DS UE MA4021, 2012-2013, Mardi 19/03/2013, 8h00-9h30

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Exercice 1 (questions de cours)

1. *Rappelez ce que signifie le fait qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est mesurable (au sens de Lebesgue) ? Tous les sous-ensembles E de $\mathbb{R}$ sont-ils mesurables ? Si ce n'est pas le cas, est-il aisé d'expliciter un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui ne soit pas mesurable (au sens de Lebesgue) ?*

   Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est dit *intégrable* s'il existe, pour tout $\epsilon > 0$, un compact K_ϵ de $\mathbb{R}$ et un ouvert O_ϵ de $\mathbb{R}$ tels que la mesure de $O_\epsilon \setminus K_\epsilon$ (calculée comme l'inf des mesures des ouverts cet ensemble) soit inférieure ou égale à ϵ. L'ensemble E est dit *mesurable* si son intersection avec tout segment $[-R, R]$ (pour tout $R > 0$) est intégrable. Il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non mesurables (le paradoxe de Banach-Tarski le révèle), mais en exhiber un nécessite d'invoquer l'axiome du choix [1]. Un tel sous-ensemble non-mesurable de $\mathbb{R}$ n'est donc pas concrètement « explicitable ».

2. *Soit $I = [a, b]$ (avec $a < b$ réels) un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction « explicitable » (ou aussi « mesurable » au sens de Lebesgue), c'est-à-dire telle que l'image réciproque $f^{-1}(I)$ de tout intervalle I de $\mathbb{R}$ soit un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (au sens de Lebesgue). Que signifie le fait que f soit intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$ et comment est définie alors l'intégrale*

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt$$

   au sens de Lebesgue ? (répondez à cette question d'abord le cas où f prend ses valeurs uniquement dans $[0, \infty[$, puis ensuite dans le cas où f est de signe quelconque sur $[a, b]$).

   Si f est une fonction mesurable positive sur $[a, b]$, on dit que f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$ si

$$\sup_{h>0} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} kh\, \mathrm{Vol}_1 \Big\{ t \in [a, b]\,;\, f(t) \in [kh, (k+1)h[\Big\} \Big) < +\infty.$$

1. Étant donnée une collection $(A_\iota)_\iota$ de sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$, il existe un processus de choix permettant de « choisir » un élément x_ι dans chacun des sous-ensembles A_ι. Si l'ensemble d'indexation de la famille $(A_\iota)_\iota$ est fini ou infini dénombrable, ceci se fait sans problème algorithmiquement, mais si ce n'est pas le cas, il faut admettre (c'est un axiome) qu'un tel processus de choix est implémentable. De toutes manières, il ne pourra jamais l'être « explicitement ».

L'intégrale de Lebesgue $\int_{[a,b]} f(t)\, dt$ de f sur $[a,b]$ est alors définie comme cette borne supérieure. Si f est mesurable de signe quelconque, f est dite intégrable sur $[a,b]$ si les deux fonctions positives $f^+ := \sup(f,0)$ et $f^- := \sup(-f,0)$ le sont ; l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a,b]} f(t)\, dt$ de f sur $[a,b]$ est alors définie comme la différence des intégrales de Lebesgue de f^+ et f^- (fonctions mesurables positives sur $[a,b]$) sur $[a,b]$.

3. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ comme dans la question* **2**. *On suppose de plus f bornée en valeur absolue sur $[a,b]$. Que signifie le fait que f soit intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$? Explicitez un procédé numérique classique permettant de calculer de manière approchée (lorsque $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est supposée continue) la valeur de l'intégrale au sens de Riemann $\int_a^b f(t)\, dt$.*
   Dire que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ (f étant supposée réelle et bornée en valeur absolue sur $[a,b]$, comme c'est le cas ici) signifie que, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver des fonctions *en escalier* φ_ϵ et ψ_ϵ sur $[a,b]$, encadrant la fonction f sur $[a,b]$ (*i.e.*, $\varphi_\epsilon(t) \leq f(t) \leq \psi_\epsilon(t)$ pour tout $t \in [a,b]$) et telles que

$$\int_a^b (\psi_\epsilon(t) - \varphi_\epsilon(t))\, dt \leq \epsilon \quad \forall\, \epsilon > 0$$

   (*cf.* le cours d'Analyse 1 en S2). Lorsque f est continue, la *méthode des trapèzes*[2]

$$\int_a^b f(t)\, dt \simeq \frac{b-a}{N}\Big(\frac{f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} f(a + j(b-a)/N) + \frac{f(b)}{2}\Big)$$

   (lorsque N tend vers $+\infty$) fournit le procédé numérique le plus classique pour calculer l'intégrale de Riemann d'une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

4. *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, explicitable et bornée en valeur absolue sur $[a,b]$, est-elle intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$? Est-elle intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$? Justifiez chaque fois votre réponse avec un exemple dès que cette réponse s'avère négative.* La réponse à la première question est oui en vertu de la clause de domination (Remarque 1.5 du cours) puisqu'une fonction positive constante

2. Voir la section 3.4.2 dans le polycopié du cours d'Analyse 1 `http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/analyse1.pdf` en ligne. Plus généralement, pour tout ce qui concerne l'intégration au sens de Riemann, vous pouvez vous référer au chapitre 3 de ce polycopié.

sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Lebesgue sur ce segment. La réponse à la seconde question est en revanche non : la fonction valant 1 lorsque x est rationnel, 0 sinon, n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$ (voir le cours d'Analyse 1, exemple 3.2 du polycopié en ligne de ce cours) ; comme c'est une fonction positive bornée par 1, elle est en revanche intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$ (d'intégrale de Lebesgue nulle sur $[0,1]$ car les nombres rationnels constituent un sous-ensemble de mesure de Lebesgue nulle sur $[0,1]$ puisqu'il s'agit d'un sous-ensemble dénombrable de $[0,1]$).

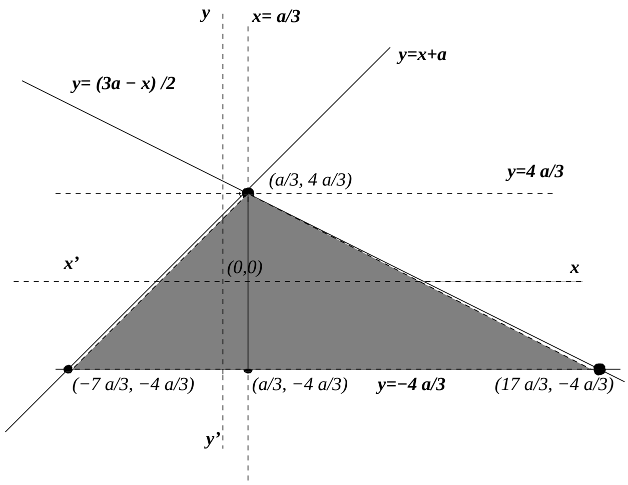
Exercice 2. *Pour les deux intégrales données ci-dessous (la fonction f étant chaque fois supposée bornée), dites pourquoi on peut renverser l'ordre d'intégration et faites le explicitement en dessinant d'abord dans les deux cas le domaine $E \subset \mathbb{R}^2$ sur lequel porte l'intégration de f, considérée comme une fonction des deux variables x et y :*

$$\int_{-4a/3}^{4a/3} \Big(\int_{y-a}^{3a-2y} f(x,y)\,dx \Big)\,dy \quad \text{(lorsque } a>0 \text{ est un paramètre fixé) ;}$$

$$\int_0^4 \left(\chi_{[0,1]}(x) \int_{-\sqrt{x}}^{(2|x|)^{1/3}} f(x,y)\,dy + \chi_{[1,4]}(x) \int_{x-2}^{(2|x|)^{1/3}} f(x,y)\,dy \right) dx$$

(*on rappelle que, si E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, χ_E désigne la fonction valant* 1 *sur E et* 0 *sur $\mathbb{R}\setminus E$*).

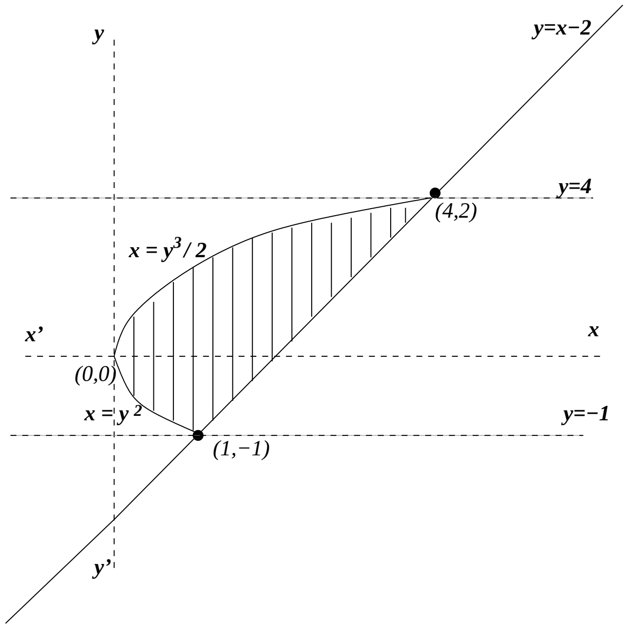
`Première intégrale.` Le domaine sur lequel s'effectue la première intégration (double) est le domaine borné entre les deux droites d'équations respectives $y = x + a$ et $y = (3a - x)/2$ et les droites horizontales d'équations $y = -4a/3$ et $y = 4a/3$. Or les deux droites d'équations $y = x+a$ et $y = (3a-x)/2$ se coupent précisément au point d'abscisse x_0 telle que $x_0 - a = (3a - x_0)/2$, *i.e.* $3x_0/2 = a/2$, soit $x_0 = a/3$, et d'ordonnée $y_0 = x_0 + a = 4a/3$. Les points d'intersection de la droite d'équation $y = -4a/3$ avec respectivement les droites d'équation $y = x + a$ et $y = (3a - x)/2$ ont pour abscisses respectives $x = -4a/3 - a = -7a/3$ et $x = 17a/3$. Le domaine d'intégration (en (x,y)) est le domaine en grisé sur la figure ci-dessous.



Comme f est bornée sur le domaine d'intégration (qui est aussi borné), on peut intervertir l'intégration par rapport à x et l'intégration par rapport à y du fait du Théorème de Fubini (théorème 1.5 du polycopié). L'intégrale devient donc :

$$\int_{-7a/3}^{a/3} \Big(\int_{-4a/3}^{x+a} f(x,y)\, dy \Big)\, dx + \int_{a/3}^{17a/3} \Big(\int_{-4a/3}^{(3a-x)/2} f(x,y)\, dy \Big)\, dx.$$

`Seconde intégrale.` Le domaine sur lequel s'effectue la seconde intégration est le domaine limité inférieurement par le graphe de la parabole d'équation $y = -\sqrt{x}$ au dessus de $x \in [0,1]$, puis par la droite affine d'équation $y = x-2$ au dessus de $x \in]1,4]$ (notons que la parabole et la droite se coupent au point $(1,-1)$) ; il est limité supérieurement par le graphe de la cubique d'équation $y = (2x)^{1/3}$ au dessus de $x \in [0,4]$. On note que le point $(4,2)$ est un point d'intersection de cette cubique avec la droite affine d'équation $y = x - 2$. Le domaine d'intégration (en (x,y)) est cette fois le domaine hachuré sur la figure ci-dessous.



Comme f est bornée sur le domaine d'intégration (qui est aussi borné), on peut intervertir l'intégration par rapport à x et l'intégration par rapport à y du fait du Théorème de Fubini (théorème 1.5 du polycopié). L'intégrale devient donc :

$$\int_{-1}^{0} \Big(\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\, dx \Big)\, dy + \int_{0}^{2} \Big(\int_{y^3/2}^{y+2} f(x,y)\, dx \Big)\, dy.$$

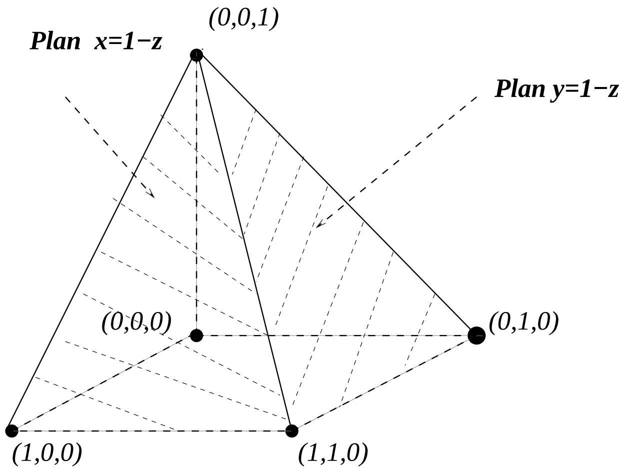
Exercice 3. *Soit G le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$G := \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+z \leq 1,\ y+z \leq 1 \Big\}.$$

1. *Dessinez le domaine G sur un schéma (en perspective) en trois dimensions (précisez bien dans un premier temps les équations des plans affines intervenant dans la description de la frontière de ce domaine). Le domaine G est-il borné ?*

   Le domaine G est une pyramide (pentaèdre, *i.e.* polyèdre convexe à cinq faces, de sommets les cinq points $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ et $(0,1,1)$, la « base » étant le carré $[0,1] \times [0,1]$ du plan « horizontal » $x0y$. Les équations des plans affines intervenant dans la frontière du domaine G sont, outre les trois plans de coordonnées $\{x=0\}$, $\{y=0\}$, $\{z=0\}$, les deux plans « obliques » d'équations respectives

$\{x+z=1\}$ et $\{y+z=1\}$. Le domaine G (qui est une pyramide pleine) est donc borné. Voir le dessin ci-dessous.



2. *Calculez l'intégrale triple*

$$I := \iiint_G \frac{1}{(x+y+z)^3}\,dx\,dy\,dz$$

en indiquant quel théorème du cours vous invoquez pour effectuer ce calcul. D'après le théorème de Fubini-Tonelli (Théorème 1.4 du polycopié), on a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \Big(\int_0^{1-z}\Big(\int_0^{1-z} \frac{dx}{(x+y+z)^3}\Big)\,dy\Big)\,dz \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\int_0^{1-z} \Big[\frac{1}{(x+y+z)^2}\Big]_{x=0}^{x=1-z}\,dy\Big)\,dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\int_0^{1-z} \frac{dy}{(y+z)^2} - \int_0^{1-z}\frac{dy}{(y+1)^2}\Big)\,dz \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\Big[\frac{1}{y+z}\Big]_{y=0}^{y=1-z} - \Big[\frac{1}{y+1}\Big]_{y=0}^{y=1-z}\Big)\,dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\frac{1}{z} - \frac{1}{2-z}\Big)\,dz \\
&= \Big[\ln(z) + \ln(2-z)\Big]_{z=0}^{z=1} = +\infty.
\end{aligned}$$

On obtient donc ici $I = +\infty$.

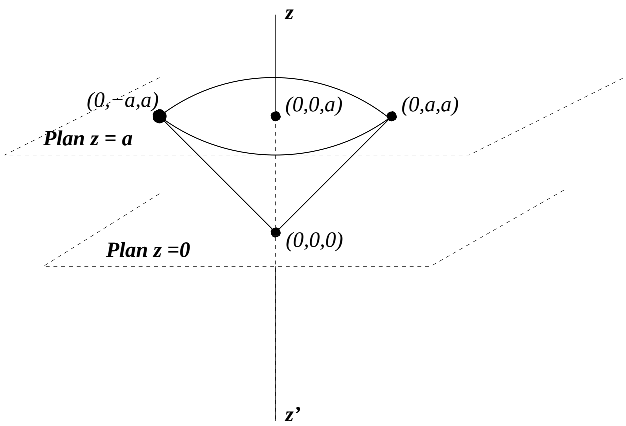
Exercice 4. *Soit $a > 0$ un paramètre fixé et C_a le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$C_a := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 0 < \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq a\Big\}$$

Dessinez en perspective le domaine C_a (et dites de quel type de domaine il s'agit, puis si ce domaine est borné ou non), puis calculez ensuite, en utilisant le changement de variables qui vous semble le mieux approprié, l'intégrale triple

$$I_a := \iiint_{C_a} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz\,.$$

Le domaine C_a est un secteur de cône de révolution (plein), d'axe le demi-axe vertical $0z$, d'ouverture $\pi/4$. Le secteur considéré est le secteur du cône (dont le sommet est l'origine) limité par le plan horizontal d'équation $z = a$ (voir la figure ci-dessous).



En utilisant le changement de variables consistant à utiliser les coordonnées cylindriques $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, et le théorème de Fubini-Tonelli (Théorème 1.4 du polycopié), l'intégrale I_a s'écrit (puisque $dx\,dy\,dz =$

$r\,dr\,d\theta\,dz$ et que $du/2 = rdr$ si $r = u = r^2$) :

$$\begin{aligned}
I_a &= \int_0^a \Big(\int_0^z \frac{r^2}{\sqrt{r^2+z^2}}\, rdr \times \int_0^{2\pi} d\theta \Big)\, dz = \pi \int_0^a \Big(\int_0^{z^2} \frac{u}{\sqrt{u+z^2}}\, du \Big)\, dz \\
&= \pi \int_0^a \Big(\int_0^{z^2} \frac{(u+z^2)-z^2}{\sqrt{u+z^2}}\, du \Big)\, dz \\
&= 2\pi \int_0^a \Big[\frac{1}{3}(u+z^2)^{3/2} - z^2(u+z^2)^{1/2} \Big]_0^{z^2} dz \\
&= 2\pi \int_0^a \Big(\frac{2\sqrt{2}-1}{3} - (\sqrt{2}-1) \Big)\, z^3\, dz = \frac{\pi(2-\sqrt{2})\, a^4}{6}\,.
\end{aligned}$$