in Hilbert spaces. *Annals of Mathematics, Vol.* **115**(1982), *p.* 243-290.

[Sc] L. Schwartz. *Les tenseurs.* Actualités Scientifiques et Industrielles, **1376**(1975). Hermann.

[Sp] M. Spivak. *A Comprehensive Inroduction to Differential Geometry. Volume one.* (1970). Brandeis University.