J. reine angew. Math. 453 (1994), 137—164

Journal für die reine und angewandte Mathematik
© Walter de Gruyter
Berlin · New York 1994

Modèles minimaux des courbes de genre deux

Par *Qing Liu* à Talence

§ 1. Introduction

Soit R un anneau de valuation discrète, hensélien, à corps résiduel k algébriquement clos et de $\operatorname{car}(k) \neq 2$. Soit C une courbe projective lisse, géométriquement connexe et de genre 2 sur le corps de fractions $K = \operatorname{Fr}(R)$, elle est définie à partir d'une équation

$$(1) \qquad y^2 = a_0 x^6 + a_1 x^5 + \cdots + a_6 \in K[x]$$

avec $a_0 \neq 0$ ou $a_1 \neq 0$. La courbe C admet un modèle minimal $\mathscr{X}$ sur R. C'est un R-schéma propre plat et régulier, dont la fibre générique $\mathscr{X}_\eta$ est isomorphe à C, tel que pour tout R-schéma $\mathscr{X}'$ vérifiant ces propriétés, l'isomorphisme $\mathscr{X}'_\eta \to \mathscr{X}_\eta$ se prolonge en un morphisme $\mathscr{X}' \to \mathscr{X}$ (cf. [Ch]). Le modèle minimal est unique à isomorphisme près.

Notre but est de déterminer explicitement la fibre spéciale $\mathscr{X}_s$ de $\mathscr{X}$ en fonction des coefficients a_i, de façon analogue au cas des courbes elliptiques ([Ta], § 6–8). Plus précisément, Namikawa et Ueno [N, U] ont classifié tous les types possibles de $\mathscr{X}$ (complétant ainsi la liste d'Ogg [Og]). Il s'agit ici de reconnaître le type de $\mathscr{X}$ dans la liste de Namikawa et Ueno à partir de l'équation (1). Notons que plus généralement, si R est un anneau de Dedekind à corps résiduels parfaits, l'étude des fibres géométriques de $\mathscr{X}$ aux places $\mathfrak{p}$ ne divisant pas 2 se ramène de façon standard à la situation ci-dessus. Plus précisément, soit $R_\mathfrak{p}^{\mathrm{sh}}$ l'hensélisé strict de $R_\mathfrak{p}$, alors $\mathscr{X}_s \times_{k(\mathfrak{p})} k(\mathfrak{p})^{\mathrm{alg}}$ n'est autre chose que la fibre spéciale du modèle minimal de C sur $R_\mathfrak{p}^{\mathrm{sh}}$.

Expliquons la méthode utilisée. Soit L la plus petite extension de K sur laquelle C a réduction stable (voir § 3). Soit $\mathscr{C}$ le modèle stable de $C \times_K L$ sur la clôture intégrale R_L de R dans L. Supposons L modérément ramifiée sur K. On sait, d'après Viehweg [Vi-1] (qui est en quelque sorte une version algébrique de [N, U] et pour $g(C) \geqq 2$), que $\mathscr{X}_s$ est complètement caractérisé par la fibre spéciale $\mathscr{C}_s$ de $\mathscr{C}$, les degrés de singularité des points singuliers de $\mathscr{C}_s$, et l'action de $\operatorname{Gal}(L/K)$ sur $\mathscr{C}_s$. De plus, pour $g(C) = 2$ le type de $\mathscr{X}$ est explicitement décrit en fonction de ces données [Vi-2]. Dans un travail précédent [Li] nous avons déterminé les deux premières données en fonction des invariants d'Igusa J_2, J_4, J_6, J_{10} de C, et du degré d'extension $[L : K]$. À l'aide des invariants affines du polynôme $P(x) = a_0 x^6 + a_1 x^5 + \cdots + a_6$ (voir § 2), on calcule ici le degré $[L : K]$ et on explicite l'action de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur $\mathscr{C}_s$ (§4). Si L est sauvagement ramifiée sur K, on doit désingulariser "à la main" un modèle défini à partir d'une équation "minimale" (§5 et §6). Un résumé complet des résultats se trouvent au §8. Le point de vue de la géométrie analytique rigide n'apparaît pas dans le texte, mais il nous a guidés tout au long de ce travail.

Je remercie D. Lorenzini dont l'aide a été précieuse pour le calcul des groupes de composantes Φ.

Hypothèses et notations. Dans tout ce travail, R sera un anneau de valuation discrète hensélien (par exemple complet), d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ engendré par t, de corps de fractions K. Le corps résiduel k de R est supposé algébriquement clos et de $\mathrm{car}(k) \neq 2$. On note v la valuation normalisée de K (i.e. $v(t) = 1$).

Pour toute extension finie F de K, les notations R_F, $\mathfrak{m}_F$ et v_F auront une signification analogue évidente (par exemple $v_F(t) = [F:K]$).

On considère une courbe projective lisse C, géométriquement connexe et de genre 2 sur K, définie à partir de l'équation (1) (qui sera fixée une fois pour toute). Le modèle minimal de C sur R est noté $\mathscr{X}$. On désigne par L la plus petite extension de K sur laquelle C a réduction stable (voir (3.1)).

On fixe, une fois pour toute, une famille $\{e_n \mid (n, \mathrm{car}(k)) = 1\}$ où $e_n \in K$ est une racine primitive n-ième de l'unité telle que $e_{nm}^n = e_m$. L'image de e_n dans k sera encore notée e_n. Si $[L:K] = n$ est premier à $\mathrm{car}(k)$, on a $L = K[t_n]$, où $t_n^n = t$. On note alors τ le générateur de $\mathrm{Gal}(L/K)$ défini par $\tau(t_n) = e_n t_n$, et $\bar{\tau}$ l'image de τ dans $\mathrm{Aut}(\mathscr{C}_s)$ (voir (3.1)).

§ 2. Invariants affines et invariants projectifs

(2.1) Comme le montre Mestre dans [Me], §2.3, les invariants d'Igusa J_{2i} (qui sont des invariants projectifs) ne suffisent pas pour déterminer le type de $\mathscr{X}$. Nous allons utiliser, en plus des J_{2i}, un autre type d'invariants qui dépendent du choix d'un point à l'infini $x = \infty$ sur $\mathbb{P}^1_K$.

Définition. Soient F un corps et $\mathscr{P} = u_0 x^n + \cdots + u_n \in F[u_0, \ldots, u_n][x]$. Un *invariant affine de $\mathscr{P}$, de type (l, d)*, est un polynôme homogène $H \in F[u_0, \ldots, u_n]$ de degré d qui vérifie la propriété suivante:

Pour tout $a, b \in F^{\mathrm{alg}}$, $a \neq 0$, si l'on écrit

$$\sum_{0 \leq j \leq n} u_j (ax + b)^{n-j} = \sum_{0 \leq j \leq n} u'_j x^{n-j} \in F^{\mathrm{alg}}[u_0, \ldots, u_n][x],$$

alors $H(u'_0, \ldots, u'_n) = a^l H(u_0, \ldots, u_n)$.

On appellera *invariant affine absolu* le quotient de deux invariants affines de même type. Un *invariant projectif de degré d* est un invariant affine H de type $(dn/2, d)$ tel que

$$H(u_0, u_1, \ldots, u_n) = (-1)^{nd/2} H(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_0)$$

(voir aussi [Me], §1.1).

Exemples. – Pour tout $2 \leqq i \leqq n$,

$$A'_i := i(nu_0)^{i-1} \frac{\mathscr{P}^{(n-i)}}{(n-i)!}\left(-\frac{u_1}{nu_0}\right) \in \mathbb{Z}[u_0, u_1, \ldots, u_n]$$

(où $\mathscr{P}^{(j)}$ est la dérivée j-ième de $\mathscr{P}$) est un invariant affine de type $(i(n-1), i)$.

– Le premier coefficient u_0 est un invariant affine de type $(n, 1)$.

Dans ce travail, on utilisera les invariants affines pour $n = 6$. Posons:

$$(2)\quad \begin{cases} A_2 = -5u_1^2 + 12u_0u_2 = A'_2\,, \\ A_3 = 5u_1^3 + 9u_0(-2u_2u_1 + 3u_0u_3) = A'_3/4\,, \\ A_4 = -5u_1^4 + 24u_0(u_2u_1^2 - 3u_3u_0u_1 + 6u_4u_0^2) = A'_4/6\,, \\ A_5 = u_1^5 + 3u_0(-2u_2u_1^3 + 9u_0u_3u_1^2 - 36u_0^2u_4u_1 + 108u_0^3u_5) = A'_5/20\,, \\ B_2 = 2u_2^2 - 5u_1u_3 + 10u_0u_4 = (A_2^2 + 5A_4)/(72u_0^2)\,, \\ B_6 = (8A_3^4 - 5A_4^3 + A_2^3A'_6 + 5A_3^2A'_6 + 6A_2^2A_4^2 - 15A_2A_3^2A_4)/(5832u_0^6)\,. \end{cases}$$

Les A_i sont des invariants affines de type $(5i, i)$, B_{2j} de type $(8j, 2j)$. Les invariants d'Igusa J_{2i}, $1 \leqq i \leqq 5$ ([Ig], §3, voir aussi [Li], §1) sont des invariants projectifs de degré $2i$. On peut voir que si $\mathrm{car}(F) \neq 2, 3$, alors tout invariant affine appartient à

$$F[u_0, u_0^{-1}, A_2, \ldots, A_5, A'_6]\,.$$

Dans la suite, et sauf mention contraire, pour tout invariant affine ou invariant affine absolu $A \in K(u_0, u_1, \ldots, u_6)$, *on note encore par* A *la valeur* $A(a_0, a_1, \ldots, a_6)$ *de* A *pour l'équation* (1). *Si* $Q(x) = b_0x^6 + b_1x^5 + \cdots + b_6 \in K[x]$, *on note* $A(Q) = A(b_0, b_1, \ldots, b_6)$.

(2.2) Formules explicites des invariants J_2, J_4, J_6. Soit

$$P(x) = a_0x^6 + a_1x^5 + \cdots + a_6 \in K[x]\,,$$

soient J_{2i} les invariants d'Igusa associés à $P(x)$. Igusa a donné les formules pour J_2, J_4 et J_6 lorsque $a_0 = 0$ ([Ig], page 623). Le cas général s'en déduit par une transformation homographique qui envoie une racine de $P(x)$ sur l'infini. Avec l'aide d'un micro-ordinateur on trouve:

$$J_2 = 2^{-2}(-120a_0a_6 + 20a_1a_5 - 8a_2a_4 + 3a_3^2),$$

$$\begin{aligned} J_4 = 2^{-7}(&240(a_0a_3a_4a_5 + a_1a_2a_3a_6) - 400(a_0a_2a_5^2 + a_1^2a_4a_6) - 64(a_0a_4^3 + a_2^3a_6) \\ &+ 16(a_1a_3a_4^2 + a_2^2a_3a_5) - 672a_0a_3^2a_6 + 240a_1^2a_5^2 - 112a_1a_2a_4a_5 - 8a_1a_3^2a_5 \\ &+ 16a_2^2a_4^2 - 16a_2a_3^2a_4 + 3a_3^4 + 2640a_0^2a_6^2 - 880a_0a_1a_5a_6 + 1312a_0a_2a_4a_6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_6 = 2^{-10}(&1600(a_0^2a_4^2a_5^2 + a_1^2a_2^2a_6^2) + 1600(a_0a_1a_2a_5^3 + a_1^3a_4a_5a_6)\\
&+ 640(a_0a_1a_3a_4a_5^2 + a_1^2a_2a_3a_5a_6) - 4000(a_0^2a_3a_5^3 + a_1^3a_3a_6^2)\\
&- 384(a_0a_1a_4^3a_5 + a_1a_2^3a_5a_6) - 640(a_0a_2^2a_4a_5^2 + a_1^2a_2a_4^2a_6)\\
&+ 80(a_0a_2a_3^2a_5^2 + a_1^2a_3^2a_4a_6) + 192(a_0a_2a_3a_4^2a_5 + a_1a_2^2a_3a_4a_6)\\
&- 48(a_0a_3^3a_4a_5 + a_1a_2a_3^3a_6) - 224(a_1^2a_3a_4^2a_5 + a_1a_2^2a_3a_5^2) + 64(a_1^2a_4^4 + a_2^4a_5^2)\\
&- 64(a_1a_2a_3a_4^3 + a_2^3a_3a_4a_5) + 16(a_1a_3^3a_4^2 + a_2^2a_3^3a_5) - 4096(a_0^2a_4^3a_6 + a_0a_2^3a_6^2)\\
&+ 6400(a_0^2a_2a_5^2a_6 + a_0a_1^2a_4a_6^2) + 10560(a_0^2a_3a_4a_5a_6 + a_0a_1a_2a_3a_6^2)\\
&+ 2624(a_0a_1a_3a_4^2a_6 + a_0a_2^2a_3a_5a_6) - 4432a_0a_1a_3^2a_5a_6 - 8a_2a_3^4a_4 + a_3^6\\
&- 320a_1^3a_5^3 + 64a_1^2a_2a_4a_5^2 + 176a_1^2a_3^2a_5^2 + 128a_1a_2^2a_4^2a_5 + 112a_1a_2a_3^2a_4a_5\\
&- 28a_1a_3^4a_5 + 16a_2^2a_3^2a_4^2 + 5120a_0^3a_6^3 - 2544a_0^2a_3^2a_6^2 + 312a_0a_3^4a_6\\
&- 14336a_0^2a_2a_4a_6^2 + 1024a_0a_2^2a_4^2a_6 - 2560a_0^2a_1a_5a_6^2 - 2240a_0a_1^2a_5^2a_6\\
&- 6528a_0a_1a_2a_4a_5a_6 - 1568a_0a_2a_3^2a_4a_6)\,.
\end{aligned}$$

On a aussi par définition: $J_{10} = 2^{-12}\operatorname{disc}(P)$ si $a_0 \neq 0$, et $J_{10} = 2^{-12}a_1^2\operatorname{disc}(P)$ si $a_0 = 0$ (où $\operatorname{disc}(P)$ est le discriminant de $P(x)$). Rappelons que ([Li], § 1):

$$I_4 = J_2^2 - 24J_4, \quad I_{12} = 2^{-2}(J_2^2J_4^2 - 32J_4^3 - J_2^3J_6 + 36J_2J_4J_6 - 108J_6^2)\,.$$

§ 3. Rappel sur les courbes stables de genre 2

(3.1) Extension minimale. On sait qu'il existe une extension L de K telle que $C\times_K L$ admette un modèle stable $\mathscr{C}$ (c'est une courbe stable sur la clôture intégrale R_L de R dans L, à fibre générique isomorphe à $C\times_K L$), et qu'elle est la plus petite possible, c'est-à-dire que toute extension de K vérifiant cette propriété contient L. De plus L est galoisienne sur K. Par l'unicité du modèle stable, le groupe $\operatorname{Gal}(L/K)$ agit sur la fibre spéciale $\mathscr{C}_s$ de $\mathscr{C}$, et cette action est fidèle. Ces propriétés sont démontrées dans [De], § 5, pour les variétés abéliennes sur K, leur transcription pour les courbes est immédiate (cf. [Li], prop. 4). Une conséquence immédiate est que si L/K est modérée, et si l'action de τ^n sur $\mathscr{C}_s$ est triviale pour un $n\in\mathbb{N}$, alors $[L:K]\,|\,n$.

(3.2) Degré de singularité. Soit p un point singulier de la courbe stable $\mathscr{C}_s$, alors le complété $\mathfrak{m}_p$-adique de $\mathcal{O}_{\mathscr{C},p}$ vérifie

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathscr{C},p} \simeq \hat{R_L}[\![u,v]\!]/(uv-\pi), \quad \pi\in\mathfrak{m}_L - \{0\}\,.$$

On appelle *degré de singularité de p* ou *l'épaisseur de p dans* $\mathscr{C}$ l'entier $v_L(\pi)\in\mathbb{N}$, où v_L est la valuation normalisée de L. Dans [Li], § 5, on a calculé les degrés de singularité des points singuliers de $\mathscr{C}_s$ en fonction des invariants J_{2i} de C lorsque $L = K$. Si $L \neq K$, on a le même résultat en remplaçant v par v_L.

§ 4. Modèle minimal dans le cas où L/K est modérément ramifiée

Soit σ l'involution hyperelliptique de C. Par l'unicité du modèle stable, σ s'étend en une involution de $\mathscr{C}$ que nous notons toujours par σ. Soit $\mathscr{X} = \mathscr{C}/\langle\sigma\rangle$, c'est une courbe semi-stable sur R_L à fibre générique isomorphe à $\mathbb{P}_L^1$ et on a $\mathscr{X}_s = \mathscr{C}_s/\langle\sigma\rangle$.

On va étudier l'action de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur $\mathscr{C}_s$. Ce qui revient à déterminer l'image de $\mathrm{Gal}(L/K)$ dans $\mathrm{Aut}(\mathscr{C}_s)$. On peut se reporter à [Li], §4 pour la structure du groupe $\mathrm{Aut}(\mathscr{C}_s)$.

Dans toute la suite, on note $f: \mathscr{C} \to \mathscr{X}$ le morphisme canonique, $\omega \in \mathscr{X}_\eta$ le point correspondant à $x = \infty$, $\bar{\omega} \in \mathscr{X}_s$ sa spécialisation. On dira que $\bar{\omega}$ *est ramifié* si f est ramifié au-dessus de $\bar{\omega}$.

(4.1) Nous supposons dans ce sous-paragraphe que $\mathscr{C}_s$ est lisse.

Proposition 4.1.1. *Le point $\bar{\omega}$ est ramifié si et seulement si $A_5 \neq 0$ et $a_0^{20} J_{10} A_5^{-6} \in \mathfrak{m}$. De plus, dans ce cas-là le morphisme canonique $C \to \mathbb{P}_K^1$ est ramifié au-dessus d'un point rationnel $x_0 \in \mathbb{P}^1(K)$.*

Preuve. Le point $\omega \in \mathscr{X}(L)$ induit une section $\mathrm{Spec}\, R_L \to \mathscr{X}$, notons S son image dans $\mathscr{X}$. Alors $\mathscr{X} - S = \mathrm{Spec}\, R_L[v]$, $f^{-1}(\mathscr{X} - S) = \mathrm{Spec}\, R_L[v, z]$ avec $x = \alpha v + \gamma$, $y = \beta z$, où $\alpha, \beta, \gamma \in L$, et on a une relation $z^2 = Q(v) \in R_L[v]$ telle que $\bar{Q}$ (l'image de Q dans $k[v]$) soit séparable, et que $\deg \bar{Q} = 5$ si $\bar{\omega}$ est ramifié, $\deg \bar{Q} = 6$ sinon. Il suffit alors de vérifier la première partie de la proposition sur cette équation, puisque $u_0^{20} J_{10} A_5^{-6}$ est un invariant affine absolu (voir § 2.1). Supposons maintenant $\bar{\omega}$ ramifié. Soit $x_0 \in \mathbb{P}_L^1$ le point tel que f soit ramifié au-dessus de x_0 et que $x_0 \in \mathscr{X}_\eta$ se spécialise en $\bar{\omega} \in \mathscr{X}_s$. Comme $\bar{\omega}$ est invariant par $\mathrm{Gal}(L/K)$, il en est de même pour x_0, donc $x_0 \in \mathbb{P}^1(K)$.

Définissons quelques notations. Supposons d'abord $\mathrm{car}(k) = 3$, notons Γ l'ensemble des classes d'isomorphisme des courbes propres lisses sur k, définies par une équation de la forme

$$z^2 = v^6 + v^4 + v^2 + a, \quad a \in k^*.$$

Ces courbes sont caractérisées par le fait que leurs groupes des automorphismes ont des éléments d'ordre 3 ayant un point fixe. Les invariants d'Igusa de l'équation ci-dessus sont

$$J_2 = 1, \quad J_4 = 0, \quad J_6 = J_{10} = -a^3.$$

Il suit que $\mathscr{C}_s \in \Gamma$ équivaut à la condition suivante sur les invariants J_{2i} de C:

$$J_2 \neq 0, \quad J_4 J_2^{-2} \in \mathfrak{m}, \quad J_{10} J_2^{-5} \in R^*, \quad \text{et} \quad J_6 J_2^{-3} - J_{10} J_2^{-5} \in \mathfrak{m}.$$

Lorsque $\mathrm{car}(k) = 5$, on note C_0 la courbe sur k définie par l'équation $z^2 = v^5 - v$. C'est l'unique courbe ayant un automorphisme d'ordre 5. On a $\mathscr{C}_s \simeq C_0$ si et seulement si $J_{2i}^5 J_{10}^{-i} \in \mathfrak{m}$ pour tout $i \leqq 3$.

Proposition 4.1.2. *Dans chacune des situations suivantes, L est modérément ramifiée sur K:*

(a) $\mathrm{car}(k) \neq 3, 5$.

(b) $f: C \to \mathbb{P}^1_K$ *est ramifié au-dessus de deux points rationnels de* $\mathbb{P}^1_K$.

(c) $\mathrm{car}(k) = 3$, $\bar{\omega}$ *est ramifié ou* $\mathscr{C}_s \notin \Gamma$.

(d) $\mathrm{car}(k) = 5$, $\bar{\omega}$ *est non-ramifié ou* $\mathscr{C}_s \not\cong C_0$.

Preuve. En effet, sous l'une des hypothèses ci-dessus, l'image de tout élément de $\mathrm{Gal}(L/K)$ dans $\mathrm{Aut}(\mathscr{C}_s)$ est d'ordre premier à $\mathrm{car}(k)$ (cf. [Li], §4).

Théorème 1. *Supposons L/K modérément ramifiée. Soient n, r, et q des entiers définis comme suit:*

(a) *Si $\bar{\omega}$ est non-ramifié, n est le plus petit dénominateur commun de* $v(a_0^{10}J_{10}^{-1})/30$ *et* $v(a_0^5 J_{10}^{-1})/10$, $r = nv(a_0^{10}J_{10}^{-1})/30$ *et* $q = nv(a_0^5 J_{10}^{-1})/10$.

(b) *Si $\bar{\omega}$ est ramifié, n est le plus petit dénominateur commun de* $v(A_5^{-2}J_{10})/20$ *et* $v(A_5^{-6}J_{10}^5)/40$, $r = nv(A_5^{-2}J_{10})/20$ *et* $q = nv(A_5^{-6}J_{10}^5)/40$ *(en fait n est le plus petit dénominateur de* $v(A_5^{-6}J_{10})/40$*).*

Alors on a $[L:K] = n$. De plus $\mathscr{C}_s$ est définie par une équation $z^2 = \bar{Q}(v) \in k[v]$, et τ agit sur $\mathscr{C}_s$ de la façon suivante: $\bar{\tau}(z) = e_n^{q'} z$, $\bar{\tau}(v) = e_n^{r'} v + c$, $c \in k$, où $q' = -q$ et $r' = -r$ si $\bar{\omega}$ est ramifié, $q' = q$ et $r' = r$ sinon.

Preuve. Supposons $\bar{\omega}$ ramifié, l'autre cas se traite de manière similaire. Reprenons les notations de la preuve de la prop. 4.1. Le polynôme $\bar{Q}(v)$ est séparable et de degré 5. Il suit que

$$\alpha^{25}\beta^{-10}A_5 = A_5(Q) \in R_L^*, \quad \alpha^{30}\beta^{-20}J_{10} = J_{10}(Q) \in R_L^*.$$

Donc

$$\alpha^{20} \in A_5^{-2}J_{10}R_L^*, \quad \beta^{40} \in A_5^{-6}J_{10}^5 R_L^*.$$

Il suit que $n \mid [L:K]$, donc $t_n \in L$ et $\alpha \in t_n^r R_L^*$, $\beta \in t_n^q R_L^*$. Comme τ agit sur $\mathscr{C}$, donc sur $f^{-1}(\mathscr{X} - S)$ (puisque τ laisse invariant S), on a

$$\tau(z) = \beta\tau(\beta)^{-1}z, \tau(v) = \alpha\tau(\alpha)^{-1}v + (\gamma - \tau(\gamma))\tau(\alpha)^{-1} \in R_L[v].$$

L'action de τ sur $\mathscr{C}_s$ est donc donnée par

$$\bar{\tau}(z) = e_n^{-q}z, \quad \bar{\tau}(v) = e_n^{-r}v + c, \quad c \in k.$$

Si $e_n^{-r} \neq 1$ ou si $\mathrm{car}(k) \neq 5$, on a $\bar{\tau}^n = 1$. Dans le cas contraire, on a $\bar{\tau}^{5n} = 1 = \bar{\tau}^{[L:K]}$. Or par hypothèse $5 \nmid [L:K]$ lorsque $\mathrm{car}(k) = 5$. Par conséquent, on a $\bar{\tau}^n = 1$ dans tous les cas. Comme $\mathrm{Gal}(L/K)$ agit fidèlement sur $\mathscr{C}_s$, on a $[L:K] = n$.

(4.2) Le cas où $\mathscr{C}_s$ est singulière et $\mathscr{C}_s/\langle\sigma\rangle$ irréductible. Notons C_{000} la courbe stable sur k constituée de deux droites projectives se coupant en trois points. Pour simplifier les énoncés, on notera J_{12} l'invariant projectif suivant:

$$J_{12} := \begin{cases} I_{12} & \text{si } \mathscr{C}_s \text{ a un point singulier,} \\ I_4^3 & \text{si } \mathscr{C}_s \text{ est irréductible et rationnelle,} \\ J_2^6 & \text{si } \mathscr{C}_s = C_{000}. \end{cases}$$

Proposition 4.2.1. *On a les propriétés suivantes*:

(a) *Le point $\bar{\omega}$ est non ramifié pour $f \Leftrightarrow a_0^{-6}B_2^9J_{12}^{-1}$, $a_0^{-120}A_5^{36}J_{12}^{-5} \in R$.*

(b) *$f^{-1}(\bar{\omega})$ est un point régulier $\Leftrightarrow a_0^{120}A_5^{-36}J_{12}^5 \in \mathfrak{m}$, $B_2^{60}A_5^{-12}J_{12}^{-5} \in R$.*

(c) *$f^{-1}(\bar{\omega})$ est un point singulier $\Leftrightarrow a_0^6B_2^{-9}J_{12} \in \mathfrak{m}$, et $B_2^{-60}A_5^{12}J_{12}^5 \in \mathfrak{m}$.*

Preuve. Il suffit de montrer les $\Rightarrow$. On garde les notations de la preuve de la prop. 4.1.1. On a alors $J_{12}(Q) \in R_L^*$, et $\deg(\bar{Q}) = 6$, 5 ou 4 suivant que l'on est dans la situation (a), (b) ou (c). Il est alors facile de vérifier les conditions sur les invariants affines absolus avec le polynôme $Q(v)$.

Proposition 4.2.2. *Dans chacune des situations suivantes, L est modérément ramifiée sur K*:

(a) $\mathrm{car}(k) \neq 3$ *ou* $\mathscr{C}_s \neq C_{000}$.

(b) $\mathrm{car}(k) = 3$, $\mathscr{C}_s = C_{000}$ *et $\bar{\omega}$ est ramifié.*

Preuve. Sous l'une des hypothèses ci-dessus, l'image de tout élément de $\mathrm{Gal}(L/K)$ dans $\mathrm{Aut}(\mathscr{C}_s)$ est d'ordre premier à $\mathrm{car}(k)$ (voir [Li], §4).

Théorème 2. *Supposons L/K modérément ramifiée. Soient n, r, et q des entiers définis comme suit*:

(a) *Si $\bar{\omega}$ est non-ramifié, n est le plus petit dénominateur commun de $v(a_0^{12}J_{12}^{-1})/36$ et $v(a_0^6J_{12}^{-1})/12$, $r = nv(a_0^{12}J_{12}^{-1})/36$ et $q = nv(a_0^6J_{12}^{-1})/12$.*

(b) *Si $f^{-1}(\bar{\omega})$ est un point régulier, n est le plus petit dénominateur de $v(A_5^{36}J_{12}^{-25})/240$, $q = nv(A_5^{36}J_{12}^{-25})/240$ et $r = -2q$.*

(c) *Si $\bar{\omega}$ est ramifié et $f^{-1}(\bar{\omega})$ est singulier, n est le plus petit dénominateur commun de $v(B_2^{-6}J_{12})/12$ et $v(B_2^{-9}J_{12})/12$, $r = nv(B_2^{-6}J_{12})/12$ et $q = nv(B_2^{-9}J_{12})/12$.*

Alors $[L:K] = n$. De plus, $\mathscr{C}_s$ a une équation $z^2 = \bar{Q}(v) \in k[v]$, et τ agit sur $\mathscr{C}_s$ par $\bar{\tau}(z) = e_n^q z$, $\bar{\tau}(v) = e_n^r v + c$, $c \in k$.

Preuve. Supposons $\bar{\omega}$ non-ramifié, les autres cas se traitent de la même façon. Avec les notations de la preuve de la prop. 4.1.1, on a $z^2 = Q(v) \in R_L[v]$, $\deg \bar{Q}(v) = 6$ et $\bar{Q}(v)$ n'a que des racines simples ou doubles. Il suit que $\alpha^6\beta^{-2}a_0 \in R_L^*$ et

$$\alpha^{36}\beta^{-24}J_{12} = J_{12}(Q) \in R_L^*$$

donc

$$\alpha^{36} \in a_0^{-12}J_{12}R_L^*, \quad \beta^{12} \in a_0^{-6}J_{12}R_L^*.$$

Ce qui implique que $n|[L:K]$, donc $t_n \in L$, $\alpha t_n^r, \beta t_n^q \in R_L^*$. Le générateur τ de $\mathrm{Gal}(L/K)$ agit sur $f^{-1}(\mathscr{X} - S)$ par

$$\tau(z) = \beta\tau(\beta)^{-1}z, \quad \tau(v) = \alpha\tau(\alpha)^{-1}v + \mu,$$

où $\mu \in R_L$. Il suit que $\bar{\tau}(z) = e_n^q z$, $\bar{\tau}(v) = e_n^r v + c$, $c \in k$. On vérifie que $\bar{\tau}^n = 1$, donc $[L:K] = n$ (voir (3.1)).

(4.3) Le cas où $\mathscr{C}_s/\langle\sigma\rangle$ n'est pas irréductible. Dans ce sous-paragraphe, nous supposons que $\mathrm{car}(k) \neq 3$ (le cas contraire sera traité au § 6). Le schéma $\mathscr{X}_s$ est réunion de deux droites projectives se coupant transversalement en un point. Les diviseurs premiers possibles du cardinal de $\mathrm{Aut}_k(\mathscr{C}_s)$ (donc de $[L:K]$) sont 2 et 3 (cf. [Li], § 4). Il suit que L/K est modérément ramifiée.

On note E_1, E_2 les composantes irréductibles de $\mathscr{C}_s$, avec $\bar{\omega} \in f(E_1)$. Posons

$$(3) \qquad d_K = \begin{cases} \frac{1}{12}\nu(J_{10}J_2^{-5}) & \text{si } E_1,\ E_2 \text{ sont lisses,} \\ \frac{1}{12}\nu(I_{12}J_2^{-6}) & \text{si } \mathscr{C}_s \text{ a une unique composante lisse,} \\ \frac{1}{4}\nu(I_4J_2^{-2}) & \text{si } E_1,\ E_2 \text{ sont singulières.} \end{cases}$$

Le degré de singularité du point d'intersection $E_1 \cap E_2$ dans $\mathscr{C}$ est égal à $d = [L:K]d_K$ (voir (3.2)), celui du point $f(E_1 \cap E_2)$ dans $\mathscr{X}$ est égal à $2d$.

Proposition 4.3.1. *On a les propriétés suivantes:*

(a) *$\bar{\omega}$ est non ramifié si et seulement si $a_0^{-2}B_2^3J_2^{-2} \in R$, $a_0^{-4}A_3^2J_2^{-1}$, $a_0^{-20}A_5^6J_2^{-5} \in R$ et l'un (au moins) des deux derniers éléments est inversible dans R.*

(b) *$f^{-1}(\bar{\omega})$ est un point régulier si et seulement si $a_0^{20}A_5^{-6}J_2^5 \in \mathfrak{m}$ et $B_2^{10}A_5^{-2}J_2^{-5} \in R$.*

(c) *$\bar{\omega}$ est régulier et $f^{-1}(\bar{\omega})$ est un point singulier si et seulement si $a_0^2B_2^{-3}J_2^2 \in \mathfrak{m}$ et $B_2^{-10}A_5^2J_2^5 \in \mathfrak{m}$.*

(d) *$\bar{\omega}$ est singulier si et seulement si $a_0^{-2}B_2^3J_2^{-2} \in R$ et $a_0^{-4}A_3^2J_2^{-1}$, $a_0^{-20}A_2^6J_2^{-5} \in \mathfrak{m}$.*

Preuve. Considérons d'abord les trois premiers cas. Soit $\mathscr{X}'$ le modèle projectif normal de $\mathbb{P}_L^1$ sur R_L obtenu en contractant $f(E_2)$ en un point, soit $S \in \mathscr{X}'(R_L)$ la section induite par ω. On a $\mathscr{X}' - S = \operatorname{Spec} R_L[v]$, et la normalisation de $\mathscr{X}' - S$ dans $\mathscr{K}(C_L)$ est égale à $\operatorname{Spec} R_L[v, z]$ avec une relation $z^2 = Q(v) \in R_L[v]$, où $\bar{Q}(v)$ vérifie:

$$\bar{Q}(v) = v^3 \bar{H}(v) \in k[v];$$

$\bar{H}(v)$ n'est pas un cube; $\deg \bar{H} = 3$, 2 ou 1 suivant que l'on est dans le cas (a), (b) ou (c). On peut alors vérifier la proposition en calculant les invariants affines absolus (voir §2.1) en question à partir du polynôme $Q(v)$.

Supposons maintenant $\bar{\omega}$ singulier. Il existe α, β, $\gamma \in L$ tels que le changement de variables $x = \alpha v + \gamma$, $y = \beta z$ donne une équation $C_L : z^2 = \delta H(v)$, avec $H(v) \in R_L[v]$ unitaire, $\bar{H}(v) = (v^2 - 1)^3$ et $\delta \in L$. La proposition découle alors de calculs directs sur $H(v)$.

Proposition 4.3.2. *Tout élément de* $\operatorname{Gal}(L/K)$ *laisse* E_i *globalement invariante si et seulement si* $2 \mid v(J_2)$.

Preuve. On peut supposer que $[L : K]$ est une puissance de 2. Si E_1 est invariante par tout élément de $\operatorname{Gal}(L/K)$, il existe un point $\bar{x}_0 \in E_1$, régulier dans $\mathscr{C}_s$, ramifié pour f et invariant par $\operatorname{Gal}(L/K)$. C'est donc la spécialisation d'un point $x_0 \in \mathscr{C}_\eta$ rationnel sur K. On peut supposer que $f(x_0) = \omega$ quitte à faire agir $\mathrm{PGL}_2(K)$ sur $\mathbb{P}^1_K$. Or dans ce cas-là, il est aisé de voir que $10 \mid v(A_5^2 J_2^{-5})$, d'où $2 \mid v(J_2)$. Inversement, supposons que $\operatorname{Gal}(L/K)$ ne laisse pas E_i invariante. Alors $\bar{\omega}$ est singulier. Avec les notations de la preuve ci-dessus, on a $\bar{\tau}(v) = -v$, donc $\alpha\tau(\alpha)^{-1} \in -1 + \mathfrak{m}$. Comme $\alpha^6 a_0^2 J_2^{-1} \in R_L^*$, on a $2 \nmid v(J_2)$.

Un invariant numérique. Soit $H(u) = b_0 u^3 + b_1 u^2 + b_2 u + b_3 \in K[u]$ un polynôme séparable de degré 3. On a les invariants classiques: $c_4(H) = 16(b_1^2 - 3 b_0 b_2)$ et $\operatorname{disc}(H)$ le discriminant de $H(u)$. Posons

$$\varrho(H) = \min\left\{\frac{1}{2} v(c_4(H)), \frac{1}{6} v(\operatorname{disc}(H))\right\} \in \mathbb{Q}.$$

Soit v_K l'unique valuation de K^{alg} qui prolonge v, alors

$$\varrho(H) = v(b_0) + \min\{v_K(\lambda_i - \lambda_j) \mid H(\lambda_l) = 0\}.$$

Si $\operatorname{car}(k) \neq 2, 3$, alors la courbe elliptique $z^2 = H(u)$ a réduction stable sur K si et seulement si $\varrho(H) \in 2\mathbb{Z}$.

Revenons à $P(x) = a_0 x^6 + \cdots + a_6$. Si $a_0 \neq 0$, on pose

$$(4) \qquad r_K = \frac{1}{2} v(a_0) + \min\left\{\frac{1}{4} d_K, \frac{1}{8} v(A_2^{-3} A_3^2), \frac{1}{12} v(A_2^{-5}(A_2 A_3 - 3A_5)^2)\right\} \in \mathbb{Q}.$$

Lemme 1. *Supposons* $\bar{\omega}$ *singulier et* $2 \mid v(J_2)$. *On a les propriétés suivantes*:

(α) *C admet une équation* $w^2 = a_0 P_0(u)$, *avec* $P_0(u) \in R[u]$ *unitaire et*

$$\bar{P}_0(u) = (u^2 - 1)^3.$$

(β) *Soit* $P_0(u) = P_1(u)P_2(u)$ *la décomposition de* $P_0(u)$ *dans* $R[u]$ *avec* $P_1(u)$ *unitaire, et* $\bar{P}_1(u) = (u-1)^3$. *Alors*

$$\varrho(a_0P_1) + \varrho(a_0P_2) = 2v(a_0) + 2d_K \quad et \quad \min\{\varrho(a_0P_1), \varrho(a_0P_2)\} = 2r_K\,.$$

Preuve. (α) On montre, comme dans la proposition précédente, que $a_0^{-4}A_2^3J_2^{-1} \in R^*$. Donc il existe $a \in K$ tel que $a^2 = -A_2/(36a_0^2)$. Posons $u = a^{-1}(x + a_1/(6a_0))$, $w = a^{-3}y$ et $P_0(u) = a_0^{-1}a^{-6}P(au - a_1/(6a_0)) = u^6 + b_2u^4 + b_3u^3 + \cdots + b_6 \in K[u]$. Alors

$$w^2 = a_0P_0(u)\,.$$

D'autre part, $12b_2 = A_2(P_0) = a_0^{-2}a^{-2}A_2 = -36$, donc $b_2 = -3$, $A_2(P_0), J_2(P_0) \in R^*$. Il suit de la prop. 4.3.1 (d) que $b_3, b_5 \in \mathfrak{m}$. Enfin, $J_{10}(P_0), I_{12}(P_0) \in \mathfrak{m}$ implique que $\bar{P}_0$ a une racine triple. Par conséquent $\bar{P}_0(u) = (u^2-1)^3$.

(β) La première identité est immédiate. Pour la seconde, on écrit

$$P_0(u) = ((u-b)^3 + b_{11}(u-b) + b_{12})((u+b)^3 + b_{21}(u+b) + b_{22})$$

avec $b, b_{ij} \in K$. Il en résulte que

$$\varrho(P_i) = \min\left\{\frac{1}{2}v(b_{i1}), \frac{1}{6}v(4b_{i1}^3 + 27b_{i2}^2)\right\}.$$

La deuxième identité se vérifie alors en évaluant r_K à partir de $P_0(u)$.

L'action de Gal(L/K) sur $\mathscr{C}_s$. Soient E_1, E_2 les composantes irréductibles de $\mathscr{C}_s$. Nous devons préciser la nature de ces composantes relativement à ω. Rappelons que si $\bar{\omega}$ est un point régulier, alors $E_1 \supset f^{-1}(\bar{\omega})$. Supposons $\bar{\omega}$ singulier et $2|v(J_2)$. Soient $P_1(u)$, $P_2(u)$ les polynômes définis dans le lemme 1. Les zéros de $P_1(u)$ induisent des points de $\mathscr{C}_\eta$. Si $\varrho(P_1) < \varrho(P_2)$, alors E_1 sera la composante qui contient les spécialisations de ces points. Si $\varrho(P_1) = \varrho(P_2)$, ou si $2 \nmid v(J_2)$, le choix de E_1 sera indifférent.

Ecrivons des équations de E_1 et E_2:

$$\begin{cases} E_1: & z_1^2 = v_1^3 + \alpha_{11}v_1^2 + \alpha_{12}v_1 + \alpha_{13}\,, \\ E_2: & z_2^2 = v_2^3 + \alpha_{21}v_2^2 + \alpha_{22}v_2 + \alpha_{23}\,, \end{cases}$$

la fonction rationnelle v_i sur E_i ayant ses pôles au point d'intersection $E_1 \cap E_2$. Rappelons que l'on désigne par τ le générateur de Gal(L/K) tel que $\tau(t_m) = e_mt_m$ pour tout diviseur m de $[L:K]$, et par $\bar{\tau}$ son image canonique dans Aut$_k(\mathscr{C}_s)$.

Théorème 3. *Supposons* $2|v(J_2)$. *Soient n, r, les entiers définis comme suit*:

(a) *Si* $\bar{\omega}$ *est non-ramifié pour f, alors n est le plus petit dénominateur commun de* d_K *(voir* (3)) *et* $v(a_0J_2)/6$, $r = nv(a_0J_2)/6$.

(b) *Si* $\bar{\omega}$ *est régulier, ramifié, et si* $f^{-1}(\bar{\omega})$ *est un point régulier, alors n est le plus petit dénominateur commun de* d_K *et* $v(A_5^2J_2)/8$, $r = nv(A_5^2J_2)/8$.

(c) *Si $\bar{\omega}$ est régulier, tel que $f^{-1}(\bar{\omega})$ soit un point singulier, alors n est le plus petit dénominateur commun de d_K et $v(B_2)/4$, $r = nv(B_2)/4$.*

(d) *Si $\bar{\omega}$ est singulier, n est le plus petit dénominateur commun de d_K et r_K (voir* (4)), $r = nr_K$.

Alors $[L:K] = n$. De plus, soit $d = nd_K$, alors τ agit sur $\mathscr{C}_s$ de la façon suivante:

$$\begin{cases} \bar{\tau}(v_1) = e_n^{-2r} v_1, & \bar{\tau}(z_1) = e_n^{-3r} z_1, \\ \bar{\tau}(v_2) = e_n^{-2(d-r)} v_2, & \bar{\tau}(z_2) = e_n^{-3(d-r)} z_2. \end{cases}$$

Preuve. Montrons d'abord le théorème lorsque $\bar{\omega}$ est régulier. Supposons que $f^{-1}(\bar{\omega})$ soit un point singulier (les cas (a), (b) se traitent de la même façon). Soient $n' = [L:K]$, $d' = d_K n' \in \mathbb{N}$ le degré du point $E_1 \cap E_2$ dans $\mathscr{C}$. Il existe $\alpha, \beta, \gamma \in L$ tels que si l'on pose $x = \alpha v + \gamma$, $y = \beta z$ alors:

(i) $z^2 = Q(v) \in R_L[v]$, avec $\bar{Q}(v) = v^3(v+1) \in k[v]$ et,

(ii) en posant $v = t_{n'}^{2d'} v_2$, $z = t_{n'}^{3d'} z_2$, on ait $z_2^2 = H(v_2) \in R_L[v_2]$ avec

$$\bar{H}(v_2) = v_2^3 + \alpha_{22} v_2 + \alpha_{23} \in k[v_2], \quad \alpha_{22} \text{ ou } \alpha_{23} \neq 0.$$

Il résulte de (i) que

$$\alpha^6 \beta^{-4} J_2 = J_2(Q) \in R_L^*, \quad \text{et} \quad \alpha^8 \beta^{-4} B_2 = B_2(Q) \in R_L^*$$

donc $\alpha \in t_n^{-2r} K R_L^*$, $\beta \in t_n^{-3r} K R_L^*$. Comme $n' d_K \in \mathbb{N}$, il suit que $n \mid n'$, donc $t_n \in L$. Cela implique que $\bar{\tau}(v) = e_n^{2r} v + \mu$ avec $\mu \in k$, et $\bar{\tau}(z) = e_n^{3r} z$. Comme $\bar{\tau}$ laisse fixe $f^{-1}(\bar{\omega})$, on a $\mu = 0$. En posant $v_1 = v^{-1}$, $z_1 = v^{-3} z$, on a $z_1^2 = v_1^2(v_1 + 1)$ et,

$$\bar{\tau}(v_1) = e_n^{-2r} v_1, \quad \bar{\tau}(z_1) = e_n^{-3r} z_1.$$

Par conséquent l'action de τ sur E_1 est bien comme décrite dans l'énoncé.

La composante E_2 est donnée par une équation $z_2^2 = \bar{H}(v_2)$ (voir (ii) ci-dessus), et on a $\bar{\tau}(v_2) = e_{n'}^{-2d'} e_n^{2r} v_2 = e_n^{-2(d-r)} v_2$, $\bar{\tau}(z_2) = e_{n'}^{-3d'} e_n^{3r} z_2 = e_n^{-3(d-r)} z_2$. Par conséquent, $\bar{\tau}^n = 1$, donc $[L:K] = n' = n$.

Supposons maintenant $\bar{\omega}$ singulier. Reprenons les notations du lemme 1. Il résulte de ce dernier que $n \mid [L:K]$, car on doit avoir $d_L, r_L \in \mathbb{N}$. Supposons par exemple que $\varrho(a_0 P_1) \leqq \varrho(a_0 P_2)$. Alors $\varrho(a_0 P_1) = 2r/n$. Ecrivons $P_1(u) = u^3 - 3cu^3 + \cdots \in R[u]$ et posons $u = c + a_0^{-1} t_n^{2r} v_1$, $w = b a_0^{-1} t_n^{3r} z_1$, où $b \in R^*$ vérifie $b^2 = P_2(c) \in 8 + \mathfrak{m}$. Alors $z_1^2 = Q_1(v_1)(1 + \varepsilon(v_1))$, avec $Q_1(v_1) \in R_L$, $\bar{Q}_1(v_1) = v_1^3 + \alpha_{12} v_1 + \alpha_{13} \in k[v_1]$, et

$$\varepsilon(v_1) \in \mathfrak{m}_L[v_1].$$

Cela fournit une équation $z_1^2 = \bar{Q}_1(v_1)$ de E_1 telle que v_1 ait son pôle en $E_1 \cap E_2$. De plus $\bar{\tau}(v_1) = e_n^{-2r} v_1$, $\bar{\tau}(z_1) = e_n^{-3r} z_1$. On obtient les résultats concernant E_2 en remplaçant r par

$d-r$, car $\varrho(a_0 P_2)/2 = v(a_0) + (d_K - \varrho(a_0 P_1)/2)$. Cela implique en particulier que $\bar{\tau}^n = 1$, d'où $[L:K] = n$ (voir (3.1)).

Corollaire. *Supposons $2 \nmid v(J_2)$. On a $d_K + v(a_0) = 2r_K$. Soient m le plus petit dénominateur de d_K, et $r = md_K$. Alors $[L:K] = 2m$, et*

$$\bar{\tau}^2(v_i) = e_m^{-2r} v_i, \quad \bar{\tau}^2(z_i) = e_m^{-3r} z_i .$$

Preuve. Soit $K' = K[t_2] = K[J_2^{1/2}] \subset L$. En appliquant le lemme 1 à

$$C_{K'}: y^2 = a_0 x^6 + a_1 x^5 + \cdots + a_6 \in K'[x] ,$$

on voit que $d_{K'} + v_{K'}(a_0) = 2r_{K'}$ car τ permute les deux facteurs P_1, P_2, donc $d_K + v(a_0) = 2r_K$. On peut donc écrire $d_{K'} = (2r)/m$, $r_{K'} = (r + v(a_0)m)/m$. Il suit du théorème 3 que $[L:K'] = m$, et que le générateur τ^2 de $\mathrm{Gal}(L/K')$ agit sur E_i comme dans l'énoncé. D'où le corollaire puisque $[K':K] = 2$.

(4.4) Remarque. Les notations sont celles du théorème 3. Dans le cas où $\mathscr{C}_s$ a une unique composante lisse, $[L:K] = 2$ et $d \in 1 + 2\mathbb{Z}$, on a deux types possibles pour $\mathscr{X}$. C'est $[\mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_q^* - (d-1)/2]$, où $q = v(J_2 J_{10} I_{12}^{-1})$, si E_1 est lisse et r pair, ou bien si E_1 est singulière et r impair. Sinon $\mathscr{X}$ est de type $[\mathrm{I}_q - \mathrm{I}_0^* - (d-1)/2]$. Les groupes des composantes Φ (voir § 7) sont respectivement H_q et $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Pour connaître la nature de E_1, on peut procéder comme suit.

(a) Supposons $\bar{\omega}$ non ramifié. Soient $\alpha, \beta \in L$ tels que

$$\alpha^6 = a_0^{-2} J_2, \quad \beta = a_0^{-1} J_2, \quad \gamma = -a_1/(6a_0\alpha) .$$

Posons $x = \alpha v + \gamma$, $y = \beta z$. Alors $z^2 = Q(v) \in R_L[v]$, $Q(v)$ est unitaire, $\bar{Q}(v) \in k[v]$ a une racine triple. La composante E_1 est singulière si et seulement si $\bar{Q}(v)$ a deux racines multiples.

(b) Si $\bar{\omega}$ est régulier et si $f^{-1}(\bar{\omega})$ est un point singulier, alors E_1 est singulier.

(c) Supposons que $f^{-1}(\bar{\omega})$ soit un point régulier et $\mathrm{car}(k) \neq 5$. On a que E_1 est singulière si et seulement si on a les conditions suivantes sur des invariants affines absolus (§ 2.1):

$$B_2^2 A_2^{-1} J_2^{-1} \in 12 + \mathfrak{m}, \quad B_6^2 A_2^{-3} J_2^{-3} \in 2^8 . 3^{-3} . 7^2 + \mathfrak{m} .$$

(d) Supposons $\bar{\omega}$ singulier. Considérons comme dans le lemme 1 le polynôme $P_0(u) = a_0^{-1} a^{-6} P(au - a_1/(6a_0))$ où $a^2 = -A_2/(36a_0^2)$. Posons

$$T(u) = P_0'(u)^3 + 54\, P_0(u)^2 ,$$

où $P_0'(u)$ est la dérivée de $P_0(u)$. Alors E_1 est singulière si et seulement si

$$6(r - v(a_0)) > \min\{v(T(1)), v(T(-1))\} .$$

(4.5) Remarque. Supposons $\operatorname{car}(k) = 3$, la prop. 4.3.1 reste valable en remplaçant J_2 par J_6 et en faisant quelques légères modifications. On a l'équivalence: $\operatorname{Gal}(L/K)$ laisse E_i invariante $\Leftrightarrow 2 \mid v(J_6)$. Il est également possible d'obtenir un résultat analogue au théorème 3 en supposons L modérément ramifiée sur K.

(4.6) Remarque. Si $\operatorname{car}(k) \neq 5$, on peut utiliser l'invariant affine A_2 au lieu de A_5 dans les propositions 4.1.1, 4.2.1, 4.3.1, et les théorèmes 1 – 3 (on remplace A_5^{2i} par A_2^{5i}). Cela permet de simplifier légèrement les énoncés.

§ 5. Ramification sauvage de L sur K

Nous allons d'abord préciser la définition et la notation du type de $\mathscr{X}$. Nous entendons par *type de* $\mathscr{X}$ la configuration de $\mathscr{X}_s$, c'est-à-dire la donnée de: la matrice d'intersection de $\mathscr{X}_s$; le genre arithmétique et le nombre de points singuliers de chaque composante irréductible de $\mathscr{X}_s$; le nombre de points d'intersection entre deux composantes irréductibles quelconques de $\mathscr{X}_s$.

Dans [N, U], $\mathscr{X}$ est classé par le *type géométrique de* $\mathscr{X}$ (c'est la donnée de la configuration de $\mathscr{X}_s$ et de celle de $\mathscr{C}_s$). Nous adopterons leur notation pour la configuration de $\mathscr{X}_s$. Elle est plus précise que celle de [Og].

On désigne par L_{mr} la plus grande sous-extension modérément ramifiée (sur K) de L. Pour tout $Q(x) \in R[x]$, on note $\bar{Q}(x)$ son image dans $k[x]$.

(5.1) Ramification sauvage lorsque car (k) = 5.

Lemme. *Soit* $z^2 = Q(u)$ *une équation de* C. *Supposons que* $5 \mid [L:K]$. *On a les propriétés suivantes*:

(a) *Si* $Q(u) = b_0 u^6 + b_1 u^5 + \cdots + b_6 \in R[u]$ *et si* $\deg(\bar{Q}) = 5$, *alors*

$$5\, v(b_i) > (i-1)\, v(b_6)$$

pour tout $2 \leqq i \leqq 5$.

(b) *Si* $Q(u) = a(u^6 + b_1 u^5 + \cdots + b_6)$ *avec* $b_i \in R$, *alors* $\min\{i^{-1} v(b_i) \mid 1 \leqq i \leqq 6\}$ *n'est atteint que par un (et un seul) des deux nombres* $v(b_1)$ *et* $v(b_5)/5$.

Preuve. En effet, si une des conditions du lemme n'est pas vérifiée, il est facile de voir que $Q(u)$ a toutes ses racines dans une extension modérément ramifiée F de K. Il suit que C a bonne réduction sur une extension quadratique de F, ce qui est contraire à l'hypothèse $5 \mid [L:K]$.

Proposition 5.1. *Supposons* $5 \mid [L:K]$. *On a les propriétés suivantes*:

(a) $L_{\mathrm{mr}} = K[(A_5^{-6} J_{10})^{1/8}]$ *et* $[L:L_{\mathrm{mr}}] = 5$.

(b) *C admet une équation de la forme* $z^2 = b_0 u^6 + b_1 u^5 + b_2 u^4 + \cdots + b_6 \in R[u]$, *avec* $b_0 \in \mathfrak{m}$, $b_1 \in R^*$, $1 \leqq v(b_6) \leqq 9$ *et* $v(b_6) \neq 5$.

(c) *Si* $v(b_6) = 2m$, *le modèle minimal* $\mathscr{X}$ *de* C *est de type* $[\mathrm{IX} - m]$. *Si* $v(b_6) = 2m - 1$, $\mathscr{X}$ *est de type* $[\mathrm{VIII} - m]$ *ou* $[\mathrm{VIII} - (m-1)]$ *selon que* $m \leqq 2$ *ou* $m \geqq 4$ (ces types sont répertoriés dans [N, U], pp. 155–158).

Preuve. (a) Conservons les notations de la démonstration du théorème 1. On a encore $40 \mid v_L(A_5^{-6} J_{10})$, donc $K[(A_5^{-6} J_{10})^{1/8}] \subset L_{\mathrm{mr}}$. Il reste à montrer que $[L:K] = 5$ sous l'hypothèse $K = K[(A_5^{-6} J_{10})^{1/8}]$. On a alors $\alpha^5, \beta^5 \in KR_L^*$. Soit $\theta \in \mathrm{Gal}(L/K)$, alors $\alpha\theta(\alpha)^{-1}, \beta\theta(\beta)^{-1} \in 1 + \mathfrak{m}_L$. Donc θ agit sur $\mathscr{C}_s$ par $\theta(z) = z, \theta(v) = v + c$ avec $\bar{Q}(c) - \bar{Q}(0) = 0$. Donc $\mathrm{Gal}(L/K)$ a au plus cinq éléments, d'où $[L:K] = 5$.

(b) Voir l'algorithme ci-dessous.

(c) On désingularise "à la main" le modèle projectif normal de C associé à l'équation de (b). Tout se passe comme si $\mathrm{car}(k) = 0$.

Algorithme. *Il s'agit de savoir si* $5 \mid [L:K]$ *et, si c'est le cas, de trouver une équation de* C *comme dans* (b) *de la proposition ci-dessus.* On suppose que $\mathscr{C}_s \simeq C_0$, sinon L/K sera modérée (voir (4.1)).

Il existe $b, c \in K^*$ tels que si on pose $u = bx$, $z = cy$, alors $z^2 = Q(u)$ et $Q(u)$ vérifie: ou bien $Q(u) \in R[u]$ et $\deg(\bar{Q}) = 5$, ou bien $Q(u) = a(u^6 + b_1 u^5 + \cdots + b_6)$ avec $b_i \in R$.

(A 1) Supposons d'abord que $Q(u) = b_0 u^6 + b_1 u^5 + \cdots + b_6 \in R[u]$ et $\deg(\bar{Q}) = 5$.

(i) On peut supposer que $Q(u)$ vérifie les conditions (a) du lemme ci-dessus (sinon L/K sera modérée). Par une translation éventuelle sur u, on se ramène à $v(b_6) > 0$.

(ii) Si $1 \leqq v(b_6) \leqq 9$ et $v(b_6) \neq 5$, alors $5 \mid [L:K]$, et $z^2 = Q(u)$ est l'équation recherchée.

(iii) Si $v(b_6) \geqq 10$. Ecrivons $v(b_6) = 10m + r$ avec $m \geqq 1$ et $0 \leqq r \leqq 9$. En remplaçant u par $t^{2m} u$, et z par $t^{5m} z$, on se ramène à $0 \leqq v(b_6) \leqq 9$. On recommence alors à l'étape (i).

(iv) Si $v(b_6) = 5$. Soit $e \in K$ tel que $e^5 + b_6 b_1^{-1} t^{-5} \in tR$. En remplaçant u par $u + et$ on se ramène à $v(b_6) > 5$, on recommence à l'étape (i).

(A 2) Supposons que $Q(u) = a(u^6 + b_1 u^5 + \cdots + b_6)$ avec $b_i \in R$.

(i) Supposons les conditions (b) du lemme ci-dessus vérifiées (sinon L/K sera modérée). Par translation sur u, on peut supposer que $v(b_6) > 0$.

(ii) Si $v(b_5) = 0$. Soit $e = b_5^{-1} b_6$, posons $v = (u + e)^{-1}$, $w = v^3 z$. Alors

$$w^2 = a(c_0 v^6 + c_1 v^5 + \cdots + c_6),$$

avec $v(c_0) \geqq 2$, $c_1 \in R^*$, $c_i \in R$. Soit $\delta = 0$ si $v(a) \in 2\mathbb{Z}$, et $\delta = 1$ sinon. En remplaçant v par $t^{-\delta} v$, et w par $t^{(v(a)-5\delta)/2} w$, on obtient une équation $w^2 = Q_1(v) \in R[v]$ de C avec $\deg(\bar{Q}_1) = 5$. On recommence donc avec (A1) à partir de cette équation.

(iii) Si $v(b_5) > 0$. Deux cas sont possibles:

(iii$_1$) Ou bien $\min\{i^{-1} v(b_i) | 1 \leqq i \leqq 6\}$ est atteint par $v(b_1)$. En remplaçant u par $b_1(u-1)$ et z par $b_1^3 z$, on se ramène à la situation de (ii).

(iii$_2$) Ou bien ce minimum est atteint par $v(b_5)/5$. On pose

$$v = b_6 b_5^{-1} u^{-1} + 1, \quad w = (v-1)^3 z,$$

alors $w^2 = (ab_6) H(v)$ avec $H(v) \in R[v]$ unitaire et $\bar{H}(v) = v^6 - v$. On va alors à (ii) avec cette nouvelle équation.

Il est claire que cet algorithme s'arrête au bout d'un nombre fini de pas. Ce nombre peut être majoré grossièrement par une fonction linéaire en la valuation du discriminant de $P(x)$.

(5.2) Ramification sauvage lorsque car$(k) = 3$. On étudie le cas où $\mathscr{C}_s$ est lisse (donc $\mathscr{C}_s \in \Gamma$, voir (4.1)), ou $\mathscr{C}_s = C_{000}$ est la réunion de deux droites projectives se coupant en trois points. Dans la variété de modules $\bar{M}_2$ des courbes stables de genre 2 sur k, l'adhérence $\bar{\Gamma}$ de Γ est égale à $\Gamma \cup \{C_{000}\}$.

Notons que tout polynôme unitaire $Q(u) \in K[u]$ de degré 6 s'écrit de façon unique sous la forme $Q(u) = (u^3 + c_1 u^2 + c_2 u + c_3)^2 + c_4 u^2 + c_5 u + c_6$ avec $c_i \in K$.

Lemme. *Soit $z^2 = aQ(u)$ une équation de C avec*

$$Q(u) = (u^3 + c_1 u^2 + c_2 u + c_3)^2 + c_4 u^2 + c_5 u + c_6 \in R[u].$$

Supposons que $3 | [L:K]$. Alors pour tout $i \neq 3$, on a $3v(c_i) > iv(c_3)$.

Preuve. Si $3v(c_i) \leqq iv(c_3)$ pour un $i \neq 3$, alors $Q(u)$ aura une racine dans une extension modérée F de K. Cette racine induit un point de ramification de $\mathscr{C}_s \to \mathscr{X}_s$ qui sera invariant par tout élément de $\mathrm{Gal}((FL)/F)$, cela implique que $3 \nmid [FL:F]$, donc que L sera modérée sur K.

Proposition 5.2. *Supposons $3 | [L:K]$. On a les propriétés suivantes:*

(a) $[L : L_{\mathrm{mr}}] = 3$; $L_{\mathrm{mr}} = K[a_0^{1/2}, J_{10}^{1/2}]$ *si $\mathscr{C}_s$ est lisse, et* $L_{\mathrm{mr}} = K[a_0^{1/2}, J_2^{1/2}]$ *si* $\mathscr{C}_s = C_{000}$.

(b) *C admet une équation de la forme $z^2 = a_0 Q(u)$ avec*

$$Q(u) = (u^3 + c_1 u^2 + c_2 u + c_3)^2 + c_4 u^2 + c_5 u + c_6 \in R[u], \; v(c_3) = 1$$

ou 2.

(c) *Soit* $N = \min\{3v(c_i) - iv(c_3) | 4 \leqq i \leqq 6\}$. *Alors le modèle minimal* $\mathscr{X}$ *de* C *sur* R *est de type* $[\mathrm{III}_N]$ *ou* $[\mathrm{III}_N^*]$ *selon que* $2 | v(a_0)$ *ou non* (ces types sont répertoriés dans [N, U], p. 184).

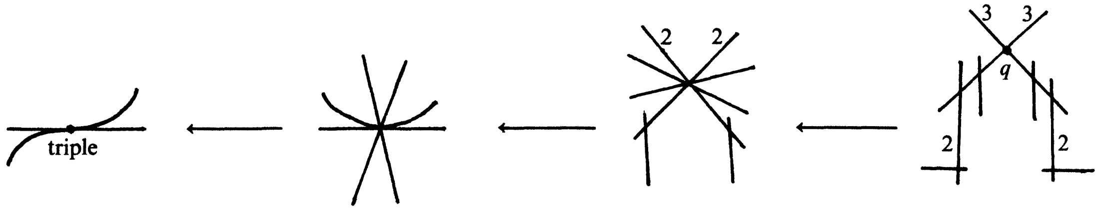
Preuve. (a) Supposons par exemple $\mathscr{C}_s$ lisse. On montre, de façon analogue à la proposition 5.1 (a), que

$$L_{\mathrm{mr}} = K[a_0^{1/2}, J_{10}^{1/10}] .$$

Comme $\mathscr{C}_s \in \Gamma$ n'est pas isomorphe à la courbe $z^2 = v^5 + 1$, on a $J_{2i}^5 J_{10}^{-2i} \in R^*$ pour un $i \leqq 4$, ce qui implique que $5 | v(J_{10})$. D'où $L_{\mathrm{mr}} = K[a_0^{1/2}, J_{10}^{1/2}]$.

(b) Pour la même raison que dans la preuve du lemme ci-dessus, ω est non-ramifié pour f, donc $a_0 \neq 0$. On peut utiliser l'algorithme ci-après pour trouver une équation vérifiant les conditions demandées.

(c) L'équation $z^2 = a_0 Q(u)$ de (b) induit un modèle projectif normal de C sur R. En désingularisant ce modèle "à la main", on vérifie que $\mathscr{X}$ est bien du type annoncé. La figure suivante illustre la situation où $2 | v(a_0)$ et $v(c_3) = 1$:



où les flèches sont des éclatements. Le complété $\mathfrak{m}_q$-adique de l'anneau local au point singulier q est isomorphe à $\hat{R}[\![u_1, u_2, u]\!]$ avec les relations $u_1^2 = u_2^2 + bu^N$ et $cu^3 = t$, où b, c sont des éléments inversibles de l'anneau local en q. Par conséquent, dans le modèle régulier $\mathscr{X}$, q est remplacé par une chaîne de N droites projectives sur k de multiplicité 3.

Algorithme. *Le but de l'algorithme est de savoir si* $3 | [L : K]$, *et si c'est le cas, de trouver une équation* $z^2 = a_0 Q(u)$ *de* C *comme dans la prop.* 5.2 (b). On s'occupe uniquement du cas où $\mathscr{X}_s$ est irréductible (voir § 6 pour le cas contraire). On peut alors se restreindre à $\mathscr{C}_s \in \Gamma \cup \{C_{000}\}$, puisque L sera modérément ramifiée sur K sinon ([Li], § 4).

Si $a_0 = 0$, alors L/K est modérée. On peut donc supposer que $a_0 \neq 0$. Il existe alors $a, b \in K^*$ tels que si on pose $u = ax$, $z = by$, alors $z^2 = a_0 Q(u)$ avec $Q(u) \in R[u]$ unitaire. Partons donc de cette équation de C. Ecrivons

$$Q(u) = (u^3 + c_1 u^2 + c_2 u + c_3)^2 + c_4 u^2 + c_5 u + c_6.$$

(i) Si la condition du lemme concernant les $v(c_i)$ n'est pas satisfaite, alors $3 \nmid [L : K]$, et l'algorithme s'arrête. Sinon, par une translation éventuelle sur u, on se ramène à $v(c_3) > 0$.

(ii) Soit $v(c_3) = 3n + r$ avec $n \geqq 0$ et $0 \leqq r \leqq 2$. En remplaçant u par $t^n u$ et z par $t^{3n} z$, on se ramène à $0 \leqq v(c_3) \leqq 2$.

(iii) Si $v(c_3) = 1$ ou 2, alors $3|[L:K]$ et $z^2 = a_0 Q(u)$ est une équation vérifiant les conditions demandées. Si $v(c_3) = 0$, on recommence à l'étape (i).

L'algorithme s'arrête au bout d'un nombre fini de pas car la valuation du discriminant de $Q(u)$ diminue à chaque pas.

Exemple. Soit C la courbe sur l'extension maximale non-ramifiée K de $\mathbb{Q}_3$ définie par $y^2 = x^6 + x^3 + 7$. On a $v(J_{10}) = 15$ et $[L:K] = 6$. On peut vérifier que $\mathscr{C}_s \in \Gamma$ et que $\mathscr{X}$ est de type $[\mathrm{III}_3]$. Plus généralement, si $\mathscr{C}_s$ est lisse, on a toujours $3|N$ (où N est défini dans la proposition ci-dessus).

§ 6. Algorithme déterminant le modèle minimal dans un cas spécial

Notons Δ_1 l'ensemble des (classes d'isomorphisme des) courbes stables, de genre 2 sur k, qui sont réunion de deux composantes irréductibles se coupant en un seul point. Le fait que $\mathscr{C}_s \in \Delta_1$ équivaut à $\mathscr{C}_s/\langle\sigma\rangle$ non irréductible (voir § 4). Nous donnons ici un algorithme pour déterminer le type du modèle minimal $\mathscr{X}$ lorsque $\mathscr{C}_s \in \Delta_1$. Si $\mathrm{car}(k) \neq 3$, cela est déjà fait au (4.3). Cependant, notre algorithme reste valable en toute caractéristique $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Il consiste essentiellement, comme dans le paragraphe § 5, en une approximation des racines (dans K^{alg}) de $P(x)$ par des éléments de K.

Dans tout ce paragraphe, on suppose $\mathscr{C}_s \in \Delta_1$. Par un changement de variables sur x et y, on trouve facilement une équation

$$C: \quad z^2 = aQ(v), \quad Q(v) \in R[v]$$

et $\bar{Q}(v)$ (image de $Q(v)$ dans $k[v]$) de degré $\geqq 3$. Nous partons donc d'une telle équation. Notons que $\mathscr{C}_s \in \Delta_1$ implique que $\bar{Q}(v)$ a une racine d'ordre $\geqq 3$ ou $\deg(\bar{Q}) = 3$.

Notation. Pour tout polynôme $H(x) = c_0 x^6 + c_1 x^5 + \cdots + c_6 \in K[x]$ et pour tout $0 \leqq j \leqq 3$, on note

$$\theta_j(H) := \min\left\{ \frac{v(c_i)}{i-j} \,\middle|\, j+1 \leqq i \leqq 6 \right\}.$$

Pour tout $a \in K^*$, on note

$$\delta(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2|v(a), \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour la notation du type de $\mathscr{X}$, on peut voir le début de § 5.

(6.1) Traitons d'abord le cas où $\bar{Q}(v)$ a une racine d'ordre 3 ou $\deg(\bar{Q}) = 3$. On va chercher une équation

$$z^2 = a' S(u)$$

de C, avec $a' \in K$, $S(u) \in R[u]$, $\deg(\bar{S}) = 3$, $0 \leqq \theta_3(S) < 1$ et $\bar{S}(u)$ n'est pas un cube si $\theta_3(S) = 0$. Si $\bar{Q}(v)$ est de degré 3 et n'est pas un cube, on prend $a' = a$ et $S(u) = Q(u)$.

Supposons dans la suite que $\bar{Q}(v)$ a une racine $\bar{e}$ d'ordre 3. Alors il existe $b, b' \in R$ relatifs à $\bar{e}$ tels que $\bar{b'} = \bar{e}$ et que si l'on pose $v = bu + b'$, alors on a:

$$z^2 = ab^3 S(u),$$

et $S(u)$ satisfaisant les conditions ci-dessus. On peut déterminer b de la façon qui suit.

Soit $Q_0(v) = Q(v+e)$. Si $\theta_3(Q_0) < 1$, on prend $b = 1$ et $b' = e$. Supposons $\theta_3(Q_0) \geqq 1$. Soit $r_1 = [\theta_3(Q_0)]$ la partie entière de $\theta_3(Q_0)$. Posons $v = t^{r_1} v_1$. On a $z^2 = at^{3r_1} Q_1(v_1)$, avec $\deg(\bar{Q}_1) = 3$ et $0 \leqq \theta_3(Q_1) < 1$. Si $\theta_3(Q_1) \neq 0$ ou si $\bar{Q}_1(u)$ n'est pas un cube, on prend $b = t^{r_1}$ et $b' = e$. Sinon, soit $e_1 \in R^*$ un relèvement de la racine de $\bar{Q}_1(v_1)$, soient

$$v_2 = v_1 - e_1, \quad Q_2(v_2) = Q_1(v_2 + e_1),$$

et on continue avec l'équation $z^2 = at^{3r_1} Q_2(v_2)$. On obtient ainsi une suite d'entiers naturels $r_1, r_2, \ldots$. Ce processus s'arrête au bout d'un nombre fini de fois pour la raison suivante: soient $\lambda_1, \lambda_2 \in K^{\mathrm{alg}}$ deux racines distinctes de $Q(v)$ avec $|\lambda_i| \leqq 1$, alors

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \leqq |t^{r_1 + r_2 + \cdots}|.$$

Lorsque ce processus s'arrête, on prendra par définition $b = t^{r_1 + r_2 + \cdots}$.

– Si $\bar{Q}$ a une autre racine d'ordre 3, on note $c \in R$, $T(u) \in R[u]$ les éléments définis de façon analogue à b et $S(u)$, mais relatifs à cette autre racine triple.

– Si $\deg(\bar{Q}) = 3$. On remplace v par v^{-1} et z par $v^{-3}z$. Alors 0 sera une racine d'ordre 3 de $\bar{Q}$. On note c et $T(u)$ les éléments associés à cette racine comme précédemment.

– Si $\bar{Q}(v)$ est de degré $\geqq 4$ et n'a qu'une racine triple $\bar{e}$, on prend $c = 1$ et

$$T(u) = u^6 Q(e + u^{-1}).$$

Nous pouvons maintenant donner le type du modèle minimal $\mathscr{X}$ de C. Soit K_1 le symbole de Kodaira (pour les modèles minimaux des courbes elliptiques, voir [Ta], §6) définit comme suit: si $\bar{S}(u)$ est séparable, alors $K_1 = \mathrm{I}_0$ ou I_0^* selon que $2 | v(ab)$ ou non; si $\bar{S}(u)$ a une racine double, alors $K_1 = \mathrm{I}_m$ ou I_m^*, pour un certain $m \in \mathbb{N}$, selon que $2 | v(ab)$ ou non; si $\theta_3(S) = 1/2$, alors $K_1 = \mathrm{III}$ ou III^* selon que $2 | v(ab)$ ou non; si $\theta_3(S) = 1/3$ (resp. $2/3$), alors $K_1 = \mathrm{II}$ (resp. IV) ou IV^* (resp. II^*) selon que $2 | v(ab)$ ou non. Soit K_2 le symbole de Kodaira défini de la même façon, mais relativement à c et $T(u)$. Alors $\mathscr{X}$ est de type $[K_1 - K_2 - r]$, où $r = \big(v(b) - \delta(ab) + v(c) - \delta(ac)\big)/2$. Ces types de modèles minimaux sont répertoriés dans [N, U], pp. 158–169.

(6.2) Supposons que $\bar{Q}(v)$ a une racine d'ordre 4. On cherche une équation

$$z^2 = a' S(u)$$

de C, avec $a' \in K$, $S(u) \in R[u]$, 0 est une racine d'ordre 4 de $\bar{S}(u)$, et $0 < \theta_2(S) < 1$ (si cela est possible).

On se ramène d'abord, par translation sur v, à $v^4 | \bar{Q}(v)$. Si $\theta_2(Q) < 1$, on prend $a' = a$ et $S(u) = Q(u)$. Si $\theta_2(Q) \geqq 1$, on pose $r_1 = [\theta_2(Q)]$, $v = t^{r_1} v_1$ et $Q_1(v_1) = t^{-4r_1} Q(t^{r_1} v_1)$. Si $0 < \theta_2(Q_1) < 1$, on prend $a' = at^{4r_1}$ et $S(u) = Q_1(u)$. Si $\theta_2(Q_1) = 0$, alors ou bien $\bar{Q}_1(v_1)$ a une racine d'ordre 3 (auquel cas on est ramené à (6.1)), ou bien $\bar{Q}_1(v_1)$ a une racine d'ordre 4. Dans ce dernier cas, on pose $v_2 = v_1 - e_1$, où e_1 est un relèvement de la racine de $\bar{Q}_1(v_1)$, et on continue avec l'équation $z^2 = at^{4r_1} Q_1(v_2 + e_1)$. Ainsi de suite. Pour les même raisons que dans (6.1), ce processus s'arrête au bout d'un nombre fini de pas.

Par conséquent, ou bien on se ramène à la situation de (6.1), ou bien il existe $b, b' \in R$ tels que si l'on pose $v = bu + b'$, alors $z^2 = ab^4 S(u)$, $\bar{S}(u)$ ayant 0 comme racine d'ordre 4 et $0 < \theta_2(S) < 1$.

Supposons être dans ce dernier cas. Le fait que $\mathscr{C}_s \in \Delta_1$ implique que $\theta_2(S) \neq \nu(b_4)/2$, $\nu(b_6)/4$. Le type de $\mathscr{X}$ est déterminé de la façon suivante:

(6.2.1) Si $\theta_2(S) = 1/3$, alors $\mathscr{X}$ est de type [IV$-$II$_m$] ou [II$^*-$II$_m^*$] suivant que $2 | \nu(a)$ ou non, où $m \geqq 0$ est un certain entier positif.

(6.2.2) Si $\theta_2(S) = 2/3$, alors $\mathscr{X}$ est de type [IV$^*-$II$_m$] ou [II$-$II$_m^*$] suivant que $2 | \nu(a)$ ou non, où $m \geqq 1$ (les types ci-dessus sont répertoriés dans [N, U], pp. 175–176).

(6.3) Considérons maintenant le cas où $\bar{Q}(v)$ a une racine d'ordre 5. Comme dans (6.2), il existe $b, b' \in R$ tels que si l'on pose $v = bu + b'$, alors

$$z^2 = ab^5 S(u), \quad S(u) \in R[u]$$

et ou bien $3 \leqq \deg(\bar{S}) \leqq 4$ (auquel cas on est ramené à (6.1) ou (6.2)), ou bien 0 est une racine d'ordre 5 de $\bar{S}(u)$ avec $0 < \theta_1(S) < 1$. Occupons nous donc du deuxième cas. Écrivons $S(u) = b_0 u^6 + b_1 u^5 + \cdots + b_6$. Comme $\mathscr{C}_s \in \Delta_1$, on a $\theta_1(S) \neq \nu(b_5)/4, \nu(b_6)/5$.

(6.3.1) Si $\theta_1(S) = 1/2$ et $\nu(b_6) = 3$, alors $\mathscr{X}$ est de type [II$^*-$III$-(-1)$] ou [IV$-$III$^* - (-1)$] selon que $2 | \nu(ab)$ ou non.

(6.3.2) Si $\theta_1(S) = 1/3$ et $\nu(b_6) = 2$, alors $\mathscr{X}$ est de type [II$-$II$_0^*$] ou [IV$^*-$II$_0$] selon que $2 | \nu(ab)$ ou non.

(6.3.3) Dans les autres cas, on pose $u_1 = tu^{-1}$, $z_1 = zu_1^{-3}$. Alors $z_1^2 = ab^5 t^r H(u_1)$, avec $3 \leqq r \leqq 4$, $H(u_1) \in R[u_1]$ et $\bar{H}(u_1)$ est un monôme de degré 3 ou 4. Ce qui nous ramène aux situations (6.1) ou (6.2).

(6.4) Enfin le cas où $\bar{Q}(v)$ a une racine d'ordre 6. Par des procédés analogues à (6.3), on se restreint à la situation où il existe $b, b' \in R$ tels que si l'on pose $v = bu + b'$, alors

$$z^2 = ab^6 S(u) = ab^6 (b_0 u^6 + b_1 u^5 + \cdots + b_6), \quad S(u) \in R[u]$$

$\deg(\bar{S}) = 6$ et $0 < \theta_0(S) < 1$. On peut montrer qu'avec l'hypothèse $\mathscr{C}_s \in \Delta_1$ (qui est celle du paragraphe), le dénominateur de $\theta_0(S)$ n'est pas 4 ni 5.

(6.4.1) Supposons $\theta_0(S) = 1/6$ ou $5/6$. Alors $\mathscr{X}$ est de type [V] si $\theta_0(S) = 1/6$ et $2 | v(a)$, ou si $\theta_0(S) = 5/6$ et $2 \nmid v(a)$; $\mathscr{X}$ est de type [V*] dans les autres cas.

(6.4.2) Supposons que $\theta_0(S) = 1/3$ ou $2/3$. On écrit $S(u)$ sous la forme

$$S(u) = (c_0 u^3 + c_1 u^2 + c_2 u + c_3)^2 + c_4 u^2 + c_5 u + c_6 .$$

– Si $\theta_0(S) < v(b_6)/6$. On peut supposer $\theta_0(S) = 1/3$ et $v(b_3) = 3$ (car sinon on se ramène aux sous-paragraphes précédents en remplaçant u par tu). Le type de $\mathscr{X}$ est [II* – IV–(–1)].

– Si $\theta_0(S) = v(b_6)/6$ et $2v(c_3) \geqq v(c_6)$. Alors $\mathscr{X}$ est de type [III] ou [IV] selon que $2 | v(a)$ ou non (les types ci-dessus sont décrits dans [N, U], pp. 155–156).

– Si $\theta_0(S) = v(b_6)/6$ et $2v(c_3) < v(c_6)$. Soit $N = \min\{3v(c_i) - iv(c_3) | 4 \leqq i \leqq 6\}$. Alors $\mathscr{X}$ est de type $[\mathrm{III}_N]$ ou $[\mathrm{III}_N^*]$ selon que $2 | v(a)$ ou non ([N, U], p. 184).

(6.4.3) Supposons $\theta_0(S) = 1/2$.

– Si $v(b_6) \geqq 4$. En remplaçant u par tu ou tu^{-1} suivant que $v(b_5) \geqq 4$ ou $v(b_5) = 3$, on se ramène à une des situations précédentes. Notons que $v(b_5) \geqq 4$ et $v(b_6) \leqq 4$ est impossible car $\mathscr{C}_s \in \Delta_1$.

– Si $v(b_6) = 3$. Soient $K' := K[t^{1/2}]$, $\mathscr{X}'$ le modèle minimal de $C_{K'}$ sur R', clôture intégrale de R dans K'. Posons $u = t^{1/2} u_1$, $z = t^{3/2} a^{1/2} b^3 z_1$, alors $C_{K'}$ a pour équation

$$C_{K'}: \quad z_1^2 = H(u_1), \quad H(u_1) \in R'[u_1]$$

et $\bar{H}(u_1)$ est le cube d'un polynôme séparable de degré 2. On peut déterminer le type de $\mathscr{X}'$ comme dans (6.1), il est de la forme $[K_1 - K_1 - 2m]$. Le type de $\mathscr{X}$ est alors $[2K_1 - m]$.

§ 7. Modèle de Néron de la Jacobienne de C

Oublions pour un instant l'hypothèse $g(C) = 2$. Soient $\mathscr{N}$ le modèle de Néron de la Jacobienne de C, $\mathscr{N}^\circ$ sa composante neutre, et $\Phi := \mathscr{N}(R)/\mathscr{N}^\circ(R)$ le groupe des composantes connexes de $\mathscr{N}$. Alors sous une certaine condition (automatiquement vérifiée si $g(C) = 2$), on a

$$\mathscr{N}_s^\circ \simeq \mathrm{Pic}^\circ_{\mathscr{X}_s/k}$$

([B, L, R], § 9.5, theorem 4). Cela permet de trouver aisément $\mathscr{N}_s^\circ$ (loc. cit. § 9.2). Nous laissons au lecteur le soin de le faire dans le cas $g(C) = 2$.

En ce qui concerne le groupe Φ, il peut être calculé au moyen de la matrice d'intersection de $\mathscr{X}_s$ (loc. cit. § 9.6), ou en étudiant le graphe d'intersection de $\mathscr{X}_s$ ([Lo-1]).

Lorsqu'une matrice de monodromie $M \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ de $\mathscr{X}$ est donnée (ce qui est fait dans [N, U] pour le genre 2), on a

$$\Phi = \prod_i (\mathbb{Z}/e_i\mathbb{Z})$$

où les e_i sont les diviseurs élémentaires non nuls de $M - \mathrm{Id}$ ([Lo-2], remark 2.2). Dans la situation du présent travail, cette méthode s'avère extrêmement efficace puisque M est une matrice 4×4. D'autre part, si $\mathscr{X}$ est de type $[K_1 - K_2 - m]$ ou $[2K_1 - m]$, où K_i est un symbole de Kodaira pour les modèles minimaux des courbes elliptiques (voir par exemple [Ta], § 6), $m \geqq -1$. On peut voir alors que $\Phi([K_1 - K_2 - m]) = \Phi(K_1) \times \Phi(K_2)$ et que $\Phi([2K_1 - m]) = \Phi(K_1)$.

Notons pour abréger H_n le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ si n est pair et le groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si n est impair. C'est le groupe des composantes du modèle de Néron d'une courbe elliptique de type I_n^*, $n \geqq 0$. Pour tout entier $d \in \mathbb{N}$, (d) désigne le groupe cyclique à d éléments.

§ 8. Les tables des modèles minimaux

Expliquons comment procéder concrètement à la détermination du type du modèle minimal $\mathscr{X}$. Soit $y^2 = a_0x^6 + a_1x^5 + \cdots + a_6 \in K[x]$ une équation de C. Soient J_{2i}, A_j, B_{2l} les invariants projectifs ou affines associés au polynôme $a_0x^6 + a_1x^5 + \cdots + a_6$ (§ 2).

1ère *étape. Réduction stable $\mathscr{C}_s$.* On détermine la réduction stable $\mathscr{C}_s$ de C (après extension de K) en utilisant [Li], théorème 1.

2ème *étape. Ramification de L/K.* Il s'agit de savoir si L est modérément ramifié sur K.

(a) Dans chacun des cas suivants, L/K est modérément ramifiée: $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3, 5$; $\mathrm{car}(k) = 5$ et $\mathscr{C}_s$ est singulière; $\mathrm{car}(k) = 3$ et $\mathscr{C}_s$ est singulière et irréductible.

(b) Si $\mathrm{car}(k) = 5$ et $\mathscr{C}_s$ lisse, on utilise l'algorithme du (5.1) pour déterminer si L/K est modérée.

(c) Si $\mathrm{car}(k) = 3$, et $\mathscr{C}_s$ est lisse ou réunion de deux droites projectives se coupant en trois points, on utilise l'algorithme du (5.2) pour savoir si $3 \mid [L:K]$.

(d) Si $\mathrm{car}(k) = 3$ et $\mathscr{C}_s$ est réunion de deux composantes irréductibles se coupant en un point, on se reporte au § 6 pour le type de $\mathscr{X}$.

3ème *étape. Modèle minimal $\mathscr{X}$ de C.* Dans les cas (b), (c) ci-dessus, si L est sauvagement ramifiées sur K, les algorithmes correspondant déterminent en même temps le type de $\mathscr{X}$. Dans le cas (d), le type de $\mathscr{X}$ est donné par l'algorithme du § 6. Supposons donc L/K modérée, et que l'on n'est pas dans le cas (d) ci-dessus. On détermine d'abord la nature de $\bar{\omega}$ à l'aide des propositions 4.1.1, 4.2.1 et 4.3.1 suivant la forme de $\mathscr{C}_s$. On calcule les entiers n, q, r comme indiqué dans les sous-paragraphes (4.1), (4.2) et (4.3), ainsi que les degrés de singularité des points singuliers de $\mathscr{C}_s$ (voir (3.2)). Il suffit alors de lire le type de $\mathscr{X}$ dans les tables suivantes (classées en fonction de la forme de $\mathscr{C}_s$).

Dans les tables suivantes, on donne le type de $\mathscr{X}$ suivant la classification de Namikawa et Ueno [N, U]. Le groupe des composantes Φ, ainsi que la notation pour ses différentes structures possibles sont définis dans § 7. Si une case dans la colonne de r ou q est vide, cela veut dire qu'il n'y a pas de condition sur r ou q dans la ligne correspondante. On note $\bar{r}$ et $\bar{q}$ leurs images respectives dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Les entiers d et d_i sont les degrés de singularité des points singuliers de $\mathscr{C}_s$ (voir (3.2)). Pour faciliter le repérage du type de $\mathscr{X}$ dans la liste de [N, U], qui s'étend sur trente pages, des indications sont données au début de chaque table.

Table 1. On suppose $\mathscr{C}_s$ lisse, L modérément ramifiée sur K. La liste des types de $\mathscr{X}$ se trouve dans [N, U], pp. 155–158.

n	$\bar{r} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\bar{q} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathscr{X}$	Φ
1			$[\mathrm{I}_{0-0-0}]$	0
2	0		$[\mathrm{I}^*_{0-0-0}]$	$(2)^4$
	1		[II]	0
3			[III]	$(3)^2$
4			[VI]	$(2)^2$
5	1		[IX − 3]	(5)
	2		[IX−1]	
	3		[IX−4]	
	4		[IX − 2]	
6	1	0	[V]	(3)
	5	3		
	1	3	[V*]	
	5	0		
	2 ou 4		[IV]	0
8		1 ou 3	[VII*]	(2)
		5 ou 7	[VII]	
10	2		[VIII − 1]	0
	4		[VIII − 3]	
	6		[VIII−2]	
	8		[VIII − 4]	

Table 2.1. On suppose que $\mathscr{C}_s$ est irréductible avec un unique point double ordinaire. La liste des types de $\mathscr{X}$ dans la table ci-dessous se trouve dans [N, U], pp. 170–178.

n	$\bar{r} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\bar{q} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathscr{X}$	Φ
1			$[\mathrm{I}_{d-0-0}]$	(d)
2	0		$[\mathrm{I}^*_{d/2-0-0}]$	$(2)^2 \times H_{d/2}$
	1	0	$[\mathrm{II}^*_{d/2-0}]$	0
	1	1	$[\mathrm{II}_{d/2-0}]$	$(2d)$
3	1		$[\mathrm{IV}-\mathrm{II}_{(d-2)/3}]$	(d)
	2		$[\mathrm{IV}^* - \mathrm{II}_{(d-1)/3}]$	
4	1	1	$[\mathrm{III}-\mathrm{II}_{(d-2)/4}]$	$(d/2)$
	1	3	$[\mathrm{III}^*-\mathrm{II}^*_{(d-2)/4}]$	(8)
	3	1	$[\mathrm{III}-\mathrm{II}^*_{(d-2)/4}]$	
	3	3	$[\mathrm{III}^*-\mathrm{II}_{(d-2)/4}]$	$(d/2)$
6	2		$[\mathrm{II}^*-\mathrm{II}^*_{(d-4)/6}]$	$H_{(d+2)/6}$
	4		$[\mathrm{II}-\mathrm{II}^*_{(d-2)/6}]$	$H_{(d+4)/6}$

Table 2.2. On suppose que $\mathscr{C}_s$ est irréductible avec exactement deux points doubles ordinaires. Si $n = 4$ ou bien si $n = 2$, $r = 1$ et $f^{-1}(\bar{\omega}) \subset (\mathscr{C}_s)_{\text{rég}}$, on a $d_1 = d_2$. La liste des types de $\mathscr{X}$ se trouve dans [N, U], pp. 179–182.

n	$\bar{r} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$f^{-1}(\bar{\omega})$	$\mathscr{X}$	Φ
1			$[\mathrm{I}_{d_1-d_2-0}]$	$(d_1) \times (d_2)$
2	0		$[\mathrm{I}^*_{d_1/2-d_2/2-0}]$	$H_{d_1/2} \times H_{d_2/2}$
	1	$\subset (\mathscr{C}_s)_{\text{rég}}$	$[2\mathrm{I}_{d_1}-0]$	(d_1)
	1	singulier	$[\mathrm{II}_{d_1/2-d_2/2}]$	$(d_1) \times (2)$ si $8 \mid (d_1 d_2 - 4)$
				$(2d_1)$ sinon
4			$[\mathrm{III}_{d_1/2}]$	$H_{d_1/2}$

Table 2.3. On suppose que $\mathscr{C}_s$ est réunion de deux droites projectives se coupant transversalement en trois points, L modérément ramifiée sur K. Si $n = 3$ ou 6, on a $d_1 = d_2 = d_3$. Si $n = 2$ et $r = 1$, deux des d_i sont égaux. On note e_1 cette valeur et e_2 la valeur du troisième degré d_j. Posons $g = d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3$, $h = \mathrm{pgcd}(d_1, d_2, d_3)$.

Les types de $\mathscr{X}$ sont décrits dans [N, U], pp. 182–184.

n	$\bar{r} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\bar{q} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathscr{X}$	Φ
1			$[\mathrm{I}_{d_1-d_2-d_3}]$	$(h) \times (h^{-1}g)$
2	0		$[\mathrm{I}^*_{d_1/2-d_2/2-d_3/2}]$	$H_{g/4} \times H_{\mathrm{pgcd}(2,h/2)}$
	1	0	$[\mathrm{II}^*_{e_1/2-e_2}]$	(e_2)
	1	1	$[\mathrm{II}_{e_1/2-e_2}]$	$(2e_1+e_2)$
3			$[\mathrm{III}_{d_1}]$	$(3)^2$ si $3 \mid d_1$
				(9) sinon
6			$[\mathrm{III}^*_{d_1/2}]$	0

Remarque. Les types $[\mathrm{II}_{k-l}]$ et $[\mathrm{III}_m]$ dans la table 2.2 ne sont pas les mêmes que ceux de la table 2.3. Nous renvoyons à [N, U] pour leurs descriptions détaillées.

Table 3.1. On suppose que $\mathscr{C}_s$ est réunion de deux courbes elliptiques et que $2 \mid v(J_2)$. L'entier $d = nd_K$ est défini dans (4.3). Dans les tables qui suivent, la notation $[() - () - (-1)]$ correspond à $[() - () - \alpha]$ dans [N, U]. Par exemple pour $n = 6$, $d = 1$, et $\bar{r} = 3$, $\mathscr{X}$ est de type $[\mathrm{I}_0^* - \mathrm{IV}^* - \alpha]$. Les types de $\mathscr{X}$ dans la table ci-dessous se trouvent dans [N, U], pp. 158–169.

Signalons une erreur typographique dans la figure du type $[\mathrm{IV} - \mathrm{III}^* - (-1)]$ ([N, U], page 167). La composante qui rencontre les deux composantes B est de multiplicité 3.

n	$\bar{d} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\bar{r} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathscr{X}$	Φ
1			$[\mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_0 - d]$	0
2	0		$[\mathrm{I}_0^* - \mathrm{I}_0^* - (d-2)/2]$	$(2)^4$
	1		$[\mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_0^* - (d-1)/2]$	$(2)^2$
3	0		$[\mathrm{IV} - \mathrm{IV}^* - (d-3)/3]$	$(3)^2$
	1	0 ou 1	$[\mathrm{I}_0 - \mathrm{IV} - (d-1)/3]$	(3)
		2	$[\mathrm{IV}^* - \mathrm{IV}^* - (d-4)/3]$	$(3)^2$
	2	0 ou 2	$[\mathrm{I}_0 - \mathrm{IV}^* - (d-2)/3]$	(3)
		1	$[\mathrm{IV} - \mathrm{IV} - (d-2)/3]$	$(3)^2$
4	0		$[\mathrm{III} - \mathrm{III}^* - (d-4)/4]$	$(2)^2$
	1	0 ou 1	$[\mathrm{I}_0 - \mathrm{III} - (d-1)/4)$	(2)
		2 ou 3	$[\mathrm{I}_0^* - \mathrm{III}^* - (d-5)/4]$	$(2)^3$
	2	1	$[\mathrm{III} - \mathrm{III} - (d-2)/4]$	$(2)^2$
		3	$[\mathrm{III}^* - \mathrm{III}^* - (d-6)/4]$	$(2)^2$

4	3	0 ou 3	$[\mathrm{I}_0 - \mathrm{III}^* - (d-3)/4]$	(2)
		1 ou 2	$[\mathrm{I}_0^* - \mathrm{III} - (d-3)/4]$	$(2)^3$
6	0		$[\mathrm{II} - \mathrm{II}^* - (d-6)/6]$	0
	1	0 ou 1	$[\mathrm{I}_0 - \mathrm{II} - (d-1)/6]$	0
		2 ou 5	$[\mathrm{II}^* - \mathrm{IV} - (d-7)/6]$	(3)
		3 ou 4	$[\mathrm{I}_0^* - \mathrm{IV}^* - (d-7)/6]$	$(2)^2 \times (3)$
	2	1	$[\mathrm{II} - \mathrm{II} - (d-2)/6]$	0
		3 ou 5	$[\mathrm{I}_0^* - \mathrm{II}^* - (d-8)/6]$	$(2)^2$
	3	1 ou 2	$[\mathrm{II} - \mathrm{IV} - (d-3)/6]$	(3)
		4 ou 5	$[\mathrm{II}^* - \mathrm{IV}^* - (d-9)/6]$	
	4	1 ou 3	$[\mathrm{I}_0^* - \mathrm{II} - (d-4)/6]$	$(2)^2$
		5	$[\mathrm{II}^* - \mathrm{II}^* - (d-10)/6]$	0
	5	0 ou 5	$[\mathrm{I}_0 - \mathrm{II}^* - (d-5)/6]$	0
		1 ou 4	$[\mathrm{II} - \mathrm{IV}^* - (d-5)/6]$	(3)
		2 ou 3	$[\mathrm{I}_0^* - \mathrm{IV} - (d-5)/6]$	$(2)^2 \times (3)$
12	1	3 ou 10	$[\mathrm{II}^* - \mathrm{III} - (d-13)/12]$	(2)
		4 ou 9	$[\mathrm{IV} - \mathrm{III}^* - (d-13)/12]$	(6)
	5	2 ou 3	$[\mathrm{II} - \mathrm{III} - (d-5)/12]$	(2)
		8 ou 9	$[\mathrm{IV}^* - \mathrm{III}^* - (d-17)/12]$	(6)
	7	3 ou 4	$[\mathrm{IV} - \mathrm{III} - (d-7)/12]$	(6)
		9 ou 10	$[\mathrm{II}^* - \mathrm{III}^* - (d-19)/12]$	(2)
	11	3 ou 8	$[\mathrm{IV}^* - \mathrm{III} - (d-11)/12]$	(6)
		2 ou 9	$[\mathrm{II} - \mathrm{III}^* - (d-11)/12]$	(2)

Table 3.2. On suppose que $\mathscr{C}_s$ est réunion de deux courbes elliptiques se coupant en un point et que $2 \nmid v(J_2)$. Les entiers m, $n = 2m$, et r sont définis dans (4.3), corollaire. Notons que dans [N, U], le degré $d\,(= 2r)$ de $\mathscr{X}$ est la moitié de la valeur correcte dans cette situation excepté pour $[2\,\mathrm{I}_0 - (r-1)]$. D'autre part, dans la configuration du type $[2\,\mathrm{IV} - q]$, les trois composantes qui rencontrent la composante B sont de multiplicité 2. Les types de $\mathscr{X}$ dans cette table se trouvent dans [N, U], pp. 159–168.

n	$\bar{r} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	$\mathscr{X}$	Φ
2		$[2\mathrm{I}_0 - (r-1)]$	0
4		$[2\mathrm{I}_0^* - (r-1)/2]$	$(2)^2$
6	1	$[2\mathrm{IV} - (r-1)/3]$	(3)
	2	$[2\mathrm{IV}^* - (r-2)/3]$	
8	1	$[2\mathrm{III} - (r-1)/4]$	(2)
	3	$[2\mathrm{III}^* - (r-3)/4]$	
12	1	$[2\mathrm{II} - (r-1)/6]$	0
	5	$[2\mathrm{II}^* - (r-5)/6]$	

Table 3.3. On suppose que $\mathscr{C}_s$ est réunion de deux courbes rationnelles se coupant en un point unique. Si $n = 2$, $2 \mid v(J_2)$ et d est impair, alors e_1 et e_2 sont des entiers vérifiant $\{e_1, e_2\} = \{d_1, d_2\}$. Si $2 \nmid v(J_2)$, on a $d_1 = d_2$. Les types de $\mathscr{X}$ dans la table ci-dessous se trouvent dans [N, U], pp. 179–181.

n	$v(J_2)$	$\bar{d} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathscr{X}$	Φ
1			$[\mathrm{I}_{d_1} - \mathrm{I}_{d_2} - d]$	$(d_1) \times (d_2)$
2	$\in 2\mathbb{Z}$	0	$[\mathrm{I}^*_{d_1/2} - \mathrm{I}^*_{d_2/2} - (d-2)/2]$	$H_{d_1/2} \times H_{d_2/2}$
		1	$[\mathrm{I}_{e_1/2} - \mathrm{I}^*_{e_2/2} - (d-1)/2]$	$(e_1/2) \times H_{e_2/2}$
	$\notin 2\mathbb{Z}$		$[2\mathrm{I}_{d_1} - d/2]$	(d_1)
4	$\notin 2\mathbb{Z}$		$[2\mathrm{I}^*_{d_1/2} - (d-2)/4]$	$H_{d_1/2}$

Table 3.4. On suppose que $\mathscr{C}_s$ est réunion d'une courbe elliptique et d'une courbe rationnelle. Les types de $\mathscr{X}$ dans la table ci-dessous se trouvent dans [N, U], pp. 170–177. Comme il est signalé dans [Vi-2], pour le type $[\mathrm{III}^* - \mathrm{I}_q^* - (-1)]$ ([N, U], page 177), il faut ajouter à $\mathscr{X}_s$ une composante $\mathbb{P}_k^1$ de self-intersection -2 et passant par la composante $2B$ de $\mathscr{X}_s$.

n	$\bar{d}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\bar{r}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathscr{X}$	Φ
1			$[\mathrm{I}_{d_1} - \mathrm{I}_0 - d]$	(q)
2	0		$[\mathrm{I}_0^* - \mathrm{I}_{d_1}^* - (d-2)/2]$	$(2)^2 \times H_q$
	1		voir (4.4)	
3	1		$[\mathrm{IV} - \mathrm{I}_{d_1} - (d-1)/3]$	$(3) \times (q)$
	2		$[\mathrm{IV}^* - \mathrm{I}_{d_1} - (d-2)/3]$	
4	1	0 ou 1	$[\mathrm{III} - \mathrm{I}_{d_1} - (d-1)/4]$	$(2) \times (q)$
		2 ou 3	$[\mathrm{III}^* - \mathrm{I}_{d_1}^* - (d-5)/4]$	$(2) \times H_q$
	3	0 ou 3	$[\mathrm{III}^* - \mathrm{I}_{d_1} - (d-3)/4]$	$(2) \times (q)$
		1 ou 2	$[\mathrm{III} - \mathrm{I}_{d_1}^* - (d-3)/4]$	$(2) \times H_q$
6	1	0 ou 1	$[\mathrm{II} - \mathrm{I}_{d_1} - (d-1)/6]$	(q)
		3 ou 4	$[\mathrm{IV}^* - \mathrm{I}_{d_1}^* - (d-7)/6]$	$(3) \times H_q$
	2		$[\mathrm{II}^* - \mathrm{I}_{d_1}^* - (d-8)/6]$	H_q
	4		$[\mathrm{II} - \mathrm{I}_{d_1}^* - (d-4)/6]$	
	5	0 ou 5	$[\mathrm{II}^* - \mathrm{I}_{d_1} - (d-5)/6]$	(q)
		2 ou 3	$[\mathrm{IV} - \mathrm{I}_{d_1}^* - (d-5)/6]$	$(3) \times H_q$

Références bibliographiques

[B, L, R] *S. Bosch, W. Lütkebohmert*, et *M. Raynaud*, Néron Models, Springer-Verlag, 1990.

[Ch] *T. Chinburg*, Minimal models for curves over Dedekind rings, in: Arithmetic geometry, Cornell and Silverman (editors), Springer-Verlag, 1986.

[De] *M. Deschamps*, Réduction semi-stable, in: Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux, Astérisque **86** (1981), 1–34.

[Ig] *J.I. Igusa*, Arithmetic variety of moduli for genus two, Ann. Math. **72** (1960), 612–649.

[Li] *Q. Liu*, Courbes stables de genre 2 et leur schéma de modules, Math. Ann. **295** (1993), 201–222.

[Lo-1] *D. Lorenzini*, Arithmetical graphs, Math. Ann. **285** (1989), 481–501.

[Lo-2] *D. Lorenzini*, On the group of components of a Néron model, preprint (1992).

[Me] *J.-F. Mestre*, Construction de courbes de genre 2 à partir de leurs modules, in: Effective Methods in Algebraic Geometry, Progr. Math. **94**, Birkhäuser, 1990.

[N, U] *Y. Namikawa* and *K. Ueno*, The complete classification of fibers in pencils of curves of genus two, Manuscr. Math. **9** (1973), 143–186.

[Og] *A.P. Ogg*, On pencils of curves of genus two, Topology **5** (1966), 355–362.

[Ta] *J. Tate*, Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil, Lect. Notes Math. **476**, Springer-Verlag, 1975.

[Vi-1] *E. Viehweg*, Invarianten der degenerierten Fasern in lokalen Familien von Kurven, J. reine angew. Math. **293** (1977), 284–308.

[Vi-2] *E. Viehweg*, Invarianten der degenerierten Fasern in lokalen Familien von Kurven, Dissertation, Mannheim 1975.

Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux, Université de Bordeaux I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France

e-mail : liu@ceremab.u-bordeaux.fr

Eingegangen 26. Oktober 1992, in revidierter Fassung 15. September 1993