DS UE MA4021, 2012-2013, Mardi 19/03/2013, 8h00-9h30

Notes de cours autorisées (à l'exclusion de tout autre document)

Exercice 1 (questions de cours)
Ne consacrez pas plus d'une demi-heure à répondre à ces questions de cours.

1. Rappelez ce que signifie le fait qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est *mesurable* (au sens de Lebesgue) ? Tous les sous-ensembles E de $\mathbb{R}$ sont-ils mesurables ? Si ce n'est pas le cas, est-il aisé d'expliciter un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui ne soit pas mesurable (au sens de Lebesgue) ?
2. Soit $I = [a, b]$ (avec $a < b$ réels) un segment de $\mathbb{R}$ et $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction « explicitable » (ou aussi « mesurable » au sens de Lebesgue), c'est-à-dire telle que l'image réciproque $f^{-1}(I)$ de tout intervalle I de $\mathbb{R}$ soit un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (au sens de Lebesgue). Que signifie le fait que f soit intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$ et comment est définie alors l'intégrale
$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt$$
au sens de Lebesgue ? (*répondez à cette question d'abord le cas où f prend ses valeurs uniquement dans $[0, \infty[$, puis ensuite dans le cas où f est de signe quelconque sur $[a, b]$*).
3. Soit $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ comme dans la question **2**. On suppose de plus f bornée en valeur absolue sur $[a, b]$. Que signifie le fait que f soit intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$? Explicitez un procédé numérique classique permettant de calculer de manière approchée (lorsque $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ est supposée continue) la valeur de l'intégrale au sens de Riemann $\int_a^b f(t)\, dt$.
4. Une fonction $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$, explicitable et bornée en valeur absolue sur $[a, b]$, est-elle intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$? Est-elle intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$? *Justifiez chaque fois votre réponse avec un exemple dès que cette réponse s'avère négative.*

Exercice 2. Pour les deux intégrales données ci-dessous (la fonction f étant chaque fois supposée bornée), dites pourquoi on peut renverser l'ordre d'intégration et faites le explicitement en dessinant d'abord dans les deux cas le domaine $E \subset \mathbb{R}^2$ sur lequel porte l'intégration de f, considérée comme une fonction des deux variables x et y :

$$\int_{-4a/3}^{4a/3} \Big(\int_{y-a}^{3a-2y} f(x,y)\, dx \Big)\, dy \quad \text{(lorsque } a > 0 \text{ est un paramètre fixé) ;}$$

$$\int_0^4 \left(\chi_{[0,1]}(x) \int_{-\sqrt{x}}^{(2|x|)^{1/3}} f(x,y)\, dy + \chi_{]1,4]}(x) \int_{x-2}^{(2|x|)^{1/3}} f(x,y)\, dy \right) dx$$

(*on rappelle que, si* E *est un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$, χ_E *désigne la fonction valant* 1 *sur* E *et* 0 *sur* $\mathbb{R} \setminus E$).

Exercice 3. Soit G le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$G := \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+z \leq 1,\ y+z \leq 1 \Big\}.$$

1. Dessinez le domaine G sur un schéma (en perspective) en trois dimensions (*précisez bien dans un premier temps les équations des plans affines intervenant dans la description de la frontière de ce domaine*). Le domaine G est-il borné ?
2. Calculez l'intégrale triple

   $$I := \iiint_G \frac{1}{(x+y+z)^3}\, dx\, dy\, dz$$

   en indiquant quel théorème du cours vous invoquez pour effectuer ce calcul.

Exercice 4. Soit $a > 0$ un paramètre fixé et C_a le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$C_a := \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, 0 < \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq a \Big\}$$

Dessinez en perspective le domaine C_a (et dites de quel type de domaine il s'agit, puis si ce domaine est borné ou non), puis calculez ensuite, en utilisant le changement de variables qui vous semble le mieux approprié, l'intégrale triple

$$I_a := \iiint_{C_a} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz\,.$$