TOUT GROUPE FINI EST UN GROUPE DE GALOIS SUR $\mathbb{Q}_p(T)$, D'APRÈS HARBATER

Qing Liu

Abstract. In [Ha1], D. Harbater proved the theorem mentioned in the title above using formal schemes and Grothendieck's Existence Theorem. This proof is presented here from the rigid analytic point of view.

Lors d'un passage à Bordeaux en 1990, J.-P. Serre nous a signalé le théorème d'Harbater [Ha1] énoncé dans le titre ci-dessus, et a esquissé brièvement une vision analytique rigide de la preuve d'Harbater (voir aussi [Se], 8.4.4). La présente note donne les détails de la preuve du point de vue analytique rigide. Une première version de cette note a d'abord circulé sous forme de note privée. Elle a été utilisée ou citée dans un certain nombre de travaux récents, dont par exemple Dèbes [De], Jarden [Ja] ou Pop [Po]. Il nous a semblé intéressant de la mettre à la disposition d'un public plus large. La technique de recollement (lemme 3), dans la situation élémentaire ici, peut aussi servir d'introduction à une partie de la preuve par Raynaud de la conjecture d'Abhyankar [Ra] pour la droite affine.

Harbater [Ha1] utilise le language des schémas formels et la technique de "formal patching", qui a fait ses preuves depuis dans de nombreuses situations (voir [Ha2] et [Ha3]). L'emploi de la géométrie analytique rigide nous permet d'avoir une vision peut-être plus intuitive. Cependant, les idées essentielles sont contenues dans [Ha1]. Tous les ingrédients utilisés ici sont relativement élémentaires, sauf peut-être le principe GAGA rigide.

Nous remercions D. Harbater et M. Matignon pour les nombreux commentaires qui ont permis d'améliorer la présentation de cette version, et Jean-Pierre Serre pour la conversation à l'origine de cette note.

Définition. Soit Y une courbe projective lisse géométriquement connexe sur un corps K, un *revêtement galoisien de Y de groupe de Galois G* est un morphisme fini $f : X \to Y$ d'une courbe projective lisse géométriquement connexe X sur K, qui induit une extension galoisienne des corps de fonctions $K(Y) \to K(X)$ de groupe de Galois G.

Lemme 1. *Soient K un corps, p un nombre premier, G un groupe cyclique d'ordre $q = p^n$. Alors il existe un revêtement galoisien $f : X \to \mathbb{P}^1_K$ de groupe de Galois G avec un point $x_0 \in X(K)$ non-ramifié pour f.*

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 12F12, 14G20 ; Secondary 13B05, 11G20.
This paper is in final form, and no version of it will be submitted for publication elsewhere

Preuve. Il est bien connu que l'on peut réaliser tout groupe abélien comme groupe de Galois de $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ ([Se], 4.2). Mais nous ne savons pas s'il existe un point rationnel de X non-ramifié. La construction suivante permet de l'affirmer. Pour simplifier, on supposera que p est différent de la caractéristique de K (sinon, on utilise la théorie d'Artin-Schreier, voir [Ha1], page 183).

Soit ξ_q une racine primitive q-ième de l'unité dans une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Si $\xi_q \in K$, on peut prendre $X = \mathbb{P}^1_K$ et f défini par l'inclusion $K(t) \subset K(t, y)$, $y^q = t$.

Dans le cas général, posons $K' = K(\xi_q)$. Supposons d'abord K'/K cyclique. Soient $s = |\operatorname{Gal}(K'/K)|$, $\tau : \xi_q \to \xi_q^m$ un générateur du groupe $\operatorname{Gal}(K'/K)$, et $k = (m^s - 1)/q$. Soit $b := 1 + \xi_q t \in K'(t)$, posons

$$L' := K'(t)[Y]/(Y^q - M_\tau(b)) \;=\; K'(t)[y]$$

où $M_\tau(b) = b^{m^{s-1}}\tau(b)^{m^{s-2}} \cdots \tau^{s-2}(b)^m \tau^{s-1}(b)$. Alors L' est un corps, extension cyclique de $K'(t)$ de groupe de Galois engendré par $\sigma : y \to \xi_q y$. On prolonge τ en un $K(t)$-automorphisme $\tilde{\tau}$ de L' par $\tilde{\tau}(y) = b^{-k}y^m$. Alors $\tilde{\tau}\sigma = \sigma\tilde{\tau}$, L' est une extension galoisienne de $K(t)$, $\operatorname{Gal}(L'/K(t)) = \langle \sigma, \tilde{\tau} \rangle$, et $L := L'^{\langle \tilde{\tau} \rangle}$ est une extension cyclique de $K(t)$ de groupe de Galois $\langle \sigma \rangle = G$ ([Sa], theorem 2.3, partie facile). De plus $\overline{K} \cap L = \overline{K} \cap L' \cap L = K' \cap L = K$, donc L est une extension régulière de $K(t)$, cela correspond donc à un revêtement galoisien $f : X \to \mathbb{P}^1_K$ de groupe de Galois G. Soit $f' : X' \to \mathbb{P}^1_{K'}$ le revêtement associé à l'extension $K'(t) \hookrightarrow L'$. On a $f' = f \times \operatorname{Id}_{K'}$.

Montrons l'existence d'un point de $X(K)$ non-ramifié pour f. L'équation $Y^q = M_\tau(b)$ définit une courbe sur K', lisse au point $x_0' := (t = 0,\ y = 1)$. C'est un point de $X'(K')$, non-ramifié pour f', et invariant par $\tilde{\tau}$. Donc son image x_0 dans X est rationnel sur K et non-ramifié pour f.

Maintenant si K'/K n'est pas cyclique (donc $p = 2$). Alors $\operatorname{Gal}(K'/K)$ est engendré par deux éléments ρ et τ, avec ρ d'ordre 2. En considérant l'extension

$$L' := K'(t)[Y]/(Y^q - M_\tau(\rho(b)/b))$$

on démontre le résultat de la même façon. $\square$

Dans toute la suite, K sera un corps *complet* pour une valeur absolue *non-archimédienne.* Toute variété algébrique séparée sur K est canoniquement munie d'une structure d'espace analytique rigide sur K ([F, P], III.4.6, voir le même livre pour une introduction à la géométrie analytique rigide). La structure analytique rigide sur $\mathbb{P}^1_K$ est particulièrement simple et est très intuitive (*op.cit.*, Chap. 1).

Définition. Soit t une fonction rationnelle qui engendre le corps de fonctions $K(\mathbb{P}^1_K)$. On appelle *disque ouvert de* $\mathbb{P}^1_K$ tout sous-ensemble de $\mathbb{P}^1_K$ de la forme

$$D = \{\, x \in \mathbb{P}^1_K \mid |t(x) - a| < |b| \,\}$$

ou

$$D = \{\, x \in \mathbb{P}^1_K \mid |t(x) - a| > |b| \,\}$$

où $a,\ b \in K$, et $|t(x)| := \infty$ si x est le pôle de t. Le *disque fermé associé à un disque ouvert* D est l'ensemble où on remplace $<$ par $\leq$, il sera noté $\overline{D}$.

Lemme 2. *Soient $f : X \to \mathbb{P}^1_K$ un revêtement galoisien de degré n, $x_0 \in X(K)$ non ramifié pour f. Notons $y_0 = f(x_0)$. Alors il existe un disque ouvert $D \subset \mathbb{P}^1_K$, de centre y_0, tel que*
(1) $f^{-1}(\overline{D})$ soit isomorphe à la réunion disjointe de n copies de $\overline{D}$ et
(2) $f^{-1}(\mathbb{P}^1_K \setminus D)$ soit connexe.

Preuve. Le fait que f soit galoisien implique que $f^{-1}(y_0)$ est constitué de n points rationnels $x_0, \ldots, x_{n-1}$ non-ramifiés. Par la version analytique rigide du théorème des fonctions implicites, on voit que pour $\overline{D}$ assez petit contenant y_0, la propriété (1) est vraie.

Soit $\overline{D}$ comme dans (1). Soient $\overline{D}_0, \ldots, \overline{D}_{n-1}$ les composantes connexes (analytiques rigides) de $f^{-1}(\overline{D})$, on a donc $\overline{D}_i \simeq \overline{D}$. Posons $D_i = f^{-1}(D) \cap \overline{D}_i \simeq D$. Soit ϕ une fonction holomorphe et idempotente sur $f^{-1}(\mathbb{P}^1_K \setminus D) = X \setminus (\cup_i D_i)$. Comme ϕ est constante sur $\overline{D}_i \setminus D_i$ (ce dernier est connexe), elle s'étend en une fonction constante sur $\overline{D}_i$. Donc ϕ s'étend en une fonction holomorphe idempotente sur X, ce qui implique que ϕ est constante. Donc $f^{-1}(\mathbb{P}^1_K \setminus D)$ est connexe. $\square$

Remarque. Soient R l'anneau des entiers de K et k le corps résiduel. Soit $f : X \to \mathbb{P}^1_K$ un revêtement galoisien. En utilisant le lemme ci-dessus, on peut voir que $X(K) \neq \emptyset$ (et donc il existe un point de $X(K)$ non-ramifié pour f car $X(K)$ est alors infini) si et seulement si f s'étend en un revêtement galoisien de modèles $\mathcal{X} \to \mathbb{P}^1_R$ sur R tel que la fibre spéciale $\mathcal{X}_k \to \mathbb{P}^1_k$ soit un “mock cover” au sens d'Harbater [Ha1].

Notation. Soient X un espace analytique connexe, Λ un ensemble. On note X_Λ l'espace analytique qui est la réunion disjointe des copies de X, indexée par Λ. La composante connexe de X_Λ indexée par $\lambda \in \Lambda$ sera notée X_λ.

Lemme 3. *Soient G un groupe fini engendré par deux sous-groupes H_1, H_2. On suppose qu'il existe pour chaque $i = 1, 2$, un revêtement galoisien $\pi_i : X_i \to \mathbb{P}^1_K$ de groupe de Galois H_i, avec un point $x_i \in X_i(K)$ non-ramifié pour π_i. Alors il existe un revêtement galoisien $X \to \mathbb{P}^1_K$ de groupe de Galois G, avec un point de $X(K)$ non-ramifié pour f.*

Preuve. Construction de X. Soit $D_i' \ni \pi_i(x_i)$ un disque ouvert assez petit comme dans le lemme 2. Soit $D_i := \mathbb{P}^1_K \setminus \overline{D}_i'$. Alors $\overline{D}_i = \mathbb{P}^1_K \setminus D_i'$ est un disque fermé contenant le lieu de ramification de π_i, et on a $\pi_i^{-1}(\mathbb{P}^1_K \setminus D_i) \simeq (\mathbb{P}^1_K \setminus D_i)_{H_i}$ et $\pi_i^{-1}(\overline{D}_i)$ connexe. Par translation dans $\mathbb{P}^1_K$, on peut supposer que $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 = \emptyset$.

Notons $H_i \backslash G := \{gH_i\}_{g \in G}$ le quotient à gauche de G par H_i. Soient $U_0 = (\mathbb{P}^1_K \setminus (D_1 \cup D_2))_G$, $U_1 = \pi_1^{-1}(\overline{D}_1)_{H_1 \backslash G}$, $U_2 = \pi_2^{-1}(\overline{D}_2)_{H_2 \backslash G}$. On fixe un système de représentants S_i des classes de $H_i \backslash G$, on suppose que l'élément neutre e de G appartient à S_1 et S_2. Pour tout $x \in S_i$, soit $U_{i,x}$ la composante connexe de U_i indexée par x. Alors on a

$$U_{i,x} = \pi_i^{-1}(\overline{D}_i)_x \supset \pi_i^{-1}(\overline{D}_i \setminus D_i)_x \simeq (\overline{D}_i \setminus D_i)_{H_i}$$

Fixons une composante connexe $U_{i,x,e}$ de $\pi_i^{-1}(\overline{D}_i \setminus D_i)_x$. Pour tout $h \in H_i$, notons $U_{i,x,h}$ la composante connexe $h(U_{i,x,e})$ de $\pi_i^{-1}(\overline{D}_i \setminus D_i)_x$ (rappelons que H_i agit sur $X_i \supset \pi_i^{-1}(\overline{D}_i \setminus D_i)$).

On définit le recollement des espaces U_0, U_1, U_2 de la manière suivante: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$; pour tout $x \in S_i$ et tout $h \in H_i$, on identifie la composante connexe $U_{i,x,h}$ ($\simeq (\overline{D}_i \setminus D_i)$) de $\pi_i^{-1}(\overline{D}_i \setminus D_i)_x \subset \pi_i^{-1}(\overline{D}_i)_x \subset U_i$ à l'ouvert $(\overline{D}_i \setminus D_i) \subset U_{0,xh} \subset U_0$.

Soit X l'espace analytique rigide obtenu par ce recollement. On identifie canoniquement U_0, U_1, U_2 à des ouverts de X. On obtient alors un revêtement $\pi : X \to \mathbb{P}^1_K$. On a

$$\pi^{-1}(\mathbb{P}^1_K \setminus (D_1 \cup D_2)) = U_0, \quad \pi^{-1}(\overline{D}_1) = U_1, \quad \pi^{-1}(\overline{D}_2) = U_2$$

Donc π est un morphisme analytique fini, il suit du principe GAGA de Serre [Kö] que X est une courbe algébrique sur K.

Connexité de X. Soit F la composante connexe de X contenant $U_{0,e}$, montrons que $U_0 \subset F$. Soit $g \in G$. Si $g \in H_1 \cup H_2$, par exemple si $g \in H_1$, alors $U_{0,g} \cap U_{1,e} = U_{1,e,g} \neq \emptyset$, $U_{0,e} \cap U_{1,e} = U_{1,e,e} \neq \emptyset$. Comme ces ouverts sont tous connexes, on a $U_{0,g} \subset F$. Plus généralement comme $H_1 \cup H_2$ engendre G, on a $g = t_n \cdots t_2 t_1$, $t_i \in H_1 \cup H_2$. Posons $f = t_n \cdots t_2$ et supposons par exemple que $t_1 \in H_1$. On a $f = xh$ avec $h \in H_1$, $x \in S_1$, donc $g = x(ht_1)$. Par conséquent $U_{0,g}$ et $U_{0,f}$ rencontrent tous les deux $U_{1,x}$, elles sont donc contenues dans la même composante connexe de X. Une récurrence sur n montre alors que $U_0 \subset F$. D'autre part, $U_{i,x}$ rencontre $U_{0,x} \subset F$, donc $U_{i,x} \subset F$ et $X = F$, ce qui veut dire que X est connexe. C'est donc une courbe projective lisse et connexe sur K.

L'action de G sur X. Soit $g \in G$. On définit l'action de G de la façon suivante. Sur $\pi^{-1}(\mathbb{P}^1_K \setminus (D_1 \cup D_2)) = U_0$, g permute les composantes connexes de U_0 : $g(U_{0,g'}) = U_{0,gg'}$. Sur $\pi^{-1}(\mathbb{P}^1_K \setminus D_i) = U_i$: soit $x \in S_i$, on a $gx = yh$ avec $h \in H_i$, $y \in S_i$. Alors l'action de g est la composée de

$$U_{i,x} \xrightarrow{\mathrm{Id}} U_{i,y} \xrightarrow{h} U_{i,y}$$

(rappelons que H_i agit sur $U_{i,y} = \pi_i^{-1}(\overline{D}_i)$ par hypothèse). Il est aisé de vérifier que cette action est bien définie (*i.e.* compatible sur l'intersection $U_0 \cap U_i$). Donc $\pi : X \to \mathbb{P}^1_K$ est un revêtement galoisien, de groupe de Galois G. Enfin, $\pi^{-1}(\mathbb{P}^1_K \setminus (D_1 \cup D_2)) = U_0 = (\mathbb{P}^1_K \setminus (D_1 \cup D_2))_G$ implique qu'il existe un point (en fait une infinité) de $X(K)$ non-ramifié pour π. $\square$

Théorème ([Ha1], 2.3). *Soient K un corps complet pour une valeur absolue non-archimédienne, G un groupe fini. Alors G est le groupe de Galois d'un revêtement $X \to \mathbb{P}^1_K$.*

Preuve. On fait une récurrence sur le nombre de générateurs de G en utilisant les lemmes 1 et 3. $\square$

Corollaire. *Soient p un nombre premier, G un groupe fini. Alors G est le groupe de Galois d'une extension régulière galoisienne de $\mathbb{Q}_p(T)$.*

Références

[De] P. Dèbes, *G-covers of $\mathbb{P}^1$ over the p-adics*, ce volume.

[F, P] J. Fresnel et M. van der Put, *Géométrie Analytique Rigide et Applications*, Prog. in Math., **18,** Birkhäuser (1981).

[Ha1] D. Harbater, *Galois Coverings of the Arithmetic Line*, L. N. in Math. **1240** (1987), 165-195.

[Ha2] D. Harbater, *Abhyankar's Conjecture on Galois Groups over Curves*, Invent. Math. **117** (1994), 1-25.

[Ha3] D. Harbater, *Fundamental Groups of Curves in Characteristic p*, Intern. Congress of Math., Zürich, 1994.

[Ja] M. Jarden, *The Inverse Galois Problem over Formal Power Series Fields*, Israel Journal of Mathematics **85** (1994), 263-274.

[Kö] U. Köpf, *Über eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Räumen*, Schriftenreihe des Math. Inst. Univ. Münster, serie 2, Heft **7** (1974).

[Po] F. Pop, $\frac{1}{2}$*Riemann Existence Theorem with Galois Action*, in Algebra and Number Theory, ed. G. Frey-J. Ritter (1994), de Gruyter Proceedings in Math., Berlin, New York.

[Ra] M. Raynaud, *Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar*, Invent. Math. **116** (1994), 425-462.

[Sa] D. Saltman, *Generic Galois Extension and Problems in Field Theory*, Adv. Math. **43** (1982), 250-283.

[Se] J.-P. Serre, *Topics in Galois Theory*, Research Notes in Math., **1,** Jones and Bartlett Publishers, Boston-London, 1992.

Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux, Université de Bordeaux I, 351, Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France

E-mail address: liu@ceremab.u-bordeaux.fr