ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

P. THIEULLEN

Fibres dynamiques. Entropie et dimension

Annales de l'I. H. P., section C, tome 9, n° 2 (1992), p. 119-146.

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1992__9_2_119_0>

© Gauthier-Villars, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section C » (http://www.elsevier.com/locate/anihpc), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 9, n° 2, 1992, p. 119-146. *Analyse non linéaire*

Fibres dynamiques. Entropie et dimension

par

P. THIEULLEN

Département de Mathématiques,
91405 Orsay Cedex, France

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous montrons que l'égalité entre la dimension fractale de la mesure et la dimension de Lyapounov du fibré tangent est une condition suffisante pour obtenir l'égalité dans la formule de Pesin en dimension infinie entre l'entropie métrique d'une application de classe $\mathscr{C}^{1,t}$ non supposée inversible et la somme de ses exposants de Lyapounov positifs.

Mots clés : Analyse non-linéaire, système dynamique, théorie ergodique, entropie, dimension.

ABSTRACT. — In this paper, we show that the equality between the fractal dimension of the measure and the Lyapunov dimension of the tangent bundle is a sufficient condition to obtain the equality in Pesin's formula in infinite dimension, between the metric entropy of a $\mathscr{C}^{1,t}$ map which is not invertible *a priori* and the sum of its positive Lyapunov exponents.

Classification A.M.S. : 28 D 20, 28 D 05, 54 H 20, 58 F 11, 58 F 15.

PLAN

I. INTRODUCTION ET ÉNONCÉ DU THÉORÈME PRINCIPAL

Le but de cet article est de généraliser, dans le cadre de la dimension infinie, l'égalité due à Pesin [Pe], entre l'entropie d'une transformation φ préservant une mesure de probabilité μ et la somme des exposants de Lyapounov positifs $\lambda_i(x)$ de l'application tangente $T_x \varphi$ de φ au point x :

$$h_\mu(\varphi) = \int \sum_{i \geq 1} \lambda_i(x)\, d_i(x)\, d\mu(x).$$

Ledrappier et Young [LY] ont montré, qu'en dimension finie, une telle égalité ne pouvait avoir lieu que si, et seulement si, les mesures conditionnelles de μ sur la variété instable étaient absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue induites sur chacune de ces variétés. Auparavant, Pesin avait établi cette égalité dans le cas où la mesure μ toute entière était absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur X (X étant dans ce cas une variété riemannienne compacte, $\varphi : X \to X$ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^2$ et $T\varphi : TM \to TM$ l'application tangente).

En dimension infinie la notion de mesure de Lebesgue n'a plus beaucoup de sens ; en général X sera obtenu comme attracteur d'une certaine équation dissipative aux dérivées partielles (*cf.* le livre de Temam [Te]). Il est par contre plus intéressant de connaître la dimension de Hausdorff de X ou bien la dimension fractale de la mesure invariante μ :

$$\dim_F(x, \mu) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mu [B(x, \varepsilon)]}{\log \varepsilon},$$

ainsi que la dimension de Lyapounov de l'application tangente T :

$$\dim_L(x, T) = n + \frac{\lambda_1(x) d_1(x) + \ldots + \lambda_n(x) d_n(x)}{|\lambda_{n+1}(x)|},$$

[n étant le plus grand entier tel que $\lambda_1(x) d_1(x) + \ldots + \lambda_n(x) d_n(x)$ soit positif ou nul].

Dans le cadre de Pesin, ces deux dimensions sont égales à la dimension de la variété. Le but de cet article est de démontrer l'égalité entre l'entropie locale de φ (introduite par Brin-Katok),

$$h_\mu(x, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} -\frac{1}{n} \log \mu [B_n(x, \varepsilon)],$$

où

$$B_n(x, \varepsilon) = \bigcap_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k} B(\varphi^k(x), \varepsilon)$$

et la somme des exposants de Lyapounov positifs, c'est-à-dire de montrer l'égalité :

$$h_\mu(x, \varphi) = \sum_{i \geqq 1} \lambda_i^+(x) d_i(x),$$

précisément pour presque tout x vérifiant $\dim_F(x, \mu) = \dim_L(x, T)$.

Si μ est ergodique (les seuls ensembles invariants par φ sont les ensembles de mesure 0 ou 1), $h_\mu(x, \varphi)$, $\lambda_i(x)$, $d_i(x)$ sont des fonctions invariantes ; elles sont donc constantes presque sûrement. Si μ est une mesure invariante quelconque, ces fonctions sont constantes le long des trajectoires ; on retrouve alors le théorème de Pesin en intégrant l'égalité précédente et en utilisant le résultat important de Brin-Katok [BK] suivant :

$$h_\mu(\varphi) = \int h_\mu(x, \varphi) \, d\mu(x).$$

La nouveauté dans cet article vient de ce qu'on ne suppose plus l'application φ inversible, et encore moins que T_x est inversible (on supposera au contraire que $T_x^n = T_{\varphi^{n-1}(x)} \circ \ldots \circ T_{\varphi(x)} \circ T_x$ satisfait une condition asymptotique de compacité qu'on précisera plus loin ; ce qui entraînera en particulier l'existence d'un nombre fini d'exposants de Lyapounov positifs). On obtiendra comme corollaire, l'égalité entropique de Pesin dans le cas où φ préserve une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m et dans le cas où φ n'est plus supposée inversible. La première idée est de travailler dans l'extension canonique du système dynamique $(X, \mathscr{B}, \varphi, m)$, qui n'est rien d'autre que l'ensemble des orbites complètes $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On peut alors montrer qu'on ne change pas d'entropie locale, ni d'exposants de Lyapounov. Dans l'extension canonique, φ devient inversible, T_x devient un opérateur injectif pour tout x mais reste bien entendu non inversible. En fait T « contracte » la dynamique sur un espace de dimension finie (la somme des multiplicités des exposants de Lyapounov positifs) et T devient inversible sur cet espace. La seconde idée de la démonstration consiste à généraliser la définition locale de l'entropie et d'introduire la notion d'α-entropie :

$$h_\mu^\alpha(x, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} -\frac{1}{n} \log \mu [B_n^{\varphi, \alpha}(x, \varepsilon)]$$

où

$$B_n^{\varphi, \alpha}(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(\varphi^i(x), \varphi^i(x)) < \varepsilon \exp(-i\alpha), \forall i = 0, 1, \ldots, n\}.$$

On remarque que $h_\mu^0(x, \varphi)$ est l'entropie locale usuelle de φ et que $h_\mu^\alpha(x, \varphi) \geqq \alpha \dim_F(x, \mu)$ pour tout $\alpha \geqq 0$. Un des points essentiels de la démonstration consiste à établir l'inégalité :

$$h_\mu^\alpha(x, \varphi) - h_\mu^0(x, \varphi) \leqq \sum_{i \geqq 1} [\lambda_i(x) + \alpha]^+ d_i(x) - \sum_{i \geqq 1} \lambda_i^+(x) d_i(x).$$

Cet article représente la suite de l'article $[\mathrm{Th}]_1$. Des résultats plus complets sur l'α-entropie pour des transformations préservant une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur une variété riemannienne compacte sont donnés dans $[\mathrm{Th}]_2$.

I.1. Définition d'un fibré dynamique

On appelle fibré dynamique $\mathscr{F} = (X, \mathscr{B}, \varphi, \mu, E, T)$ la donnée d'un espace de Banach E, d'un espace lusinien X (*cf.* [DM], p. 72, déf. III.16) de la tribu borélienne $\mathscr{B}$, d'applications $(\varphi : X \to X)$, $(T : X \to L(E))$ $\mathscr{B}$-mesurable [où L(E) est l'espace des opérateurs linéaires continus de E], et d'une mesure μ définie sur $\mathscr{B}$, invariane par φ telle que

$$\int_X \operatorname{Log}^+ \|T_x\| \, d\mu(x) < +\infty.$$

On dit que $\mathscr{F}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ (resp. $\mathscr{C}^{1,t}$ pour $t \in]0, 1[$) si X est une partie borélienne de E, (φ, T) sont des applications continues, et s'il existe une application ($C: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$) telle que :

(i) $\lim_{\varepsilon \to 0} C(\varepsilon)=0$ (resp. C est dominée par $\varepsilon \to \varepsilon^t$ au voisinage de 0);

(ii) $\forall \varepsilon>0$, $\forall x \in X$, $\forall (p, q) \in B(x, \varepsilon)$,

$$\| \varphi(p)-\varphi(q)-T_x.(p-q) \| \leqq C(\varepsilon) \| p-q \|.$$

On dit qu'un fibré dynamique $\mathscr{F}$ est inversible si φ est bijective, φ^{-1} mesurable, et si T_x est un opérateur injectif pour tout $x \in X$.

I.2. Définition des points réguliers d'un fibré dynamique

Soit $\mathscr{F}=(X, \mathscr{B}, \varphi, \mu, E, T)$ un fibré dynamique. On définit alors l'ensemble des points réguliers $\Lambda(\mathscr{F})$ du fibré dynamique $\mathscr{F}$ par :

$\Lambda(F)=\Big\{ x \in X$: il existe une suite décroissante de réels dans $[-\infty, +\infty[$ $(\lambda_i)_{i \geqq 1}$ et une suite décroissante de sous-espaces vectoriels fermés de E $(F_i)_{i \geqq 1}$ telles que, pour tout $i \geqq 1$:

(i) $F_1=E \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$, $d_i=\dim\left(\dfrac{F_i}{F_{i+1}}\right)$ est fini;

(ii) $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \operatorname{Log} \rho(T_x^n)=\inf_{i \geqq 1} \lambda_i=\kappa$, si $\lambda_i>\kappa$ alors $\lambda_i>\lambda_{i+1}$ et $d_i \geqq 1$ sinon $d_i=0$;

(iii) $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \operatorname{Log} \| T_x^n | F_i \| \lambda_i$

Pour tout $v \in F_i \setminus F_{i+1}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| T_x^n . v \| = \lambda_i \Big\}.$$

κ, $(\lambda_i)_{i \geqq 1}$, $(d_i)_{i \geqq 1}$, $(F_i)_{i \geqq 1}$ sont alors uniquement déterminés par $x \in \Lambda(\mathscr{F})$. $\rho(U)$ représente l'indice de compacité d'un opérateur $U \in L(E)$ ([Th]$_1$, déf. 1.8). $\kappa(x)$ désigne l'indice de compacité asymptotique au point $x \in \Lambda(\mathscr{F})$.

On notera enfin $\bar{\kappa}(\mathscr{F})$ l'indice de compacité asymptotique uniforme :

$$\bar{\kappa}(\mathscr{F})=\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \sup_{x \in X} \rho(T_x^n).$$

I.3. Dimension fractale et dimension de Lyapounov

Si $\mathscr{F}$ est un fibré dynamique et $x \in \Lambda(\mathscr{F})$ un point régulier, on appelle alors dimension de Lyapounov au point x, le réel :

$$\dim_L(x, \mathscr{F}) = \inf\left\{\frac{1}{\alpha}\sum_{i \geqq 1} d_i(x)[\lambda_i(x)+\alpha]^+ : 0<\alpha<-\kappa(x)\right\}.$$

Pour toute mesure de propabilité μ sur un espace métrique (X, d), on appelle dimension fractale au point x, le réel :

$$\dim_F(x, \mu) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{Log}\mu[B(x, \varepsilon)]}{\operatorname{Log}\varepsilon}.$$

Pour tout espace métrique compact (X, d), on appelle dimension fractale de X (en notant $r[x, \varepsilon]$ le nombre minimal de boules ouvertes de rayon ε qui recouvrent X, ou bien $r[x, \varepsilon, d]$ s'il est nécessaire de préciser la métrique d) le réel :

$$\dim_F(X) = \limsup_{\varepsilon \to 0} -\frac{\operatorname{Log} r[x, \varepsilon]}{\operatorname{Log}\varepsilon}.$$

I.4. Énoncé du théorème principal

Rappelons [Ma]$_1$, [Th]$_1$, qu'étant donné un fibré dynamique

$$\mathscr{F} = (X, \mathscr{B}, \varphi, \mu, E, T)$$

de classe $\mathscr{C}^1$, presque tout point de X est régulier, et que, sous certaines hypothèses de compacité uniforme [X compact et $\bar{\kappa}(\mathscr{F})<0$], nous avions l'inégalité locale :

(i) $\forall\, 0<\alpha<-\bar{\kappa}(\mathscr{F})$,

$$\alpha \dim_F(x, \mu) \leqq h_\mu^\alpha(x, \varphi) \leqq \sum_{i \geqq 1} d_i(x)[\lambda_i(x)+\alpha]^+ \quad \mu\text{-p. p.}$$

où

$$h_\mu^\alpha(x, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} -\frac{1}{n}\operatorname{Log}\mu\left[\bigcap_{i=0}^{n} \varphi^{-i} B(\varphi^i(x), \varepsilon e^{-i\alpha})\right],$$

et par conséquent :

(ii) $h_\mu^0(x, \varphi) \leqq \sum_{i \geqq 1} d_i(x)\lambda_i^+(x)$ μ-p. p.;

(iii) $\dim_F(x, \mu) \leqq \dim_L(x, \mathscr{F})$ μ-p. p. [en supposant de plus $\bar{\kappa}(\mathscr{F}) = -\infty$].

Le but de cet article est de démontrer une réciproque :

THÉORÈME I.1. — *Soit* $\mathscr{F} = (X, \mathscr{B}, \varphi, \mu, E, T)$ *un fibré dynamique de classe* $\mathscr{C}^{1,t}$ ($t \in]0, 1[$), *où* X *est une partie de dimension fractale finie de* E *et où* $\kappa(x)<0$ μ-*p.p. Alors pour* μ-*presque tout* x, *pour tout* $\xi\in]0, 1[$ *et* $\alpha\in\left]\frac{1-\xi}{\xi}\lambda_1(x), -\kappa(x)\right[\cap\mathbb{R}_+^*$

(iv) $h_\mu^\alpha(x, \varphi)\leqq h_\mu^0(x, \varphi)+\sum_{i\geqq 1} d_i(x)[\lambda_i(x)+\alpha]^+ - \sum_{i\geqq 1} d_i(x)\lambda_i^+(x)$;

(v) $\xi h_\mu^\alpha(x, \varphi)\leqq h_\mu^0(x, \varphi)+\xi\alpha\sum_{i=1}^{\bar{D}(x,\alpha)} d_i(x)-(1-\xi)\sum_{i\geqq 1} d_i(x)\lambda_i^+(x)$

où $\bar{D}(x, \alpha)=\max\{i\geqq 1: \lambda_i(x)\geqq -\alpha\}$.

COROLLAIRE I.2. — *Soit* $\mathscr{F}=(X, \mathscr{B}, \varphi, \mu, E, T)$ *un fibré dynamique de classe* $\mathscr{C}^{1,t}$ ($t\in]0, 1]$) *où* X *est un compact vérifiant* $\bar{\kappa}(\mathscr{F})<0$ [*en particulier* $\dim_F(X)<+\infty$]. *Alors pour* μ-*presque tout* x *de* X.

(vi) $(\alpha\in\mathbb{R}_+^*\to h_\mu^\alpha(x, \varphi)\in\mathbb{R}_+)$ *est continu à l'origine;*

(vii) $\dim_F(x, \mu)\leqq\dim_L(x, \mathscr{F})$;

(viii) *si* $\dim_F(x, \mu)=\dim_L(x, \mathscr{F})$ *alors*

$$h_\mu^0(x, \varphi)=\sum_{i\geqq 1} d_i(x)\lambda_i^+(x).$$

COROLLAIRE I.3. — *Si* X *est une variété riemannienne compacte et* $\varphi: X\to X$ *est une application de classe* $\mathscr{C}^{1,t}$ (*qui n'est pas supposée* a priori *inversible*) *préservant une mesure de probabilité* μ, *alors pour presque tout* x, $h_\mu^0(x, \varphi)=\sum_{i\geqq 1} d_i(x)\lambda_i^+(x)$ *dès que* $\dim_F(x, \mu)=\dim_L(x, \mathscr{F})$.

Remarque I.4.

1) Dans la situation du corollaire I.3, si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, $\dim_F(x, \mu)=\dim_L(x, \mathscr{F})=\dim X$ μ-presque partout et donc

$$h_\mu^0(x, \varphi)=\sum_{i\geqq 1} d_i(x)\lambda_i^+(x)\quad \mu\text{-p. p.}$$

2) La démonstration du corollaire I.3 utilise précisément la deuxième inégalité du théorème I.1. On peut considérer le système dynamique dans ce cas la, comme un système dynamique de dimension infinie ayant des exposants λ_k égaux à $-\infty$ dès que $\sum_{i\geqq 1}^{k} d_i(x)>\dim X$. On se trouve alors dans le cas où l'infimum, dans la définition de $\dim_L(x, \mathscr{F})$, n'est pas atteint.

3) La première inégalité du théorème I.1 montre que l'application $[\alpha\to h_\mu^\alpha(x, \varphi)]$ est continue en $\alpha=0$. En fait, en utilisant les mêmes techniques que celles qui sont décrites dans $[\mathrm{Th}]_2$, on pourrait montrer que cette application est continue pour tout $0\leqq\alpha<\kappa(x)$.

4) Démonstration du corollaire I.2 [partie viii]. Ou bien il existe $k \geqq 1$ tel que $\sum_{i=1}^{k} d_i(x)\lambda_i(x) \geqq 0$ et $\lambda_{k+1}(x) = -\infty = \kappa(x)$, alors pour tout $\xi \in]0, 1[$ on peut trouver

$$\alpha > \max\left(0, \frac{1-\xi}{\xi}\lambda_1(x), -\lambda_k(x)\right);$$

comme

$$\dim_L(x, \mathscr{F}) = \sum_{i=1}^{k} d_i(x) (k = \bar{D}(x, \alpha)), \qquad h_\mu^0(x, \varphi) \geqq (1-\xi) \sum_{i \geqq 1} d_i(x)\lambda_i^+(x):$$

d'où le résultat en faisant tendre ξ vers 0.

II. CONSTRUCTION DE LA NORME DE LYAPOUNOV

Cette construction n'existe que dans le cas d'un fibré dynamique inversible de classe $\mathscr{C}^{1,t}$. Il s'agit de changer mesurablement de norme de manière à ce qu'on puisse considérer chaque T_x comme un opérateur diagonal et les sous-espaces $E_i(x)$ comme « orthogonaux » entre eux.

Proposition II.1. — *Soient* $\mathscr{F} = (X, \mathscr{B}, \varphi, \mu, E, T)$ *un fibré dynamique inversible de classe* $\mathscr{C}^{1,t}$ ($t \in]0, 1[$) *tel que* $\kappa(x) < 0$ μ-*p.p.*, ($\alpha: X \to \mathbb{R}_+^*$) *une application mesurable* φ-*invariante vérifiant* $-\alpha(x) > \kappa(x)$ μ-*p.p. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver un borélien* $B_\varepsilon \subset \Lambda(\mathscr{F})$ φ-*invariant de mesure* 1, *une famille de normes* $(|||\cdot|||_x)_{x \in X}$, *et une application mesurable* ($l_\varepsilon : X \to \mathbb{R}_+^*$), *tels que, en appelant* $D(x, \alpha) = \max\{i \geqq 0 : \lambda_i(x) > -\alpha(x)\}$ [$\lambda_0(x) = 0$ par convention],

(i) *Pour tout* $x \in B_\varepsilon$, *pour tout* $1 \leqq i \leqq D(x, \alpha)$, *pour tout*

$$v_i \in E_i(x), \qquad w \in F_{D(x,\alpha)+1}(x)$$

$\ast\ |||v_i|||_x \exp(\lambda_i(x) - \varepsilon) \leqq |||T_i v_i|||_{\varphi(x)} \leqq |||v_i|||_x \exp(\lambda_i(x) + \varepsilon)$

$\ast\ |||T_x \cdot w|||_{\varphi(x)} \leqq |||w|||_x \exp(-\alpha(x) + \varepsilon)$

$\ast\ \left|\left|\left| \sum_{i=1}^{D(x,\alpha)} v_i + w \right|\right|\right|_x = \max[|||v_1|||_x, \ldots, |||v_{D(x,\alpha)}|||_x, |||w|||_x]$.

(ii) *Pour tout* $x \in B_\varepsilon$, *pour tout* $(p, q) \in B(x, l_\varepsilon(x)^{-1})^2$, *pour tout* $v \in E$

$\ast\ |||\varphi(p) - \varphi(q) - T_x \cdot (p-q)|||_{\varphi(x)} \leqq \varepsilon |||p-q|||_x$

$\ast\ ||v|| \leqq |||v|||_x \leqq l_\varepsilon(x) ||v||$

$\ast\ \varepsilon\, l_\varepsilon(x) \geqq 1, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} l_\varepsilon \circ \varphi^n(x) = 0.$

Démonstration. — (i) On sait qu'il existe un borélien $B \subseteqq \Lambda(\mathscr{F})$, Φ invariant de mesure 1 tel que, pour tout $x \in B$, pour tout $1 \leqq i \leqq D(x, \alpha)$,

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| T_x^n \mid E_i(x) \| = \lambda_i(x)$$

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| T_x^n \mid F_{D(x, \alpha)+1}(x) \| \leqq -\alpha(x)$$

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| \pi_i \circ \varphi^n(x) \| = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| \pi \circ \varphi^n(x) \| = 0.$$

En appelant $\pi_i(x)$ [resp. $\pi(x)$] le projecteur parallèlement à

$$\bigoplus_{1 \leqq j \neq i \leqq D(x, \alpha)} E_j(x) \oplus F_{D(x, \alpha)+1}(x) \quad \left[\text{resp. sur} \bigoplus_{j=1}^{D(x, \alpha)} E_j(x)\right]$$

sur $E_i(x)$ [resp. $F_{D(x, \alpha)+1}(x)$]. Ceci nous permet de définir la famille de normes indéxées par B : pour tout $x \in B$, pour tout $v = \sum_{i=1}^{D(x, \alpha)} v_i + w$, on pose

$$||| v |||_x = (D(x, \alpha) + 1) \max [N_x^1(v), \ldots, N_x^{D(x, \alpha)}(v), N_x(v)]$$

où

$$N_x^i(v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \| T_x^n . v_i \| \exp(-|n| \varepsilon - n \lambda_i(x))$$

et

$$N_x(v) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \| T_x^n . w \| \exp(-|n| \varepsilon + n \alpha(x)).$$

On obtient finalement (i) en remarquant $|n| - 1 \leqq |n+1| \leqq |n| + 1$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in X$, $T_{\varphi(x)}^n \circ T_x = T_x^{n+1}$.

(ii) Définissons maintenant des applications A_i, $A : B \to [1, +\infty[$ par

$$A_i(x) = \sup \left\{ \| T_x^n \mid E_i(x) \| \exp\left(-\frac{|n|}{2} \varepsilon - n \lambda_i(x) \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$A(x) = \sup \left\{ \| T_x^n \mid F_{D(x, \alpha)+1}(x) \| \exp\left(-\frac{n}{2} \varepsilon + n \alpha(x) \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

On montre alors que

$$A_i(x) \leqq A_i \circ \varphi(x) \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} - \lambda_i(x) \right) \sup_{x \in X} \| T_x \|,$$

et une relation identique pour A. En particulier, on peut trouver $B_\varepsilon \subset B$ φ-invariant de mesure 1 tel que, pour tout $x \in B_\varepsilon$:

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} A_i \circ \varphi^n(x) = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} A \circ \varphi^n(x) = 0.$$

Pour montrer l'équivalence des normes, on décompose un vecteur quelconque $v \in \mathrm{E}$,

$$v = \sum_{i=1}^{\mathrm{D}(x, \alpha)} v_i + w, \qquad v_i \in \mathrm{E}_i(x), \quad w \in \mathrm{F}_{\mathrm{D}(x, \alpha)+1}(x).$$

D'une part :

$$\|v\| \leqq \sum_{i=1}^{\mathrm{D}(x, \alpha)} \|v_i\| + \|w\| \leqq (\mathrm{D}(x, \alpha)+1) \max(\|v_i\|, \|w\|) \leqq |||v|||_x$$

D'autre part :

$$\|v_i\| \leqq \|\pi_i(x)\| \cdot \|v\| \qquad \text{et} \qquad \|w\| \leqq \|\pi(x)\| \cdot \|v\|$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\mathrm{T}_x . v_i\| \exp(-n\lambda_i(x) - |n|\varepsilon) \leqq \|\pi_i(x)\| \mathrm{A}_i(x) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{|n|}{2}\right) \|v\|.$$

Ce qui démontre $\|v\| \leqq |||v|||_x \leqq l(x)\|v\|$ pour $x \in \mathrm{B}_\varepsilon$ et $v \in \mathrm{E}$, où on a posé :

$$l(x) = \max\left[\frac{1}{\varepsilon}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{|n|}{2}\right) \mathrm{A}_i(x) \|\pi_i(x)\|, \right.$$
$$\left. \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp\left(-\frac{|n|}{2}\right) \mathrm{A}(x) \|\pi(x)\|\right]$$

Enfin, pour tout $x \in \mathrm{B}_\varepsilon$, $(p, q) \in \mathrm{B}(x, l(x)^{-1})^2$

$$|||\varphi(p) - \varphi(q) - \mathrm{T}_x . (p-q)|||_{\varphi(x)} \leqq l \circ \varphi(x) \mathrm{L}(l(x))^{-t} |||p-q|||_x$$

[où L est une constante telle que $\mathrm{C}(\varepsilon) \leqq \mathrm{L}\varepsilon^t$ pour tout $\varepsilon > 0$]. La démonstration est alors terminée si on pose :

$$l_\varepsilon(x) = \max(l(x), (\mathrm{L}\, l \circ \varphi(x) \varepsilon^{-1})^{1/t}).$$

III. LEMMES GÉOMÉTRIQUES DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Les deux lemmes suivants sont très faciles et leur démonstration sera laissée en exercice. Le premier sert uniquement à définir la constante $\Gamma(d)$. Dans le second, il s'agit de remarquer qu'une propriété de cône est conservée. On appliquera ce dernier lemme tout le long d'une orbite issue d'un point régulier, ce qui permettra de « propager l'information » aussi bien vers le « futur » que vers le « passé ».

LEMME III.1. — *Soit* $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé de dimension* d. *Alors il existe une constante* $\Gamma(d)$ *ne dépendant que de la dimension* d

telle que :

$$r[\mathrm{B_E}, \eta] \leqq \Gamma(d) \max(1, \eta^{-d}) \quad \textit{pour tout } \eta > 0$$

(*où* $\mathrm{B_E}$ *désigne la boule unité ouverte de* E).

LEMME III.2. – *Soient* $(\mathrm{E_1}, \mathrm{E_2})$ *des espaces vectoriels normés, pour* $i=1, 2$ H_i, K_i *des sous-espaces vectoriels de* E_i *vérifiant* $\mathrm{E}_i = \mathrm{H}_i \oplus \mathrm{K}_i$, *et* Π_i *le projecteur sur* H_i *parallèlement à* K_i. *Soient* $(\mathrm{T}: \mathrm{E_1} \to \mathrm{E_2})$ *une application linéaire, et* $(\varphi: \mathrm{D} \to \mathrm{E_2})$ *une application définie sur une partie* D *de* $\mathrm{E_1}$.

Soient ε, ξ, ζ des scalaires positifs. On suppose :

(i) pour $i=1, 2$, $(v, w) \in \mathrm{H}_i \times \mathrm{K}_i$, $\|v+w\| = \max[\|v\|, \|w\|]$;

(ii) $\mathrm{T}(\mathrm{H_1}) \subset \mathrm{H_2}$ et $\mathrm{T}(\mathrm{K_1}) \subset \mathrm{K_2}$;

(iii) $\forall (v, w) \in \mathrm{H_1} \times \mathrm{K_1}$, $\|\mathrm{T}.v\| \geqq \xi \|v\|$, $\|\mathrm{T}.w\| \leqq \zeta \|w\|$;

(iv) $\forall (p, q) \in \mathrm{D}^2$, $\|\varphi(p) - \varphi(q) - \mathrm{T}.(p-q)\| \leqq \varepsilon \|p-q\|$;

(v) $\xi - \zeta > 4\varepsilon > 0$.

Alors pour tout $(p, q) \in \mathrm{D}^2$, deux cas se présentent :

(i) si

$$\|(\mathrm{Id} - \Pi_1).(p-q)\| \leqq \|\Pi_1.(p-q)\|$$

alors

$$\|\mathrm{Id} - \Pi_2).(\varphi(p) - \varphi(q))\| \leqq \|\Pi_2.(\varphi(p) - \varphi(q))\|$$

et

$$(\xi - 2\varepsilon)\|\Pi_1.(p-q)\| \leqq \|\Pi_2.(\varphi(p) - \varphi(q))\|$$

(ii) si

$$\|\Pi_2.(\varphi(p) - \varphi(q))\| \leqq \|(\mathrm{Id} - \Pi_2).(\varphi(p) - \varphi(q))\|$$

alors

$$\|\Pi_1.(p-q)\| \leqq \|(\mathrm{Id} - \Pi_1).(p-q)\|$$

et

$$\|(\mathrm{Id} - \Pi_2).(\varphi(p) - \varphi(q))\| \leqq (\zeta + 2\varepsilon)\|(\mathrm{Id} - \Pi_1).(p-q)\|.$$

IV. LEMMES DE THÉORIE ERGODIQUE

Le premier lemme est un rappel de la formule de Shanon McMillan adaptée à la définition de l'entropie de Brin et Katok [BK]. Les deux suivants aboutissent aux mêmes conclusions que celles de Mañé ($[\mathrm{Ma}]_2$, lemme 2), mais avec des hypothèses différentes.

LEMME IV.1. – *Soit* $(\mathrm{X}, \mathscr{B}, \varphi, \mu)$ *un système dynamique* (X *un espace lusinien*, $\mathscr{B}$ *sa tribu borélienne*, $\varphi: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *une application* $\mathscr{B}$-*mesurable*, μ *une mesure de probabilité sur* $\mathscr{B}$ *invariante par* φ). *Alors pour toute partition*

$\mathscr{P}$ *d'entropie finie* (cf. *le livre de Walters* [Wa] *pour la notion d'entropie*) :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\operatorname{Log}\mu\left[\bigcap_{i=0}^{n}\varphi^{-i}\mathscr{P}(\varphi^i(x))\right]\leqq h_\mu^0(x,\varphi)\quad \mu\text{-}p.p.$$

[*où* $\mathscr{P}(x)$ *désigne la partie de* $\mathscr{P}$ *qui contient* $x\in X$].

LEMME IV.2. — *Soit* $(a_n)_{n\geqq 1}$ *une suite d'éléments de* [0, 1] *telle que* $\sum_{n\geqq 1} na_n$ *converge. Alors la série* $\sum_{n\geqq 1} -a_n\operatorname{Log}a_n$ *converge aussi.*

Démonstration. — $\mathbb{N}^*=I\cup J$ où $I=\{n\geqq 1: a_n\geqq e^{-n}\}$ et $J=\mathbb{N}\setminus I$. Si $n\in I$, $-a_n\operatorname{Log}a_n\leqq na_n$. Si $n\in J$,

$$-a_n\operatorname{Log}a_n\leqq -e^{-n}\operatorname{Log}e^{-n}=ne^{-n};$$

car $(x\in[0,1]\to -x\operatorname{Log}x)$ est croissante sur $[0, e^{-1}]$.

LEMME IV.3. — *Soit* $(X, \mathscr{B}, \varphi, \mu,)$ *un système dynamique, où* X *est un espace métrique de dimension fractale finie, et* φ *une application lipschitzienne. Soit* $(l: X\to\mathbb{R}_+^*)$ *une application borélienne vérifiant pour* μ-*presque tout* x : $\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}l\circ\varphi^n(x)<+\infty$. *Alors pour tout* $\delta\in]0,1[$ *il existe une partition d'entropie finie* $\mathscr{P}$ *et une partie borélienne* A *vérifiant :*

(i) $\mu(A)>1-\delta$;

(ii) $\forall x\in A$, $\forall n\geqq 0$,

$$\left(\bigvee_{i=0}^{n}\varphi^{-i}\mathscr{P}\right)(x)\subset\bigcap_{i=0}^{n}\varphi^{-i}B\left(\varphi^i(x), \frac{1}{l(\varphi^i(x))}\right).$$

Démonstration. — δ étant choisi, on peut trouver η, ζ suffisamment grand de manière que la mesure de

$$B_{\eta,\zeta}=\{x\in X:\forall n\geqq 0, \operatorname{Log}l\circ\varphi^n(x)\leqq n\eta+\zeta\}$$

soit supérieure à $1-\delta$. Soit $\tau: B_{\eta,\zeta}\to\bar{\mathbb{N}}$ le premier temps de retour. Alors τ est intégrable sur $B_{\eta,\zeta}$ et on posera $A=\{x\in B_{\eta,\zeta}:\tau(X)<+\infty\}$ et pour tout $n\geqq 1$, $A_n=\{x\in A:\tau(x)=n\}$; on sait alors que la série $\sum_{n\geqq 1} n\mu(A_n)$ converge. Puisque X est de dimension fractale finie, en prenant $d>\dim_F(X)$ et γ suffisamment grand, pour tout $\varepsilon>0$ on a $r[X,\varepsilon]\leqq\gamma.\varepsilon^{-d}$. On appellera dans la suite $L\geqq 1$ une constante de Lipschitz de φ. On découpe maintenant chaque A_n en partie $A_{n,m}$ de diamètre inférieur à $L^{-n}\exp(-n\eta-\zeta)$, en choisissant ce nombre de parties k_n plus petit que $\gamma 2^d L^{nd}\exp d(n\eta+\zeta)$. On considère alors la partition

$$\mathscr{P}=\{X\setminus A, A_{n,m}: n\geqq 1, 1\leqq m\leqq k_n\}$$

et montrons que $\mathscr{P}$ est d'entropie finie et que pour tout $n \geqq 1$, $x \in A_n$, $y \in \mathscr{P}(x)$, et $0 \leqq i \leqq n$, $d(\varphi^i(x), \varphi^i(y)) < \dfrac{1}{l(\varphi^i(x))}$. La deuxième assertion provient du choix du diamètre de chaque $A_{n,m}$ et de l'hypothèse lipschitzienne de φ. Pour démontrer $H(\mathscr{P}) < +\infty$, introduisons $Q = \{X \setminus B, A_n : n \geqq 1\}$. Alors

$$H(Q) = -\mu(X \setminus B) \operatorname{Log} \mu(X \setminus B) + \sum_{n \geqq 1} -\mu(A_n) \operatorname{Log} \mu(A_n).$$

H(Q) est donc finie d'après le lemme précédent (IV.2). Par ailleurs

$$H(\mathscr{P}) = H(Q) + H(\mathscr{P} \mid Q) \leqq H(Q) + \sum_{n \geqq 1} \mu(A_n) \operatorname{Log} k_n < +\infty.$$

V. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME PRINCIPAL

Le théorème principal comporte deux parties. Dans les deux cas, on peut supposer le fibré dynamique inversible, on construit alors la norme de Lyapounov et on raisonne sur chaque orbite séparément. La deuxième partie permet d'atteindre le cas où la dimension de Lyapounov est égale à la dimension fractale et vaut un entier $D(x, \alpha)$, alors que la somme des exposants de Lyapounov (comptés avec leur multiplicité) est strictement positive. Les deux premières propositions démontrent la partie (iv) du théorème I.1. Les deux dernières rédigées sur le même modèle démontrent la partie (v).

PROPOSITION V.1. — *Soient* $r \geqq 1$ *un entier*, $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé*, A *une partie de* E, $G_1, \ldots, G_{r+1}$ *des sous-espaces vectoriels de* E *tels que* $E = \bigoplus_{i=1}^{r+1} G_i$, Π_i *le projecteur sur* $G_1 \oplus \ldots \oplus G_i$ *parallèlement à* $G_{i+1} \oplus \ldots \oplus G_{r+1}$, $(\chi_1, \ldots, \chi_r)$ *des réels strictement positifs. On suppose :*

(i) $\chi_1 \geqq \chi_2 \geqq \ldots \geqq \chi_{r+1}$;

(ii) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $\dim G_i = d_i < +\infty$;

(iii) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r+1\}$, $\forall v_i \in G_i$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{r+1} v_i \right\| = \max(\|v_1\|, \ldots, \|v_{r+1}\|);$$

(iv) $\operatorname{diam}(A) < \chi_1$;

(v) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $\forall (p, q) \in A^2$,

$$[\|\Pi_i \cdot (p-q)\| < \chi_{i+1} \Rightarrow \|p-q\| < \chi_{i+1}].$$

Alors

$$r[\mathrm{A}, \chi_{r+1}] \leqq \Gamma_r(d_1, \ldots, d_r) \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{\chi_i}{\chi_{r+1}}\right)^{d_i}$$

où

$$\Gamma_r(d_1, \ldots, d_r) = \prod_{i=1}^{r} 2^{d_i} \Gamma(d_i).$$

Démonstration. – Elle se fait par récurrence sur r. Comme $\Pi_1(\mathrm{A})$ est inclus dans une boule de rayon χ_1 centrée sur G_1, il existe une partie I de G_1 de cardinal inférieur à

$$2^{d_1} \Gamma(d_1) \left(\frac{\chi_1}{\chi_{r+1}}\right)^{d_1} \qquad \text{telle que} \quad \Pi_1(\mathrm{A}) \subset \bigcup_{x \in \mathrm{I}} \mathrm{B}\left(x, \frac{\chi_{r+1}}{2}\right).$$

Fixons $x \in \mathrm{I}$ et appelons

$$\mathrm{A}_x = \mathrm{A} \cap \Pi_1^{-1}\left(\mathrm{B}\left(x, \frac{\chi_{r+1}}{2}\right)\right),$$

alors pour tout $(p, q) \in \mathrm{A}_x^2$, $\|\Pi_1 . (p-q)\| < \chi_{r+1} \leqq \chi_2$ et donc $\|p-q\| < \chi_2$.

Ou bien $r=1$, alors chaque A_x est inclus dans la boule $\mathrm{B}\left(x, \frac{\chi_2}{2}\right)$, et la propriété est démontrée à l'ordre 1.

Ou bien $r \geqq 2$, alors pour chaque $x \in \mathrm{I}$, on peut appliquer la propriété à l'ordre $r-1$, en prenant comme espace vectoriel normé $\mathrm{E}' = \mathrm{G}_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{G}_{r+1}$ muni de la norme induite, et comme scalaires $(\chi_2, \ldots, \chi_{r+1})$. On peut donc trouver une partie J de E′ de cardinal inférieur à

$$\Gamma_{r-1}(d_2, \ldots, d_r) \prod_{i=2}^{r} \left(\frac{\chi_i}{\chi_{r+1}}\right)^{d_i}$$

telle que $(\mathrm{Id} - \Pi_1)(\mathrm{A}_x) \subset \bigcup_{y \in \mathrm{J}} \mathrm{B}(y, \chi_{r+1})$. Ce qui démontre la propriété à l'ordre r, puisque

$$\mathrm{A} \subset \bigcup_{(x,\, y) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}} \mathrm{A} \cap \Pi_1^{-1}\left(\mathrm{B}\left(x, \frac{\chi_{r+1}}{2}\right)\right) \cap (\mathrm{Id} - \Pi_1)^{-1}(\mathrm{B}(y, \chi_{r+1})) \subset \bigcup_{(x,\, y) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}} \mathrm{B}(x+y, \chi_{r+1}).$$

PROPOSITION V.2. – *Soient* $\mathscr{F} = (\mathrm{X}, \mathscr{B}, \varphi, \mu, \mathrm{E}, \mathrm{T})$ *un fibré dynamique inversible de classe* $\mathscr{C}^{1,t}$, $(\alpha, \beta : \mathrm{X} \to \mathbb{R}_+^*)$ *deux applications mesurables* φ-*invariantes telles que* $\mathrm{O} < \beta(x) < \alpha(x) < -\kappa(x)$ μ-*p.p. Alors pour tout* $\delta \in]0, 1[$, *on peut construire une application mesurable* $(l : \mathrm{X} \to \mathbb{R}_+^*)$ *et une* *partie borélienne* A *telle que :*

(i) $\mu(A) > 1 - \delta$;

(ii) $\delta l(x) \geqq 1$ *et* $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} l \circ \varphi^n(x) = 0$ μ-*p.p.*

(iii) $\forall x \in A$,

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} r \left[\bigcap_{i=0}^{n} \varphi^{-i} B\left(\varphi^i(x), \frac{1}{l \circ \varphi^i(x)}\right), 1, d_n^{\varphi, \beta(x)} \right]$$
$$\leqq \sum_{i \geqq 1} d_i(x) [\lambda_i(x) + \alpha(x)]^+ - \sum_{i \geqq 1} d_i(x) \lambda_i^+(x) + \delta$$

où $d_n^{\varphi, \beta}$ *est la métrique sur* X *définie par :*

$$d_n^{\varphi, \beta}(p, q) = \max \{ d(\varphi^i(p), \varphi^i(q)) e^{i\beta} : 0 \leqq i \leqq n \}$$

pour tout $(p, q) \in X^2$.

Démonstration. — Choisissons ε suffisamment petit de manière que, en utilisant les notations de la proposition II.1 sur la construction de la norme de Lyapounov, l'ensemble

$$A = \{ x \in B_\varepsilon : x \text{ vérifie les propriétés } *, **, *** \text{ (énoncées par la suite)} \}$$

ait une mesure supérieur à $1 - \delta$. Fixons désormais $x \in A$, appelons $S_n = \bigcap_{j=0}^{n} \varphi^{-j} B\left(\varphi^j(x), \frac{1}{2 l_\varepsilon \circ \varphi^j(x)}\right)$, pour $0 \leqq j \leqq n$, $x_j = \varphi^j(x)$, $\Pi_i(x_j)$ le projecteur sur $\bigoplus_{k=1}^{i} E_k(x_j)$ parallèlement à $F_{i+1}(x_j)$. Pour chaque $1 \leqq i \leqq D(x, \alpha)$, on peut alors appliquer le lemme géométrique III.2 successivement pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$ en prenant

$$H_1 = \bigoplus_{k=1}^{i} E_k(x_j), \qquad K_1 = F_{i+1}(x_j), \qquad H_2 = \bigoplus_{k=1}^{i} E_k(x_{j+1}),$$
$$K_2 = F_{i+1}(x_{j+1}), \qquad \xi_i = \exp[\lambda_i(x) - \varepsilon],$$
$$\zeta_i = \exp[\max(-\alpha(x), \lambda_{i+1}(x)) + \varepsilon], \qquad D_j = B\left(x_j, \frac{1}{2 l_\varepsilon(x_j)}\right).$$

La première condition que doit vérifier x est donc

$$* \ \xi_i - \zeta_i > 4\varepsilon \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq D(x, \alpha).$$

Soit maintenant $(p, q) \in S_n(x)^2$, alors $(p_j, q_j) \in D_j^2$ où $p_j = \varphi^i(p)$ et $q_j = \varphi^j(q)$. Si nous supposons :

$$||| \Pi_i(x_{j+1}) . (p_{j+1} - q_{j+1}) |||_{x_{j+1}} \leqq ||| (\mathrm{Id} - \Pi_i(x_{j+1})) . (p_{j+1} - q_{j+1}) |||_{x_{j+1}},$$

le lemme III.2 permet d'écrire :

$$||| \Pi_i(x_j) . (p_j - q_j) |||_{x_j} \leqq ||| (\mathrm{Id} - \Pi_i(x_j)) . (p_j - q_j) |||_{x_j}$$

et

$$|||(\mathrm{Id}-\Pi_i(x_{j+1})).(p_{j+1}-q_{j+1})|||_{x_{j+1}} \leqq (\zeta_i+2\varepsilon)\,|||(\mathrm{Id}-\Pi_i(x_j)).(p_j-q_j)|||_{x_j}.$$

Finallement si nous supposons :

$$|||\Pi_i(x_n).(p_n-q_n)|||_{x_n} < (\zeta_i+2\varepsilon)^n$$

ce qui entraîne :

$$|||p_n-q_n|||_{x_n} < (\zeta_i+2\varepsilon)^n.$$

On peut maintenant appliquer la proposition précédente V.1 en prenant $A_n=\varphi^n(S_n)$, $G_i=E_i(x_n)$ pour $1\leqq i \leqq D(x,\alpha)=D$, $G_{d+1}=F_{d+1}(x_n)$, $\chi_i=\exp n\lambda_i(x,\varepsilon)$, $\chi_{d+1}=\exp(-n\alpha(x,\varepsilon))$, où on a posé :

$$\lambda_i(x,\varepsilon)=\mathrm{Log}\,[\exp(\lambda_i(x)+\varepsilon)+2\varepsilon)] > \lambda_i(x)$$

et

$$\alpha(x,\varepsilon)=-\mathrm{Log}\,[\exp(-\alpha(x)+\varepsilon)+2\varepsilon] < \alpha(x).$$

Comme $\mathrm{diam}(A_n, |||\cdot|||_{x_n})<1$, grâce à la proposition V.1 on a [par convention : $D(x,\alpha)=D$] :

$$r[A_n, \chi_{d+1}, |||\cdot|||_{x_n}] \leqq \Gamma_D(d_1, \ldots, d_D) \prod_{i=1}^{D} \max\left[\left(\frac{\min(1,\chi_i)}{\chi_{d+1}}\right)^{d_i}, 1\right].$$

Montrons enfin $r[S_n, 1, d_n^{\varphi,\beta(x)}] \leqq r[A_n, \chi_{d+1}, |||\cdot|||_{x_n}]$; et pour cela fixons d'abord la deuxième condition que doit vérifier x :

$$** \ \beta(x) < \alpha(x,\varepsilon).$$

Fixons ensuite $(p,q)\in S_n^2$ et admettons $|||p_n-q_n|||_{x_n} < \exp(-n\alpha(x,\varepsilon))$, alors pour chaque $j=1, 2, \ldots, n$, deux cas se présentent : ou bien

$$|||\Pi_D(x_j).(p_j-q_j)|||_{x_j} \leqq |||(\mathrm{Id}-\Pi_D(x_j)).(p_j-q_j)|||_{x_j},$$

dans ce cas en appliquant la partie (ii) du lemme III.2 aux points p_j, p_j on a :

$$|||(\mathrm{Id}-\Pi_D(x_j)).(p_j-q_j)|||_{x_j} \leqq \exp(-j\alpha(x,\varepsilon))\,|||p-q|||_x < \exp(-j\alpha(x,\varepsilon))$$

ou bien

$$|||\Pi_D(x_j).(p_j-q_j)|||_{x_j} \geqq |||(\mathrm{Id}-\Pi_D(x_j)).(p_j-q_j)|||_{x_j}$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} |||\Pi_D(x_j).(p_j-q_j)|||_{x_j} & \\ &\leqq \exp[-(n-j)\lambda_D(x,\varepsilon)]\,|||p_n-q_n|||_{x_n} \\ &< \exp[-(n-j)\lambda_D(x-\varepsilon)-n\alpha(x,\varepsilon)] \leqq \exp(-j\alpha(x,\varepsilon)). \end{aligned}$$

On vient donc de montrer $|||p_j-q_j|||_{x_j} < \exp(-j\alpha(x,\varepsilon))$ pour tout $1\leqq j\leqq n$.

Pour conclure, il ne reste plus qu'à donner la troisième condition sur x :

$$***\quad \sum_{i\geqq 1} d_i(x)\,[\lambda_i(x,\varepsilon)+\alpha(x,\varepsilon)]^+ - \sum_{i\geqq 1} d_i(x)\,\lambda_i^+(x,\varepsilon) \leqq \sum_{i\geqq 1} d_i(x)\,[\lambda_i(x)+\alpha(x)]^+ - \sum_{i\geqq 1} d_i(x)\,\lambda_i^+(x)+\delta.$$

Démonstration du théorème I. 1 [*partie* (*iv*)]. — On peut supposer d'abord que le fibré dynamique est inversible et de classe $\mathscr{C}^{1,t}$. L'α-entropie et la suite des exposants de Lyapounov ne changent pas en effet lorsque qu'on passe dans l'extension canonique (*cf.* proposition A.4 et A.2). De plus, le fait de supposer φ inversible et T_x injectif pour tout x, nous permet de construire une décomposition en somme directe de E,

$$E=\bigoplus_{i=1}^{r} E_i(x)\oplus F_{r+1}(x),$$

au-dessus de chaque point x [au lieu de construire seulement une filtration $E=E_1(x)\supseteqq E_2(x)\supseteqq\ldots$], ainsi qu'une norme de Lyapounov qui rend les espaces $(E_i(x))_{i=1}^r$, $F_{r+1}(x)$ deux à deux « orthogonaux » et T_x uniformément dilatant sur $E_i(x)$ et contractant sur $F_{r+1}(x)$ (*cf.* proposition II.1). En particulier, on pourra utiliser la proposition V.2 pour contrôler le nombre minimal de boules dynamiques $B_n^{\varphi,\beta}(x, 1)$ nécessaires pour recouvrir $\mathscr{P}^n(x)=\bigcap_{i=0}^{n}\varphi^{-i}(\mathscr{P}\circ\varphi^i(x))$.

Fixons maintenant $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}_+^{*3}$ et admettons pour le moment $\gamma<\beta<\alpha<-\kappa(x)$ pour tout $x\in X$. Pour chaque $\delta\in]0, 1[$, on peut trouver un borélien A, une application mesurable $(l: X\to\mathbb{R}_+^*)$ et une partition $\mathscr{P}$ d'entropie finie vérifiant pour tout $x\in A$:

(i) $\mu(A)>1-\delta$;

(ii) $$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log} r\left[\bigcap_{i=0}^{n}\varphi^{-i}B\left(\varphi^i(x),\frac{1}{l\circ\varphi^i(x)}\right), 1, d_n^{\varphi,\beta}\right] \leqq \sum_{i\geqq 1} d_i(x)\{(\lambda_i(x)+\alpha)^+-\lambda_i^+(x)\};$$

(iii) $\delta l(x)\geqq 1$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log} l\circ\varphi^n(x)=0$ μ-p. p.;

(iv) $\forall n\geqq 0$,

$$\mathscr{P}_n(x)=\bigcap_{i=0}^{n}\varphi^{-i}\mathscr{P}\circ\varphi^i(x)\subset\bigcap_{i=0}^{n}\varphi^{-i}B\left(\varphi^i(x),\frac{1}{l\circ\varphi^i(x)}\right).$$

Par ailleurs, pour μ-presque tout x, on peut montrer :

(v) $$\limsup_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \operatorname{Log} \mu\left[B_n^{\varphi, \beta}\left(x, \frac{1}{2}\right)\right] \leqq \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \operatorname{Log} \mu[\mathscr{P}_n(x)] + \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} r[\mathscr{P}_n(x), 1, d_n^{\varphi, \beta}],$$

où $B_n^{\varphi, \beta}\left(x, \frac{1}{2}\right)$ représente la boule ouverte de centre x et de rayon $\frac{1}{2}$ pour la métrique $d_n^{\varphi, \beta}$. Ce qui montre en rassemblant les propriétés (i)...(v), μ-p. p.

$$\ast \limsup_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \operatorname{Log} \mu\left[B_n^{\varphi, \beta}\left(x, \frac{1}{2}\right)\right] \leqq h_\mu^0(x, \varphi) + \sum_{i \geqq 1} d_i(x) \{[\lambda_i(x) + \alpha]^+ - \lambda_i^+(x)\}.$$

Pour tout $\eta > 0$, et $i \geqq k(\eta) = \operatorname{ent}\left[\frac{1}{\beta - \gamma} \operatorname{Log} \frac{1}{\eta}\right]$, $\eta e^{-i\gamma} \geqq \frac{1}{2} e^{-ik}$, et donc $B_n^{\varphi, \beta}\left(x, \frac{1}{2}\right) \subset \varphi^{-k(\eta)} B_{n-k(\eta)}^{\varphi, \gamma}(\varphi^{k(\eta)}(x), \eta)$ pour tout $n \geqq k(\eta)$ et $x \in X$, et

$$\limsup_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \operatorname{Log} \mu[B_n^{\varphi, \gamma}(\varphi^{k(\eta)}(x), \eta)] \leqq \limsup_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \operatorname{Log} \mu\left[B_n^{\varphi, \beta}\left(x, \frac{1}{2}\right)\right].$$

Comme le membre de droite dans l'inégalité $\ast$ est invariant par φ et continu par rapport à α pour x fixé, on obtient finalement le résultat énoncé dans le cas $0 < \alpha < -\kappa(x)$ pour tout $x \in X$. Dans le cas général, on découpe l'espace X en parties $X_\alpha = \{x \in X : \alpha < -\kappa(x)\}$ pour $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ et on utilise la continuité en α de $(\alpha \geqq 0 \to \sum_{i \geqq 1} d_i(x) \{(\lambda_i(x) + \alpha)^+ - \lambda_i^+(x)\})$.

PROPOSITION V.3. — *Soient* $r \geqq 1$ *un entier,* $E = \tilde{G}_1 \oplus \ldots \oplus \tilde{G}_{r+1}$ *un espace vectoriel normé,* A *une partie de* E, $\tilde{\Pi}_i$ *le projecteur sur* $\tilde{G}_1 \oplus \ldots \oplus \tilde{G}_i$ *parallèlement à* $\tilde{G}_{i+1} \oplus \ldots \oplus \tilde{G}_{r+1}$, $(\tilde{\chi}_1, \ldots, \tilde{\chi}_{r+1})$ *des réels strictement positifs. On suppose de plus :*

(i) $0 < \tilde{\chi}_{r+1} \leqq \tilde{\chi} \leqq \ldots \leqq \tilde{\chi}$;

(ii) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $\dim \tilde{G}_i = d_i < +\infty$;

(iii) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r+1\}$, $\forall v_i \in \tilde{G}_i$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{r+1} v_i \right\| = \max(\|v_1\|, \ldots, \|v_{r+1}\|)$$

(iv) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}, \forall (p, q) \in A^2$,

$$[\|(\mathrm{Id}-\tilde{\Pi}_i).(p-q)\| \leqq \|\tilde{\Pi}_i.(p-q)\| \Rightarrow \|p-q\| < \tilde{\chi}_i]$$

(v) $\forall (p, q) \in A^2$,

$$[\|\tilde{\Pi}_r.(p-q)\| \leqq \|(\mathrm{Id}-\tilde{\Pi}_r).(p-q)\| \Rightarrow \|p-q\| < \tilde{\chi}_{r-1}]$$

Alors :

$$r[A, \tilde{\chi}_{r+1}] \leqq \Gamma_r(d_1, \ldots, d_r) \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{\tilde{\chi}_i}{\tilde{\chi}_{r+1}}\right)^{d_i}.$$

Démonstration. — Elle consiste à se ramener aux hypothèses de la proposition V.1. Appelons pour cela : $G_i = \tilde{G}_{r-i+1}$, $\chi_i = \tilde{\chi}_{r-i+1}$ pour $i = 1, 2, \ldots, r$, $G_{r+1} = \tilde{G}_{r+1}$, $\chi_{r+1} = \tilde{\chi}_{r+1}$, et montrons que A satisfait aux hypothèses (i)...(v).

D'abord diam $(A) < \tilde{\chi}_r = \chi_1$ en discutant les deux cas d'inégalité entre $\|\tilde{\Pi}_r.(p-q)\|$ et $\|(\mathrm{Id}-\tilde{\Pi}_r).(p-q)\|$ pour $(p, q) \in A^2$.

Supposons ensuite :

$$\|\Pi_i.(p-q)\| < \chi_{i+1} \qquad \text{et} \qquad \|\Pi_i.(p-q)\| \leqq \|(\mathrm{Id}-\Pi_i).(p-q)\|.$$

Ou bien

$$\|(\mathrm{Id}-\Pi_r).(p-q)\| \leqq \|(\mathrm{Id}-\Pi_i).(p-q)\|$$

alors

$$\|(\mathrm{Id}-\tilde{\Pi}_{r-i}).(p-q)\| \leqq \|\tilde{\Pi}_{r-i}.(p-q)\|$$

et donc

$$\|p-q\| < \tilde{\chi}_{r-i} = \chi_{i+1}$$

Ou bien

$$\|(\mathrm{Id}-\Pi_r).(p-q)\| \geqq \|(\mathrm{Id}-\Pi_i).(p-q)\|$$

alors

$$\|\tilde{\Pi}_r.(p-q)\| \leqq \|(\mathrm{Id}-\tilde{\Pi}_r).(p-q)\|$$

et donc

$$\|p-q\| < \tilde{\chi}_{r-i} = \chi_{i+1}.$$

PROPOSITION *V.4.* — *Soient* $\mathscr{F} = (X, \mathscr{B}, \varphi, \mu, E, T)$ *un fibré dynamique inversible de classe* $\mathscr{C}^{1,t}$, $(\alpha, \beta : X \to \mathbb{R}_+^*)$ *deux applications mesurables invariantes par* φ, $\xi \in]0, 1[$ *tels que* $\dfrac{1-\xi}{\xi}\lambda_1(x) < \beta(x) < \alpha(x) < -\kappa(x)$ μ-*p.p. Alors pour tout* $\delta \in]0, 1[$, *il existe une partie borélienne* A *et une application* *mesurable* ($l: \mathrm{X} \to \mathbb{R}_+^*$) *telles que :*

(i) $\mu(\mathrm{A}) > 1 - \delta$;

(ii) $\delta\, l(x) \geqq 1$ *et* $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} l \circ \varphi^n(x) = 0$ μ-*p.p.*;

(iii) $\forall x \in \mathrm{A}$,

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} r\left[\bigcap_{i=0}^{n} \varphi^{-i} \mathrm{B}\left(\varphi^i(x), \frac{1}{2\, l \circ \varphi^i(x)}\right), 1, d_{\mathrm{ent}\,(\xi\, n)}^{\varphi,\, \beta(x)}\right]$$
$$\leqq \xi\, \alpha(x) \sum_{i=1}^{\mathrm{D}(x,\, \alpha)} d_i(x) - (1-\xi) \sum_{i \geqq 1} d_i(x)\, \lambda_i^+(x) + \delta.$$

Démonstration. — Elle est identique à celle de la proposition V.2. On choisit ε petit de manière que $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{B}_\varepsilon : x$ vérifie les propriétés $*, \ldots, ****\}$ ait une mesure supérieure à $1 - \delta$.

Fixons maintenant $x \in \mathrm{A}$, appelons

$$\mathrm{S}_n = \bigcap_{i=0}^{n} \varphi^{-i} \mathrm{B}\left(\varphi^i(x), \frac{1}{2\, l \circ \varphi^i(x)}\right), \qquad x_n = \varphi^n(x),$$
$$\lambda_i(x, \varepsilon) = \operatorname{Log}\{\exp(\lambda_i(x) - \varepsilon) - 2\varepsilon\},$$
$$\alpha(x, \varepsilon) = -\operatorname{Log}\{\exp(-\alpha(x) + \varepsilon) + 2\varepsilon\}$$

et montrons, pour $n \geqq 0$ fixé et $m = \mathrm{ent}(\xi n)$:

$$r[\varphi^m(\mathrm{S}_n), e^{-m\alpha(x,\, \varepsilon)}, |||\cdot|||_{x_m}]$$
$$\leqq \Gamma_{\mathrm{D}}(d_1, \ldots, d_{\mathrm{D}}) \prod_{i=1}^{\mathrm{D}} \left(\frac{\min(1, \exp(m-n)\, \lambda_i(x, \varepsilon))}{\exp(-m\, \alpha(x, \varepsilon))}\right)^{d_i}.$$

En effet, il s'agit d'appliquer la proposition V.3 à :

$$\mathrm{A} = \varphi^m(\mathrm{S}_n), \qquad \tilde{\mathrm{G}}_i = \mathrm{E}_i(x_m),$$
$$\tilde{\chi}_i = \exp(m-n)\, \lambda_i(x, \varepsilon) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, \mathrm{D},$$
$$\tilde{\mathrm{G}}_{\mathrm{D}+1} = \mathrm{F}_{\mathrm{D}+1}(x_m), \qquad \tilde{\chi}_{\mathrm{D}+1} = \exp(-m\, \alpha(x, \varepsilon)).$$

Pour obtenir la propriété V.3 (i), x doit satisfaire :

$*$ $\xi\alpha(x, \varepsilon) > (1 - \xi)\, \lambda_1(x, \varepsilon)$.

Pour obtenir les propriétés V.3 (iv) et V.3 (v), x doit satisfaire :

$**$ $\exp(\lambda_i(x) - \varepsilon) - \exp(\max(\lambda_{i+1}(x), -\alpha(x)) + \varepsilon) > 4\varepsilon$.

Enfin, on montre de la même manière :

$$r[\mathrm{S}_n, 1, d_m^{\varphi,\, \beta(x)}] \leqq r[\varphi^m(\mathrm{S}_n), e^{-m\alpha(x,\, \varepsilon)}, |||\cdot|||_{x_m}]$$

à condition que x vérifie

$***$ $\beta(x) < \alpha(x, \varepsilon)$.

On obtient le résultat en faisant tendre n vers $+\infty$ et en imposant :

$****$ $\sum_{i \geqq 1} d_i(x)\, \lambda_i^+(x, \varepsilon) \geqq \sum_{i \geqq 1} d_i(x)\, \lambda_i^+(x) - \delta$.

Démonstration du théorème I.1 [*partie* (v)]. — On commence par supposer le fibré inversible, puis par raisonner dans le cas où il existe deux scalaires positifs (β, γ) de sorte que $\frac{1-\xi}{\xi}\lambda_1(x)<\alpha<\beta<\gamma<-\kappa(x)$ μ-p. p. On peut alors montrer, en utilisant la proposition précédente V.4 et le lemme de théorie ergodique IV.3, que pour presque tout x

$$\limsup_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\operatorname{Log}\mu[B^{\varphi,\beta}_{\mathrm{ent}(\xi n)}(x, 1)]$$
$$\leqq h^0_\mu(x, \varphi)+\xi\gamma\sum_{i=1}^{D(x,\gamma)} d_i(x)-(1-\xi)\sum_{i\geqq 1} d_i(x)\lambda_i^+(x)$$

et donc

$$\xi h^\alpha_\mu(x, \varphi)\leqq h^0_\mu(x, \varphi)+\xi\gamma\sum_{i=1}^{D(x,\gamma)} d_i(x)+(1-\xi)\sum_{i\geqq 1} d_i(x)\lambda_i^+(x).$$

Pour obtenir le résultat, il suffit de faire tendre γ dans le membre de droite vers α par valeurs supérieures ($\lim_{\gamma\to\alpha^+} D(x, \gamma)=\bar{D}(x, \alpha)$).

Dans le cas général, on découpe X en une réunion dénombrable de parties

$$X_{\alpha,\gamma,\xi}=\left\{x\in X:\frac{1-\xi}{\xi}\lambda_1(x)<\alpha<\gamma<-\kappa(x)\right\}$$

où $(\alpha, \gamma)\in \mathbf{Q}^*_+$ et $\xi\in]0, 1[\cap \mathbf{Q}^*_+$. D'après ce qui précède, la partie (v) du théorème I.1 est vraie en remplaçant μ par la mesure induite $\mu_{\alpha,\gamma,\xi}$ sur chaque $X_{\alpha,\gamma,\xi}$. Comme

$$h^\alpha_\mu(x, \varphi)\leqq h^\alpha_{\alpha,\gamma,\xi}(x, \varphi\,|\,X_{\alpha,\gamma,\xi}) \quad \text{et} \quad h^0_\mu(x, \varphi)=h^0_{\mu_{\alpha,\gamma,\xi}}(x, \varphi\,|\,X_{\alpha,\gamma,\xi})$$

le théorème I.1 est démontré pour tout α, ξ rationnels et donc pour tout $\alpha>0$, $\xi\in]0, 1[$, $\frac{1-\xi}{\xi}\lambda_1(x)<\alpha<-\kappa(x)$.

A. APPENDICE SUR LES EXTENSIONS DE FIBRES DYNAMIQUES

A.1. Définition de l'extension canonique

Soient $\mathscr{F}=(X, \mathscr{B}, \varphi, \mu, E, T)$ un fibré dynamique, et $(\gamma_n)_{n\geqq 0}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant : $\gamma_0=1$, $\gamma_{m+n}\leqq\gamma_m\gamma_n$ ($\forall\, m, n\geqq 0$), et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}\gamma_n=-\infty$.

On définit alors un nouveau fibré dynamique inversible $\tilde{\mathscr{F}}=(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{B}}, \tilde{\varphi}, \tilde{\mu}, \tilde{E}, \tilde{T})$ de la manière suivante :

$\tilde{X}=\{x=(x_n)_{n\geqq 0}\in X^{\mathbb{N}} : x_n=\varphi(x_{n+1}), \forall\ n\geqq 0\}$ muni de la topologie produit.

$\tilde{\mathscr{B}}$ est la tribu borélienne de $\tilde{X}$.

$(\tilde{\varphi}:\tilde{X}\to\tilde{X})$ définie par $\tilde{\varphi}(x)=(\varphi(x_0), x_0, x_1, \ldots)$.

$(\Pi:\tilde{X}\to X)$ la projection canonique définie par $\Pi(x)=x_0$ pour $x=(x_n)_{n\geqq 0}$.

$\tilde{\mu}$ une mesure $\tilde{\varphi}$-invariante définie sur $\tilde{\mathscr{B}}$ vérifiant $\tilde{\mu}\circ\Pi^{-1}=\mu$.

$\tilde{E}=\{v=(v_n)_{n\geqq 0}\in E^{\mathbb{N}} : \sum_{n\geqq 0}\gamma_n\|v_n\|<+\infty\}$ muni de la norme

$$|||v|||=\sum_{n\geqq 0}\gamma_n\|v_n\| \qquad \text{pour tout} \quad v=(v_n)_{n\geqq 0}\in\tilde{E}.$$

$(\tilde{\Pi}:\tilde{E}\to E)$ la projection canonique définie par $\tilde{\Pi}(v)=v_0$ pour $v\in\tilde{E}$.

$(\tilde{T}:\tilde{X}\to L(\tilde{E}))$ définie par $\tilde{T}_x . v=(T_{x_0} . v_0, v_0, v_1, \ldots)$.

Remarquons que $\Pi(\tilde{X})$ est un borélien de mesure 1 de X, que $\tilde{T}_x$ est bien un opérateur continu pour tout $x\in\tilde{X}$. Si X est un espace compact, alors $\tilde{X}$ l'est aussi; si φ est continue, $\tilde{\varphi}$ est un homéomorphisme; si T est continue, $\tilde{T}$ l'est aussi.

A.2. Conservation de la classe du fibré

Si $\mathscr{F}$ est un fibré dynamique de classe $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^{1,t}$, alors $\tilde{\mathscr{F}}$ l'est aussi. En effet, $\tilde{X}$ est bien à base dénombrable d'ouverts, $\tilde{\varphi}$ est un homéomorphisme d'inverse :

$$\tilde{\varphi}^{-1}: \quad x=(x_n)_{n\geqq 0}\in\tilde{X}\to\tilde{\varphi}^{-1}(x)=(x_1, x_2, x_3, \ldots)\in\tilde{X}$$

De plus, si $\varepsilon>0$, $x\in\tilde{X}$, $(p, q)\in\tilde{B}(x, \varepsilon)^2$ alors $(p_0, q_0)\in B(x_0, \varepsilon)^2$ et

$$|||\tilde{\varphi}(p)-\tilde{\varphi}(q)-\tilde{T}_x . (p-q)|||$$
$$=\|\varphi(p_0)-(q_0)-T_{x_0} . (p_0-q_0)\|\leqq C(\varepsilon)|||p-q|||.$$

A.3. Extension des points réguliers

Rappelons d'abord la définition des points très réguliers d'un fibré dynamique inversible $\mathscr{F}=(X, \mathscr{B}, \mu, \varphi, E, T)$. C'est l'ensemble $\Sigma(\mathscr{F})$ défini par :

$\Sigma(\mathscr{F})=\Big\{x\in\Lambda(\mathscr{F})$: il existe une suite de sous-espaces vectoriels de dimension finie $(\mathrm{E}_i)_{i\geqq 1}$ telle que, pour tout $i\geqq 1$:

(i) $\mathrm{F}_i(x)=\mathrm{E}_i\oplus\mathrm{F}_{i+1}(x)$;

(ii) si $\lambda_i(x)>\kappa(x)$ alors, pour tout $v\in\mathrm{E}_i\setminus\{0\}$, $\mathrm{T}_x^{-n}.v$ existe pour tout $n\geqq 0$ et :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}\|\mathrm{T}_x^n.v\|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}\|\mathrm{T}_x^n\,|\,\mathrm{E}_i\|=\lambda_i(x)$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}\|\mathrm{T}_x^{-n}.v\|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}\|\mathrm{T}_x^{-n}\,|\,\mathrm{E}_i\|=-\lambda_i(x)$$

(iii) si $\lambda_i(x)>\kappa(x)$ et s'il existe $v\in\mathrm{F}_{i+1}(x)\setminus\{0\}$ tel que $\mathrm{T}_x^{-n}.v$ existe pour tout $n\geqq 0$ alors :

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}\|\mathrm{T}_x^{-n}.v\|>-\lambda_i(x)\Big\}.$$

Soient maintenant $\mathscr{F}$ un fibré dynamique et $\tilde{\mathscr{F}}$ son extension canonique. Nous allons montrer que $\Pi(\Sigma(\tilde{\mathscr{F}}))$ et $\Lambda(\mathscr{F})$ coïncident à un ensemble négligeable près; et pour cela nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME A.1. — *Soient $(a_n)_{n\geqq 0}$ et $(b_n)_{n\geqq 0}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que la suite $(a_n)_{n\geqq 0}$ est décroissante et que* $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log} b_n=-\infty$. *En posant* $\sigma_n=\sum_{k=0}^{n}a_k\,b_{n-k}$ *nous avons :*

(i) $\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}\sigma_n=\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}a_n$;

(ii) $\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}\sigma_n=\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}a_n$.

Démonstration. — (i) D'une part $b\circ a_n\leqq\sigma_n$ d'où :

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}a_n\leqq\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}\sigma_n.$$

D'autre part, si $\lambda\in\mathbb{R}$ et si $\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{n}}\operatorname{Log}a_n<\lambda$, comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{n}}\operatorname{Log}b_n<\lambda$, il existe alors une constante C telle que $a_n\leqq\mathrm{C}\,e^{n\lambda}$, $b_n\leqq\mathrm{C}\,e^{n\lambda}$ pour tout $n\geqq 0$. Ainsi $\sigma_n\leqq n\,\mathrm{C}^2\,e^{n\lambda}$, $\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}\sigma_n\leqq\lambda$: ce qui prouve le résultat.

(ii) Pour les mêmes raisons que précédemment

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}a_n\leqq\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}\sigma_n.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ donné tel que $\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \sigma_n > \lambda$. Pour tout $\delta \in]0, 1[$, on choisit $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $(1-\delta)\mu < \lambda$. Comme $\mu > \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} b_n$, il existe une constante $C > 0$ telle que $\sigma_n \geqq C^{-1} e^{n\lambda}$ et $b_n \leqq C e^{n\lambda}$ pour tout $n \geqq 0$.

$$C^{-1} e^{n\lambda} \leqq \sigma_n \leqq C \left\{ a_0 \sum_{k=0}^{[\delta n]-1} e^{(n-k)\mu} + a_{[\delta n]} \sum_{k=[\delta n]}^{n} e^{(n-k)\mu} \right\}$$
$$\leqq \frac{C}{1+e^{-\mu}} \{ a . \exp(n - [n\delta])\mu + a_{[\delta n]} \}$$

où on a noté $[n\delta]$ la partie entière de $n\delta$. Finalement pour n suffisamment grand :

$$C^{-1} e^{n\lambda} \leqq \frac{1}{2} C^{-1} e^{n\lambda} + \frac{C a_0}{e^{-\mu}-1} a_{[n\delta]}$$

d'où

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} a_n \geqq \frac{\lambda}{\delta}.$$

Il reste alors à faire tendre δ vers 1 et μ vers $-\infty$ pour obtenir le résultat.

PROPOSITION A.2. — *Soient* $\mathscr{F} = (X, \mathscr{B}, \varphi, \mu, E, T)$ *un fibré dynamique et* $\tilde{\mathscr{F}}$ *son extension canonique. Alors il existe un borélien* $B \in \tilde{\mathscr{B}}$ *de mesure* 1 *inclus dans* $\Sigma(\tilde{\mathscr{F}})$ *tel que* $\Pi(B) \subset \Lambda(\tilde{\mathscr{F}})$. *Si de plus* $\mathscr{F}$ *vérifie* $\sup_n \| T_x \| < +\infty$, *alors* $\Pi[\Sigma(\tilde{\mathscr{F}})] \subset \Lambda(\mathscr{F})$.

Démonstration. — Remarquons d'abord pour tout $n \geqq 0$, $x \in \tilde{X}$, $v \in \tilde{E}$,

$$\tilde{T}_x^n . v = (T_{x_0}^n . v_0, T_{x_0}^{n-1} . v_0, \ldots, T_{x_0} . v_0, v_0, v_1, v_2, \ldots)$$

ce qui montre :

(i) $$\| T_{x_0}^n . v_0 \| \leqq ||| \tilde{T}_x^n . v ||| \leqq \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \| T_{x_0}^{n-k} . v_0 \| + \sum_{k \geqq n} \gamma_k \| v_{n-k} \|$$
$$\leqq \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \| T_{x_0}^{n-k} . v_0 \| + \gamma_n ||| v ||| \leqq \frac{||| v |||}{\| v_0 \|} \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \| T_{x_0}^{n-k} . v_0 \|,$$

(ii) $\| T_{x_0}^n | \tilde{\Pi}(\tilde{F}) \| \leqq ||| \tilde{T}_x^n | \tilde{F} ||| \leqq \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \| T_{x_0}^{n-k} | \tilde{\Pi}(\tilde{F}) \|$ pour tout s.e.v. $\tilde{F}$ de $\tilde{E}$ contenant le noyau de $\tilde{\Pi}$;

(iii) $\rho(T_{x_0}^n) \leqq \rho(\tilde{T}_x^n) \leqq \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \rho(T_{x_0}^{n-k})$.

Supposons maintenant $\tau = \sup_{x} \| T_x \| < +\infty$. Soit $x \in \Sigma(\tilde{\mathscr{F}})$ fixé, et montrons alors que $\lambda_i(x)$, $d_i(x)$, $\tilde{\Pi}(\tilde{F}_i(x))$ conviennent. En utilisant le lemme précédent on a :

(i) puisque $\operatorname{Ker} \tilde{\Pi} \subset \tilde{F}_{i+1}(x)$, $\dim\left(\dfrac{\tilde{F}_i(x)}{\tilde{F}_{i+1}(x)}\right) = \dim\left(\dfrac{\tilde{\Pi}(\tilde{F}_i(x))}{\tilde{\Pi}(\tilde{F}_{i+1}(x))}\right)$,

$$\tilde{\Pi}(\tilde{F}_i(x)) \setminus \tilde{\Pi}(\tilde{F}_{i+1}(x)) = \tilde{\Pi}(\tilde{F}_i(x) \setminus \tilde{F}_{i+1}(x)),$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} ||| T_x^n . v ||| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| T_{x0}^n . v_0 \|.$$

(ii) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} ||| \tilde{T}_x^n \mid \tilde{F}_i(x) ||| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| T_{x0}^n \mid \tilde{\Pi}(\tilde{F}_i(x)) \|.$

(iii) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \rho(\tilde{T}_x^n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \rho(T_{x0}^n).$

Dans chacun des cas précédents on avait posé :

(i) $a_n = \| T_x^n . v_0 \| \tau^{-n}$, $b_n = \gamma_n$;

(ii) $a_n = \| T_{x0}^n \mid \tilde{\Pi}(\tilde{F}_i(x)) \| \tau^{-n}$;

(iii) $a_n = \rho(T_{x0}^n) \tau^{-n} (\rho(T_x) \leqq \| T_x \|, \forall x \in X)$.

Pour un fibré dynamique sans hypothèse supplémentaire, on construit alors un autre fibré dynamique, $\mathscr{F}'$ en modifiant l'application T' par :

$$T'_x = \frac{T_x}{\max(1, ||| T_x |||)} \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Ainsi $\| T'_x \| \leqq 1$ pour tout $x \in X$, $\Lambda(\mathscr{F})$ et $\Lambda(\mathscr{F}')$ [resp. $\Sigma(\tilde{\mathscr{F}})$ et $\Sigma(\tilde{\mathscr{F}}')$] coïncident à un ensemble négligeable près : ce qui termine la preuve dans les deux cas.

A.4. Caractérisation de la tribu borélienne

Nous pouvons donner une caractérisation simple de la tribu borélienne de $\tilde{X}$, permettant ainsi de montrer l'unicité de $\tilde{\mu}$. La démonstration sera laissée en exercice étant donnée sa facilité.

PROPOSITION A.3. – $\tilde{\mathscr{B}} = \bigvee_{i \geqq 0} \uparrow \tilde{\varphi}^i(\Pi^{-1}(\mathscr{B}))$, *et il existe une unique mesure* $\tilde{\mu}$ *invariante par* $\tilde{\varphi}$ *et vérifiant* $\tilde{\mu} \circ \Pi^{-1} = \mu$.

A.5. Conservation de l'entropie locale

La proposition suivante est une généralisation du théorème d'Abramov. La simplicité de la démonstration provient en fait de la définition de l'entropie locale h_μ^α. Néanmoins, nous redonnons une preuve complètement différente dans ce cas $\alpha=0$, moyennant le théorème difficile de Brin et Katok [BK].

PROPOSITION A.4. — *Soient* $(X, \mathscr{B}, \varphi, \mu)$ *un système dynamique* (cf. *lemme* IV.1), $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{B}}, \tilde{\varphi}, \tilde{\mu})$ *son extension naturelle canonique, et* d *une métrique sur* X *redonnant la même topologie et un diamètre fini à* X. *On munit* $\tilde{X}$ *de la métrique* $\tilde{d}$ *par* $\tilde{d}(x, y)=\sum_{n\geqq 0}\gamma_n d(x_n, y_n)$ *où* $(\gamma_n)_{n\geqq 0}$ *est une suite de réels strictement positifs telle que* $\gamma=\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Log}\gamma_n<0$. *Alors pour tout* $\alpha\in[0, -\gamma[$ *et pour presque tout* $x\in\tilde{X}$:

$$h_{\tilde{\mu}}^{\alpha}(x, \tilde{\varphi})=h_{\mu}^{\alpha}(\Pi(x), \varphi).$$

Démonstration. — D'une part $\tilde{B}(x, \varepsilon)\subset\Pi^{-1}[B(\Pi(x), \varepsilon\gamma_0^{-1})]$ pour tout $x\in\tilde{X}$ et $\varepsilon>0$; ce qui montre $h_{\mu}^{\alpha}(\Pi(x), \varphi)\leqq h_{\tilde{\mu}}^{\alpha}(x, \tilde{\varphi})$ pour tout $x\in\tilde{X}$ et $\alpha\geqq 0$. D'autre part, si $\tilde{\gamma}$ est choisi de manière que $a<-\tilde{\gamma}<-\gamma$, alors il existe une constante $C>0$ telle que $\gamma_n\leqq C\exp(n\tilde{\gamma})$ pour tout $n\geqq 0$. Supposons $y\in\Pi^{-1}[B_n^{\varphi, \alpha}(\Pi(x), \varepsilon)]$, alors [en prenant $\Delta=\dim(X, d)$] :

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\tilde{\varphi}^k(x), \tilde{\varphi}^k(y))&\leqq C\left\{\sum_{n=0}^{k}\varepsilon\exp(n\tilde{\gamma}-(k-n)\alpha)+\Delta\sum_{n>k}\exp(n\tilde{\gamma})\right\}\\&\leqq C\left\{\frac{\varepsilon\exp(-k\alpha)}{1-\exp(\tilde{\gamma}+\alpha)}+\frac{\Delta\exp(k+1)\tilde{\gamma}}{1-\exp\tilde{\gamma}}\right\}\\&\leqq D\{\varepsilon+\exp(\tilde{\gamma}+\alpha)k\}\exp(-\alpha k)\end{aligned}$$

où $D=\max\left\{\frac{1}{1-\exp(\tilde{\gamma}+\alpha)}, \frac{\Delta\exp\tilde{\gamma}}{1-\exp\tilde{\gamma}}\right\}$, ce qui montre :

$$\Pi^{-1}[B_n^{\varphi, \alpha}(\Pi(x), \varepsilon)]\subset\bigcap_{i=k(\varepsilon)}^{n}\tilde{\varphi}^{-i}\tilde{B}(\tilde{\varphi}^i(x), 2\varepsilon D\varepsilon^{-i\alpha})$$

où $k(\varepsilon)=1+\operatorname{ent}[(\tilde{\gamma}+\alpha)^{-1}\operatorname{Log}\varepsilon]$, donc pour tout $x\in\tilde{X}$

$$\limsup_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}\operatorname{Log}\tilde{\mu}[B_n^{\tilde{\varphi}, \alpha}(\tilde{\varphi}^{k(\varepsilon)}(x), 2\varepsilon D e^{-k(\varepsilon)\alpha})]\leqq h_{\mu}^{\alpha}(\Pi(x), \varphi).$$

Comme $(x\to h_{\mu}^{\alpha}(x, \varphi))$ est φ-invariante μ-presque partout,

$$\limsup_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}\operatorname{Log}\tilde{\mu}\, B_n^{\tilde{\varphi}, \alpha}(x, 2\varepsilon D e^{-k(\varepsilon)\alpha})]\leqq h_{\mu}^{\alpha}(\Pi(x), \varphi)\quad \mu\text{-p. p.}$$

Il reste alors à faire tendre ε vers 0 pour trouver le résultat annoncé.

A.6. Conservation de la dimension fractale

La proposition suivante ne servira pas dans la démonstration du théorème principal, mais elle permet de mieux mettre en évidence le rapport entre entropie locale h_μ^α et dimension fractale $\dim_F$.

Remarquons d'abord, si X est un espace métrique muni de sa tribu borélienne $\mathscr{B}$, alors pour toute mesure de probabilité μ définie sur $\mathscr{B}$, nous avons

$$\dim_F(x, \mu) \leqq \dim_F(\mu) \leqq \dim_F(X) \quad \mu\text{-p. p.}$$

où $\dim_F(\mu) = \sup_{0<\delta<1} \inf\{\dim_F(A) : A \in \mathscr{B} \text{ et } \mu(A) > \delta\}$ par définition.

Par ailleurs, si par exemple $X = \left\{\frac{1}{p} : p \geqq 1\right\} \cup \{0\}$ muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$, alors, $\dim_F(X) = \frac{1}{2}$ tandis que $\dim_F(\mu) = 0$ pour toute mesure de probabilité μ sur $\mathscr{B}$.

PROPOSITION A.5. — *Soient* $(X, \mathscr{B}, \varphi, \mu)$ *un système dynamique, où* X *est un espace métrique,* φ *une application lipschitzienne de constante* $e^\lambda (\lambda \geqq 0)$, *son extension canonique* $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{B}}, \tilde{\varphi}, \mu)$, $\gamma \in [-\infty, 0]$, $(\gamma_n)_{n \geqq 0}$ *une suite de réels strictement positifs telle que* $\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \gamma_n \leqq \gamma$, $\tilde{d}$ *la métrique sur* X *définie par :*

$$\tilde{d}(x, y) = \sum_{n \geqq 0} \gamma_n d(x_n, y_n)$$
$$(\forall x = (x_n)_{n \geqq 0}, y = (y_n)_{n \geqq 0} \in \tilde{X}).$$

On démontre alors :

(i) *si* $\varphi(X) = X$, *alors*

$$\dim_F(X) \leqq \dim_F(\tilde{X}) \leqq \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\right) \dim_F(X);$$

(ii) $\dim_F(\mu) \leqq \dim_F(\tilde{\mu}) \leqq \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\right) \dim_F(\mu)$;

(iii) $\dim_F(\Pi(x), \mu) \leqq \dim_F(x, \tilde{\mu}) \leqq \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\right) \dim_F(\Pi(x), \mu)\ (x)\ \tilde{\mu}\text{-p. p.}$

Démonstration. — Les trois démonstrations étant identiques, nous démontrons alors uniquement la dernière. La première égalité découle de l'inclusion

$$\tilde{B}(x, \varepsilon) \subset \Pi^{-1}[B(\Pi(x), \varepsilon\gamma_0^{-1})] \quad \text{pour tout } x \in \tilde{X}.$$

Supposons donné $\tilde{\gamma} > \gamma$, alors il existe une constante C telle que :

$$(\forall n \geqq 0) \quad \Pi^{-1}[B(\Pi(x), \exp n(\tilde{\gamma} - \lambda))] \subset \tilde{\varphi}^{-n}[\tilde{B}(\tilde{\varphi}^n(x), C \exp n\tilde{\gamma})]$$

La preuve se trouve déjà dans la démonstration de la proposition A.4 C est une constante ne dépendant que de $\tilde{\gamma}$, et pouvant être définie de la manière suivante :

$$C = \left\{ \frac{1}{1 - \exp(-\lambda)} + \frac{\exp \tilde{\gamma}}{1 - \exp \tilde{\gamma}} \right\} \sup \{ \gamma_n \exp(-n\tilde{\gamma}) : n \geqq 0 \}.$$

Pour conclure, il reste alors à utiliser le lemme suivant (déjà démontré dans $[\mathrm{TH}]_1$, p. 83, démonstration IV.3) :

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \tilde{\mu}[\tilde{B}(\tilde{\varphi}^n(x), C e^{n\tilde{\gamma}})] = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \tilde{\mu}[\tilde{B}(x, C e^{n\tilde{\gamma}})] \quad \tilde{\mu}\text{-p. p.}$$

RÉFÉRENCES

[BK] M. BRIN et A. KATOK, On Local Entropy, *Geometric Dynamics*, *Lect. Notes Math.*, *n°* **1007**, 1983, p. 30-38.

[DM] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel*, chap. 1, t. **IV**, Hermann.

[LY] F. LEDRAPPIER et L. S. YOUNG, The Metric Theory of Diffeomorphisms, *Ann. Math.*, vol. **122**, 1985, p. 509-574.

$[\mathrm{Ma}]_1$ R. MAÑÉ, Lyapounov Exponents and Stable Manifolds for Compact Transformations, *Geometric Dynamic*, *Lect. Notes Math.*, n° **1007**, 1983, p. 522-577.

$[\mathrm{Ma}]_2$ R. MAÑÉ, A proof of Pesin Formula, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, vol. **1**, 1981, p. 95-102.

[Pe] Ya. PESIN, Characteristic Lyapounov Exponents and Smooth Ergodic Theory, *Russian Math. Surveys*, vol. **32**, 1977, p. 54-114.

[Te] R. TEMAM, Infinit-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and in Physics, *Applied Mathematical Science*, vol. **68**, 1988, Springer-Verlag, QA1.A647.

$[\mathrm{Th}]_1$ P. THIEULLEN, Fibrés dynamiques asymptotiquement compacts. Exposants de Lyapounov. Entropie. Dimension, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, *Analyse non linéaire*, vol. **4**, 1, 1987, p. 49-97.

$[\mathrm{Th}]_2$ P. THIEULLEN, Généralisation du théorème de Pesin pour l'α-entropie. Soumis au colloque Lyapunov Exponents à Oberwolfach., *Lect. Notes Math.*, Springer-Verlag.

[Wa] P. WALTERS, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

(*Manuscrit reçu le* 2 *février* 1990;
révisé le 11 *avril* 1991.)