Exercice 1 **1-** Il est clair que $d(x,y) = d(y,x)$ et que $d(x,y) \geq 0$ pour tout $x, y \in E$. De plus, $d(x,y) = 0$ si, et seulement si $x = y$. Il reste à démontrer l'inégalité triangulaire. Soient $x, y, z \in E$.

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}|x_n - y_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(|x_n - z_n| + |z_n - y_n|) = d(x,z) + d(z,y).$$

2- On a

$$d(T(x),T(y)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|x_{n-1} - y_{n-1}| = \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}|x_n - y_n| = \tfrac{1}{2}d(x,y),$$

c'est à dire, T est une application strictement contractive. Si x etait un point fixe, on aurait $Tx = x$ ce qui entraîne $x_0 = 1$ et $x_n = x_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, autrement dit, on aurait forcément $x = (1,1,1,\ldots)$. Or cet élément n'appartient pas a E, T ne peut pas admettre un point fixe.

3- Le théorème du point fixe dit que toute application strictement contractive sur un espace complet admet un point fixe. T est une contraction stricte sans point fixe, donc E ne peut pas être complet.

On peut aussi remarquer que la suite (x_n) définie par $(x_n)_k = 1$ pour $k = 0,\ldots,n$ et nulle à partir du rang $n{+}1$ est une suite de Cauchy dans E qui ne peut pas converger parce que le seul candidat pour la limite $x = (1,1,1,\ldots)$ n'appartient pas à E.

Exercice 2 Soient $p, q \in (1,\infty)$ et p', q' les exponenets duals tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. L'opérateur T est clairement linéaire. Par les inégalités triangulaire et de Hölder on a

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_{\ell^q} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}x_l\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}|a_{kl}x_l|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}|a_{kl}|^{p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\left(\sum_{l=0}^{\infty}|x_l|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}|a_{kl}|^{p'}\right]^{\frac{q}{p'}} \|x\|_{\ell^p} = M\|x\|_{\ell^p}.
\end{aligned}$$

On en déduit que T envoie bien ℓ^p dans ℓ^q et est continue. Sa norme est au plus M.

Exercice 3 **1-** Si $x = (x_n) \in c_0$, la suite (x_n) est borné et donc la somme qui définit $(Tx)_k$ convèrge pour tour $k \in \mathbb{N}$. En plus on a

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\big|(Tx)_k\big| = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}x_l\right| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l=0}^{\infty}|a_{kl}x_l| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l=0}^{\infty}|a_{kl}|\ \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| = M\|x\|_{\ell^\infty}.$$

2- Soit $e_n = (\delta_{nk})_{k=0}^{\infty}$. Par la définition de T on a $(Te_n)_k = a_{kn}$. Par hypothèse on a $\lim\limits_{k\to\infty} a_{kn} = 0$ pour tout n, c'est à dire $Te_n \in c_0$ pour tout n. Soit $x = (x_n) \in c_{00}$. On a

$$Tx = T(\sum_{n=0}^{N} x_n e_n) = \sum_{n=0}^{N} x_n T(e_n)$$

pour un certain $N \in \mathbb{N}$. De $T(e_n) \in c_0$ pour tout n on déduit $Tx \in c_0$.
3- Si $x = (x_n) \in c_0$, on pose $y_n = (x_0, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Clairement $\|x - y_n\| = \sup_{k>n} |x_k|$. Or $x \in c_0$, cette norme tend vers zéro avec n vers infini. On a trouvé une suite de c_{00} qui approche x dans la norme de c_0. Donc c_{00} est dense dans c_0.
4- On a déjà démontré que $T : c_0 \to \ell^\infty$ est borné. Il suffit de voir que $T(c_0) \subset c_0$. Soit donc $x \in c_0$ quelconque et (y_n) une suite de c_{00} qui approche x. Par continuité de $T : c_0 \to \ell^\infty$ on a

$$Tx = T(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} T(y_n).$$

Comme $T(y_n) \in c_0$ (voir question no 2-) et c_0 est une sous-espace fermé (etant complet) on obtient $Tx \in c_0$.
Montrons que

$$\|T\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l=0}^{\infty} |a_{kl}| = M.$$

On a déjà vu "$\leq$", démontrons l'autre inégalité: Soit $\epsilon > 0$. Il existe donc un $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{l=0}^{\infty} |a_{k_\epsilon l}| > M - {}^{\epsilon}\!/_{2}.$$

Ensuite on choisit un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{l>N} |a_{k_\epsilon l}| < {}^{\epsilon}\!/_{2}$. Posons $x_l = \frac{\overline{a_{k_\epsilon l}}}{|a_{k_\epsilon l}|}$ si $a_{k_\epsilon l} \neq 0$ et $l \leq N$ et $x_l = 0$ sinon. On a donc

$$T(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_{k_\epsilon l}\overline{a_{k_\epsilon l}}}{|a_{k_\epsilon l}|} = \sum_{n=0}^{N} |a_{k_\epsilon l}| \geq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{k_\epsilon l}| - {}^{\epsilon}\!/_{2} \geq M - \epsilon.$$

Ceci étant possible pour tout $\epsilon > 0$ on conclut $\|T\| = M$.

5- On a $a_{kl} = (S(e_l))_k$. Or $S \in \mathcal{L}(c_0)$ et $e_l \in c_0$ pour tout l on a $S(e_l) \in c_0$ ce qui équivaut à $\lim_{k\to\infty} a_{kl} = 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.
6- L'application $\psi_k : c_0 \to \mathbb{C}$ défini par $\psi_k : (x_n) \mapsto x_k$ est clairement linéaire et continue avec $\|\psi_k\| = 1$ (l'inégalité "$\leq$"est immédiat, pour "$\geq$" on observe que $\psi_k(e_k) = 1$). Par conséquent, $\varphi_k = \psi_k \circ S$ est linéaire et continue et satisfait $\|\varphi_k\| \leq \|\psi_k\| \, \|S\| = \|S\|$.
7- Or $\varphi_k \in (co)' = \ell^1$ il existe pour tout k un élement $a_k = (a_{kl})_{l=0}^{\infty} \in \ell^1$ tel que $\varphi_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} x_l$. Or $\|\varphi_k\| = \|(a_{kl})_l\|_{\ell^1}$, on a

$$\sup_{k\geq 0} \sum_{l=0}^{\infty} |a_{kl}| = \sup_{k\geq 0} \|(a_{kl})_l\|_{\ell^1} = \sup_{k\geq 0} \|\varphi_k\| \leq \|S\|.$$

~~ fin ~~