Problème 1 : sommes de Riemann.

Dans ce problème, on suppose introduite à l'aide des fonctions en escalier la notion d'intégrale au sens de Riemann d'une fonction.

Partie A : convergence des sommes de Riemann

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et on considère les sommes de Riemann :

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{et} \quad R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Dans un premier temps, on se propose de démontrer que les suites $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et de même limite $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans un deuxième temps, on cherche à obtenir une majoration de $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)S_n(f)\right|$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

2. Soit ε un réel strictement positif.

   2.1. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall t \in [x_k, x_{k+1}], |f(t) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

   2.2. En déduire que :

$$\forall n \geq N, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

   puis que :

$$\forall n \geq N, \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)S_n(f)\right| \leq \varepsilon.$$

3. En déduire que $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, convergent vers $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. *Application*

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$.

   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln 2$.

5. Dans cette question, on suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

   5.1. Démontrer qu'il existe un réel M tel que : $\forall t \in [a, b], |f'(t)| \leq M$.

   5.2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall t \in [x_k, x_{k+1}], |f(t) - f(x_k)| \leq M(t - x_k)$.

5.3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) \, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n^2}$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t - (b-a) S_n(f) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

6. *Application : calcul d'une valeur approchée de* $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ *par la méthode des rectangles.*

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$.

6.1. Déterminer un réel M tel que $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq M$.

6.2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant les résultats obtenus dans la question 5, écrire un algorithme qui calcule une valeur approchée à ε près de $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.

Partie B : application à l'étude de suites

Soit f une fonction définie sur $]0, 1]$, continue et décroissante sur $]0, 1]$.
On considère la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et la fonction I définie sur $]0, 1]$ par : $\forall x \in]0, 1]$, $I(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t) \, \mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. En additionnant les inégalités précédentes, démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) \leq r_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. On suppose, de plus, que $\displaystyle\lim_{x \to 0} I(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$) et $\displaystyle\lim_{x \to 0} x f(x) = 0$. Démontrer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

4. Dans cette question, on pose $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4} - \dfrac{1}{2} \ln x$, pour tout réel $x \in]0, 1]$.

4.1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2n} \ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$.

On rappelle que la somme des carrés des n premiers entiers naturels est égale à $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4.2. En utilisant les questions précédentes, démontrer que la suite $\left(\dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite. *On rappelle que la fonction* $x \longmapsto x \ln x - x$ *est une primitive de la fonction* $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Partie C : une suite d'intégrales

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |sin(nx)| \, \mathrm{d}x = \frac{2}{n}.$$

2. Soit f une fonction continue et croissante sur $[0, \pi]$.
   2.1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{2}{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|sin(nx)| \, \mathrm{d}x \leq \frac{2}{n} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

   2.2. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^\pi f(x)|sin(nx)| \, \mathrm{d}x$.

   2.3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi f(x)|sin(nx)| \, \mathrm{d}x$.

   2.4. Obtiendrait-on le même résultat pour une fonction f continue et décroissante sur $[0, \pi]$?

Partie D : une application aux probabilités

1. Pour tout couple d'entiers naturels (k, m), on pose $I_{k,m} = \displaystyle\int_0^1 x^k (1-x)^m \, \mathrm{d}x$.
   1.1. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}, I_{k,m} = \dfrac{k}{m+1} I_{k-1,m+1}$.
   1.2. Pour tout couple d'entiers naturels (k, m), déterminer $I_{0,k+m}$ et en déduire une expression de $I_{k,m}$ en fonction des entiers k et m.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$.
   Une urne contient des boules rouges et des boules blanches. La proportion de boules rouges dans cette urne est p. On réalise dans cette urne n tirages indépendants d'une boule avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
   Déterminer la loi de probabilité de X, puis donner l'espérance de X.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$.
   On dispose de N urnes U_1, ..., U_N contenant des boules rouges et des boules blanches et telles que, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, la proportion de boules rouges dans U_j est $\dfrac{j}{N}$.
   On choisit une urne au hasard et on effectue dans cette urne n tirages indépendants d'une boule avec remise. On note X_N la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
   3.1. Pour tout entier naturel k, on note $p_N(k)$ la probabilité que X_N prenne la valeur k.
   Démontrer que : $p_N(k) = \displaystyle\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}$.
   3.2. Calculer l'espérance de X_N. Quelle est la limite de cette espérance quand N tend vers $+\infty$?
   3.3. En utilisant le résultat obtenu dans la première question, déterminer $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} p_N(k)$.
   Que peut-on en déduire pour la suite de variables aléatoires $(X_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$?

Problème 2 : fonction exponentielle, évolution d'une population

On établit dans la partie A l'existence d'une unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$ et on étudie dans la partie B un exemple d'équation différentielle.
Dans la partie A, les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmes sont supposées ne pas être connues.

Partie A : la fonction exponentielle

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle (E) : $y' = y$, avec la condition $y(0) = 1$.

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe une fonction f dérivable, solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$.
   1.1. Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$.
   1.2. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   1.3. Démontrer que si g est une fonction dérivable solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$, alors $g = f$.
   On pourra considérer la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.
   1.4. Démontrer que : $\forall\,(a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a + b) = f(a) \times f(b)$.
   On pourra fixer un réel a et considérer la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{f(a + x)}{f(a)}$.
   1.5. Déduire des résultats précédents que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
2. On va dans cette question établir l'existence d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de (E) telle que $f(0) = 1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout entier $n > |x|$:
$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}.$$
   On va montrer que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes.
   2.1. Justifier que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont bien définies pour $n > |x|$.
   2.2. Établir par récurrence l'inégalité de Bernoulli :
$$\forall\, a \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + a)^n \geqslant 1 + na$$
   2.3. Soit n un entier tel que $n > |x|$.
      i. Démontrer que : $u_{n+1}(x) = u_n(x) \times \left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \times \left(\dfrac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1}$.
      ii. En utilisant l'inégalité de Bernoulli, démontrer que : $\left(\dfrac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geqslant \dfrac{1}{1 + \frac{x}{n}}$.
      iii. En déduire que la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante.
   2.4. Démontrer que la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante.
   2.5. Soit n un entier tel que $n > |x|$.
      i. Démontrer que : $v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right)$.
      ii. En déduire que : $v_n(x) - u_n(x) \geqslant 0$.

iii. En utilisant l'inégalité de Bernoulli, démontrer que : $v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x) \times \dfrac{x^2}{n}$.

2.6. Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la limite de la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$. Conclure.

2.7. On désigne par f la fonction qui à tout réel x associe $f(x)$, limite commune des suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$. On va démontrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) et vérifie $f(0) = 1$.

i. Démontrer que : $f(0) = 1$.
Dans les deux questions suivantes, on considère un réel x_0.

ii. On admet que : $\forall\,(a,k) \in \mathbb{R}^2,\ f(a+k) - f(a) \geqslant kf(a)$.
En utilisant cette relation, établir que :

$$\forall\, h \in]-1,1[,\ h\,f(x_0) \leqslant f(x_0+h) - f(x_0) \leqslant \frac{h}{1-h} f(x_0)\,.$$

iii. En déduire que f est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$. Conclure.

Partie B : évolution d'une population

Pour étudier l'évolution d'une population de poissons au cours du temps, on utilise le modèle suivant. On admet que la fonction N, représentant le nombre de poissons en fonction du temps t (exprimé en années) vérifie les conditions suivantes :

– N est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

où r et K sont des constantes réelles strictement positives ;
– $N(0) = N_0$, avec $0 < N_0 < K$;
– N est définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 ;
– si g est une solution de (E) définie sur un intervalle J contenant 0 et vérifiant $g(0) = N_0$, alors J est inclus dans I.

1. Quel théorème permet de garantir l'existence et l'unicité de la fonction N ?

   On admet que I contient $[0, +\infty[$, et que pour tout réel $t \in I$, $0 < N(t) < K$.

2. *Étude qualitative*

   2.1. Démontrer que N est strictement croissante sur I.

   2.2. En déduire que N admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

   2.3. Démontrer que $\ell = K$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

3. *Détermination d'une expression de N*

   On pose, pour $t \in I$, $g(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.

   3.1. Démontrer que g est solution sur I de l'équation différentielle $(E') : y' = -ry + \dfrac{r}{K}$.

   3.2. Résoudre l'équation différentielle (E'), puis déterminer une expression de N sur I.

   3.3. Retrouver la limite de N en $+\infty$.