# Devoir surveillé

**Exercice 1** Un espace métrique $E$ est appelé séparable si il contient un sous-ensemble dénombrable qui est dense.

(a) Montrer que $c_0$ (muni de la norme sup habituelle) est séparable.

(b) Qu'est-ce qu'on peut dire sur la séparabilité de $\ell_\infty$? On pourra étudier l'ensemble des suites de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ définies par les sous-ensembles $A \subseteq \mathbb{N}$ via $x_A = (\xi_n)$ où $\xi_n = 1$ si $n \in A$ et $\xi_n = 0$ sinon. Quel est la distance de $x_A$ et $x_B$?

**Exercice 2** Montrer que les opérateurs suivants sont linéaires et continues et calculer leur normes.

(a) $T_1 : \ell_2 \to \ell_2$, $T_1((x_n)_{n\geq 0}) = (x_{n+1})_{n\geq 0}$.

(b) $T_2 : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, $T_2(f) = xf(x)$.

(c) $T_3 : L^2([0,1]) \to \mathbb{C}$, $T_3(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx$.

(d) $T_4 : L^\infty([0,1]) \to \mathbb{C}$, $T_4(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx$.

**Exercice 3** Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel réel normé.

(a) Donner l'énoncé du théorème de Hahn-Banach dans la version de la séparation stricte entre un point $x$ et un convexe fermé $C$ qui ne contient pas $x$.

(b) Pour tout fonctionnel $x'$ on appelera demi-espaces affine un ensemle de la forme $H = \{x \in X : \ x'(x) < c\}$.

Montrer que tout convexe fermé $C$ de $X$ s'écrit comme l'intersection de tous les demi-espaces fermés $\overline{H}$ de $X$ qui contiennent $C$.

(c) Soient $\mu$ une mesure de probabilité sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et $C$ un convexe fermé borné de $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Décrire les formes linéaires sur $X$. Montrer que pour toute $\mu$-mesurable fonction $f : (\Omega, \mu) \to C$ on ait

$$\int_\Omega f(\omega)\,d\mu(\omega) \in C$$

**Exercice 4** Soit $(E, d)$ un espace métrique et $K \subseteq E$ compact.

(a) Montrer que pour tout $x \in E$, $\{x\}$ est un fermé.

(b) Montrer que $(K, d)$ est une espace métrique complet.

(c) On suppose désormais que $K$ est dénombrable; on peut donc écrire $K = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}\{x_j\}$. Montrer qu'il existe un $j_0$ tel que $\{x_{j_0}\}$ est ouvert de $K$ dans la topolgie induite de $E$.

(d) En déduire que $K$ possède un point discret dans $E$ c'est à dire qu'il existe un rayon $r > 0$ et un $x \in K$ et tel que (dans $E$) on ait

$$\{x\} = B(x, r) \cap K$$

**Exercice 5** Soit $X$ un espace vectoriel normé et $M \subseteq X$. Montrer que $M$ est borné si et seulement si $M$ est faiblement borné, c'est à dire si pour tout $x' \in X'$ on a $x'(M)$ borné dans $\mathbb{C}$.