

**Intégration et Équations différentielles**  
**Licence Mathématiques (Parcours Ing. Math.),**  
**UE K1MA4021**

Alain Yger

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ BORDEAUX 1, TALENCE 33405,  
FRANCE

*E-mail address:* `Alain.Yger@math.u-bordeaux1.fr`

Version du 20 juin 2014.

RÉSUMÉ. L'objectif de ce cours (correspondant au contenu de l'UE K1MA4021 du parcours « Ingénierie mathématique » de la Licence) se veut avant tout une introduction pratique (plutôt que théorique) à l'intégration sur les domaines volumiques de  $\mathbb{R}^n$ , les courbes planes ou gauches rectifiables du plan ou de l'espace, ainsi que les nappes paramétrées dans l'espace. Les concepts d'intégration pertinents (intégrale linéique, surfacique, intégrale curviligne, calcul de flux) seront également dégagés, ainsi que les formules fondamentales de l'analyse vectorielle (Stokes, Green-Riemann, Green-Ostrogradski) dans le plan ou l'espace. La seconde partie du cours présentera les aspects qualitatifs de l'étude des solutions d'une équation différentielle (ou d'un système différentiel) résoluble en  $Y'$  (Cauchy-Lipschitz, étude qualitative du plan de phase, aspects numériques), toujours sous l'angle « appliqué » plutôt que théorique. Parmi les références sur lesquelles s'appuiera ce cours, on mentionne les chapitres 14-15-16 de **[MathL2]**, le cours de Théorie de l'Intégration **[Yint]** (dont on ne retiendra ici que l'aspect « pratique », la partie II de **[L3An]** (même remarque). Une liste d'exercices proposés en TP (en 2011-2012) par Stanislas Kupin, ainsi que les corrigés du DS et des deux sessions d'examen (Annales 2011-2012, 2012-2013), figurent dans un second polycopié accompagnant celui-ci.

## Table des matières

|  |     |
|--|-----|
| Chapitre 1. Intégration « pratique » sur $\mathbb{R}^n$                        | 1   |
| 1.1. Peut-on (et comment ?) « mesurer » tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ ? | 1   |
| 1.2. L'intégration des fonctions sur $\mathbb{R}^n$                            | 8   |
| 1.3. Intégration des fonctions de signe quelconque                             | 16  |
| 1.4. Les intégrales fonction de paramètres                                     | 21  |
| 1.5. La formule de changement de variables                                     | 31  |
| 1.6. Le théorème de Fubini   | 35  |
| Chapitre 2. Initiation à l'étude qualitative des EDO                           | 57  |
| 2.1. Équations différentielles résolubles en $Y'$                              | 57  |
| 2.2. Solutions d'une EDO résoluble en $Y'$ ; conditions initiales              | 59  |
| 2.3. Le théorème de Cauchy-Lipschitz et ses compagnons                         | 64  |
| 2.4. Les EDO linéaires ou s'y ramenant   | 66  |
| 2.5. Résolubilité d'une EDO par recherche d'une intégrale première             | 71  |
| 2.6. Systèmes autonomes ; le concept d'équilibre stable ou instable            | 74  |
| Annexe A. Exercices proposés en TD (2011-2012)                                 | 77  |
| Annexe B. Annales 2011-2012, Texte et corrigé du DS                            | 87  |
| Annexe C. Annales 2011-2012, Texte et corrigé de l'examen de session 1         | 93  |
| Annexe D. Annales 2011-2012, Texte et corrigé de l'examen de session 2         | 99  |
| Annexe E. Annales 2012-2013, Texte et corrigé du DS                            | 109 |
| Annexe F. Annales 2012-2013, Texte et corrigé de l'examen de session 1         | 115 |
| Annexe G. Annales 2012-2013, Texte et corrigé de l'examen de session 2         | 127 |
| Bibliographie  | 137 |
| Index  | 139 |



## Intégration « pratique » sur $\mathbb{R}^n$

### 1.1. Peut-on (et comment ?) « mesurer » tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ ?

**1.1.1. Les « briques de base » de  $\mathbb{R}^n$ .** La « brique de base » que l'on envisage pour parler d'intégration (et donc de calcul de longueur) dans  $\mathbb{R}$  est l'intervalle  $[0, 1]$ . Ce segment a un *volume* 1-dimensionnel<sup>1</sup> qui vaut  $\text{vol}_1([0, 1]) = 1$ . Lorsque l'on passe en dimension supérieure<sup>2</sup>, deux « briques de base » peuvent être envisagées :

- la plus simple est le pavé fermé  $[0, 1]^n$ , auquel il est naturel d'attacher le volume ( $n$ -dimensionnel cette fois) :  $\text{vol}_n([0, 1]^n) = 1 \times \cdots \times 1$  ;
- la seconde (un peut moins naturelle, mais pourtant importante dans la construction de maillages en mathématiques appliquées) est le *simplexe* fermé

$$(1.1) \quad \Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_j \geq 0, j = 1, \dots, n ; x_1 + \cdots + x_n \leq 1\},$$

(triangle en dimension 2, tétraèdre en dimension 3, *etc.*) auquel il est naturel d'attacher le volume  $n$ -dimensionnel  $\text{vol}_n(\Delta_n) = 1/n!$  puisque le pavé  $[0, 1]^n$  se découpe en  $n!$  copies du simplexe  $\Delta_n$  (s'en convaincre dans les cas  $n = 2$ ,  $n = 3$ ).

**1.1.2. Ouverts et compacts de  $\mathbb{R}^n$ .** Dans  $\mathbb{R}^n$ , deux classes de sous-ensembles jouent un rôle important. Ces deux classes se situent aux antipodes l'une de l'autre de part le caractère des objets qui la composent.

- La classe des sous-ensembles ayant vocation à envahir l'espace qui leur est attribué : ce sont les « *ouverts* » ; un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est par définition une union quelconque de pavés ouverts  $]a_1, b_1[ \times \cdots \times ]a_n, b_n[$ , avec, pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,  $-\infty < a_j < b_j < +\infty$ . Si un point  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  appartient à un ouvert  $U$ , il existe un pavé ouvert  $P$  tels que  $x \in P \subset U$  (c'est ainsi que l'on traduit ce caractère « expansionniste » des ouverts).
- La classe des sous-ensembles ayant au contraire vocation à se trouver « resserrés » ou « confinés » dans l'espace qui leur est imparti : ce sont les *compacts* de  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire les sous-ensembles  $K \subset \mathbb{R}^n$  qui sont bornés et dont le complémentaire est ouvert. De toute suite de points d'un compact, on peut toujours extraire une sous-suite convergeant vers un point de ce compact (ce qui est une manière de traduire le caractère « confiné » des compacts).

1. On dit ici une « longueur » car on est en dimension un, si on était en dimension 2, on parlerait de « surface », en dimension 3 vraiment de « volume », *etc.*

2. On s'intéressera en priorité dans ce cours aux dimensions un (la droite des temps), deux (le plan), trois (l'espace), quatre (l'espace-temps).

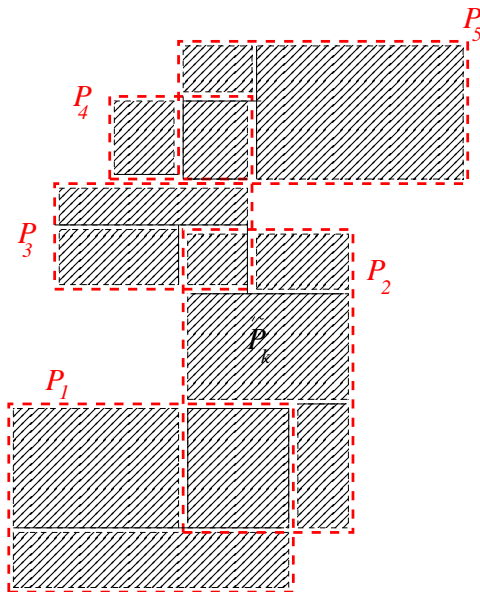


FIGURE 1.1. Redécoupage d'une union de pavés ouverts

Les ouverts sont des ensembles qu'il est possible de mesurer du fait de la remarque importante suivante : tout ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  s'écrit sous la forme

$$(1.2) \quad U = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k,$$

où les  $P_k$  sont des pavés ouverts : on remarque en effet que, si  $x \in U$ , il existe un pavé ouvert  $P^x$  dont les sommets sont des points à coordonnées rationnelles tel que  $x \in P^x \subset U$ . Comme il n'y a qu'une infinité dénombrable de nombre rationnels, il y a énormément de redondance dans l'expression

$$P = \bigcup_{x \in U} P^x$$

et, une fois éliminée cette redondance, nous sommes conduits à (1.2) (du fait que le sous-ensemble  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  des nombres rationnels est dense dans  $\mathbb{R}$ ). Remarquons d'autre part que toute union dénombrable (1.2) de pavés ouverts  $P_k$  s'écrit, au prix d'un redécoupage approprié des pavés  $P_k$ , comme une union dénombrable de pavés  $\tilde{P}_k$ , non plus nécessairement ouverts, mais dont les intérieurs sont cette fois disjoints (voir la figure 1.1).

**DÉFINITION 1.1** (volume  $n$ -dimensionnel des pavés ouverts et des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ ). Le *volume  $n$ -dimensionnel* d'un pavé ouvert non vide  $]a_1, b_1[ \times \cdots \times ]a_n, b_n[$  de  $\mathbb{R}^n$ , où  $-\infty < a_j < b_j < +\infty$ ,  $j = 1, \dots, n$ , est par définition le nombre strictement positif

$$(1.3) \quad \text{vol}_n(]a_1, b_1[ \times \cdots \times ]a_n, b_n[) := \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

Le volume du pavé vide est par convention égal à 0. Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , le volume  $n$ -dimensionnel de l'ouvert  $U$  est par définition

$$(1.4) \quad \text{vol}_n(U) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}_n(\text{int}(\tilde{P}_k))$$

dès que  $U$  s'écrit sous la forme

$$(1.5) \quad U = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{P}_k, \text{ où } \text{int}(\tilde{P}_k) \cap \text{int}(\tilde{P}_l) = \emptyset \text{ si } k \neq l.$$

(le résultat étant indépendant d'ailleurs du « découpage » (1.5) de  $U$ , « int » désignant ici la prise d'intérieur).

Il est naturel, une fois armé de cette définition, d'en déduire une manière de « mesurer » les compacts de  $\mathbb{R}^n$ .

**DÉFINITION 1.2** (volume  $n$ -dimensionnel des compacts de  $\mathbb{R}^n$ ). Si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ , le volume  $n$ -dimensionnel de  $K$  est par définition

$$(1.6) \quad \text{vol}_n(K) := \inf_{\substack{U \supset K \\ U \text{ ouvert}}} (\text{vol}_n(U)).$$

**REMARQUE 1.1** (le volume  $n$ -dimensionnel d'un compact de  $\mathbb{R}^n$  est fini). Comme tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  est borné, donc inclus dans un pavé ouvert  $] -R, R[^n$  pour  $R$  assez grand, on a bien  $\text{vol}_n(K) \leq (2R)^n < +\infty$ .

**REMARQUE 1.2** (invariance du volume  $n$ -dimensionnel par isométrie de  $\mathbb{R}^n$ ). Les notions de volume  $n$ -dimensionnel que nous venons d'introduire ici pour les ouverts et les compacts de  $\mathbb{R}^n$  sont naturellement invariantes par isométrie : si  $\Phi$  est une transformation linéaire orthogonale de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même (préservant le produit scalaire euclidien usuel, donc distance euclidienne et orthogonalité), on a  $\text{vol}_n(\Phi(U)) = \text{vol}_n(U)$  pour tout ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et, par voie de conséquence  $\text{vol}_n(\Phi(K)) = \text{vol}_n(K)$  pour tout compact de  $\mathbb{R}^n$ . On admettra ce point ici.

**1.1.3. Volume  $n$ -dimensionnel de parallélotopes.** Les segments en dimension un, les parallélogrammes fermés en dimension deux, les parallélépipèdes fermés en dimension trois, ce que nous conviendrons d'appeler les *parallélotopes* en dimension supérieure, sont autant de compacts jouant un rôle très important en modélisation mathématique ainsi que dans le mécanisme d'intégration des fonctions de plusieurs variables que nous allons présenter dans ce cours. Il est donc essentiel de savoir calculer, avant d'aller plus avant, le volume  $n$ -dimensionnel de compacts aussi simples que ne le sont ceux-ci.

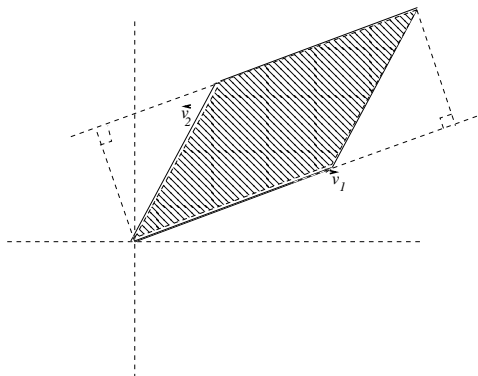
Commençons par la dimension un (sur la droite réelle  $\mathbb{R}$ ). Si  $x$  est un nombre réel non nul, on a

$$(1.7) \quad \text{vol}_1(\{tx; t \in [0, 1]\}) = |x|$$

(il s'agit juste ici de calculer la longueur d'un segment fermé).

Voyons maintenant ce qui se passe en dimension deux (dans le plan  $\mathbb{R}^2$ ). Si

$$\vec{v}_1 = v_{11}\vec{i} + v_{21}\vec{j}, \quad \vec{v}_2 = v_{12}\vec{i} + v_{22}\vec{j},$$

FIGURE 1.2. Calcul de la surface d'un parallélogramme dans  $\mathbb{R}^2$ 

sont deux vecteurs du plan (rapporté à sa base canonique  $(\vec{i}, \vec{j})$ ) linéairement indépendants<sup>3</sup>, la surface du parallélogramme fermé

$$\{t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2; t_1 \in [0, 1], t_2 \in [0, 1]\}$$

construit à partir des vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  se calcule immédiatement (voir la figure 1.2) à partir des formules donnant l'aire d'un rectangle (produit des longueurs des côtés) et l'aire d'un triangle (demi-produit de la base par la hauteur). On obtient (1.8)

$$\text{vol}_2(\{t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2; t_1 \in [0, 1], t_2 \in [0, 1]\}) = |v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21}| = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} = \|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|,$$

où  $\wedge$  désigne le *produit extérieur*<sup>4</sup> des deux vecteurs

$$\vec{v}_1 = v_{11}\vec{i} + v_{12}\vec{j} + 0\vec{k}, \quad \vec{v}_2 = v_{12}\vec{i} + v_{22}\vec{j} + 0\vec{k},$$

considérés comme vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  (rapporté à sa base canonique  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ).

Examinons enfin le cas de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Si (avec la même convention que ci-dessus concernant l'écriture des indices pour les coordonnées)

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \vec{v}_1 &= v_{11}\vec{i} + v_{21}\vec{j} + v_{31}\vec{k} \\ \vec{v}_2 &= v_{12}\vec{i} + v_{22}\vec{j} + v_{32}\vec{k} \\ \vec{v}_3 &= v_{13}\vec{i} + v_{23}\vec{j} + v_{33}\vec{k} \end{aligned}$$

sont trois vecteurs de l'espace  $\mathbb{R}^3$  linéairement indépendants, le volume du parallélépipède fermé

$$\{t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + t_3\vec{v}_3; t_1 \in [0, 1], t_2 \in [0, 1], t_3 \in [0, 1]\},$$

construit à partir des vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ , se calcule de manière identique en utilisant les formules donnant le volume d'un parallélépipède droit (produit des longueurs

3. On choisit ici de noter  $v_{kj}$ ,  $k = 1, 2$ , les coordonnées d'un vecteur afin de privilégier sa représentation comme vecteur colonne : en effet le premier indice dans les tableaux numériques est l'indice de ligne, tandis que le second figure l'indice de colonne.

4. On rappelle que le *produit extérieur* de deux vecteurs  $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  et  $x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  est défini de manière à réaliser une opération bilinéaire sur  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , ce en respectant les règles  $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$  et les règles « tournantes »  $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} = -\vec{k} \wedge \vec{j}$ ,  $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \wedge \vec{k}$ ,  $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \wedge \vec{i}$ . La forme bilinéaire ainsi construite est dite *alternée*.



des trois côtés) et celui d'un tétraèdre (un tiers du produit de la surface de la base par la hauteur). On a dans ce cas

$$(1.10) \quad \begin{aligned} & \text{vol}_3(\{t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 + t_3 \vec{v}_3; t_1 \in [0, 1], t_2 \in [0, 1], t_3 \in [0, 1]\}) = \\ & = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix} = \|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3 \rangle\| = \|\langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \wedge \vec{v}_1 \rangle\| = \|\langle \vec{v}_3, \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \rangle\|. \end{aligned}$$

Le déterminant  $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  intervenant dans (1.10) est aussi appelé *produit mixte* des trois vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  (dans cet ordre à respecter).

Les formules (1.7), (1.8), (1.10) sont des cas particuliers (en dimension respective un, deux, trois) d'une formule générale très importante (tant du point de vue théorique qu'appliqué). Cette formule sera une des pièces maitresses du calcul de volumes et, plus généralement, d'intégrales multiples dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , ainsi que sur les courbes du plan, les courbes ou les surfaces de l'espace.

**PROPOSITION 1.1** (volume d'un paralléloptope). *Soit  $m \in \{1, \dots, n\}$  et  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ ,  $m$  vecteurs linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^n$ , engendrant donc un sous-espace vectoriel  $V(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$  de dimension  $m$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Le volume  $m$ -dimensionnel du paralléloptope*

$$(1.11) \quad \{t_1 \vec{v}_1 + \dots + t_m \vec{v}_m; t_j \in [0, 1], j = 1, \dots, m\}$$

(considéré ici<sup>5</sup> comme un compact du sous-espace vectoriel  $V(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ , sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m$ ) est donné par

$$(1.12) \quad \begin{aligned} & \text{vol}_m(\{t_1 \vec{v}_1 + \dots + t_m \vec{v}_m; t_j \in [0, 1], j = 1, \dots, m\}) \\ & = \sqrt{\det(G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m))}, \end{aligned}$$

où  $G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$  désigne la matrice de Gram du système  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ , c'est-à-dire la matrice  $m \times m$  réelle symétrique dont les entrées sont les produits scalaires  $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ .

**REMARQUE 1.3.** Lorsque  $m = n$ , notons  $M(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  la matrice dont la  $j$ -ième colonne figure la liste des coordonnées du vecteur  $\vec{v}_j$  exprimé dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On a alors

$$G[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n] = {}^t M(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \cdot M(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n),$$

ce qui implique  $\det(G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)) = (\det(M(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)))^2$ . Si  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  définissent une base de  $\mathbb{R}^n$ , on a donc

$$(1.13) \quad \begin{aligned} & \text{vol}_n(\{t_1 \vec{v}_1 + \dots + t_n \vec{v}_n; t_j \in [0, 1], j = 1, \dots, n\}) \\ & = |\det(M(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n))| = |\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)|. \end{aligned}$$

**DÉMONSTRATION.** Donnons ici une esquisse de preuve (inspirée des preuves en dimension deux et trois, dont on a vu qu'elles exploitaient l'orthogonalité, cf. par exemple la figure 1.2 dans le cas  $n = 2$ ). Notons  $M(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$  la matrice à  $n$  lignes et  $m$  colonnes dont la  $j$ -ième colonne figure la liste des coordonnées du vecteur  $\vec{v}_j$  exprimé dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . La matrice réelle symétrique  $G[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m] = G$  de taille  $(m, m)$  obtenue comme  $G = {}^t M(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m) \cdot M(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$

5. Si  $m < n$ , le compact (1.11) n'a pas d'« épaisseur » dans  $\mathbb{R}^n$  puisqu'il est inclus dans un sous-espace vectoriel de dimension  $m < n$ . En vertu de la définition 1.2, son volume  $n$ -dimensionnel est nul.

est inversible puisque les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  sont linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^n$ . Cette matrice est une matrice réelle symétrique définie positive. Elle se diagonalise (voir le cours d'Algèbre 2) dans une base orthonormée de  $\mathbb{R}^m$  et les valeurs propres  $\sigma_1^2 \geq \dots \geq \sigma_m^2$  de cette matrice sont strictement positives. On en déduit<sup>6</sup> l'existence de deux matrices orthogonales réelles  $U$  et  $V$  (respectivement de taille  $(m, m)$  et  $(n, n)$ ) telles que

$$M(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m) = V \cdot \begin{pmatrix} |\sigma_1| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & |\sigma_m| \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot {}^t U.$$

La matrice  $M(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$  peut être considérée comme la matrice d'une application linéaire de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Les matrices  $U$  et  $V$  figurent des matrices de transformations orthogonales (donc d'isométries préservant les distances et donc les volumes respectivement  $m$  dimensionnels et  $n$  dimensionnels) à la source  $\mathbb{R}^m$  (pour  $U$ ) ou au but  $\mathbb{R}^n$  (pour  $V$ ). Puisque les transformations orthogonales  $U$  et  $V$  préservent les volumes (car préservent les distances, voir la Remarque 1.2), on en déduit

$$\text{vol}_m(\{t_1 \vec{v}_1 + \dots + t_m \vec{v}_m; t_j \in [0, 1], j = 1, \dots, m\}) = \prod_{j=1}^m |\sigma_j|,$$

ce qui est la formule (1.12) attendue puisque  $\det G = \prod_{j=1}^m \sigma_j^2$ .  $\square$

#### 1.1.4. Sous-ensembles intégrables, mesurables, négligeables, de $\mathbb{R}^n$ .

Le caractère inhérent aux ouverts (à savoir l'« expansionnisme ») et celui inhérent aux compacts (à savoir le « confinement ») nous conduisent à élargir la classe des sous-ensembles  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  auxquels on puisse attribuer un volume (fini ou infini) en tentant d'approcher pareils ensembles de l'extérieur par les ouverts et de l'intérieur par les compacts. La définition suivante s'avère ainsi naturelle.

**DÉFINITION 1.3** (sous-ensembles intégrables, mesurables, négligeables, de  $\mathbb{R}^n$ ). Un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit *intégrable* si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un ouvert  $U_\epsilon$  contenant  $E$  et un compact  $K_\epsilon$  contenu dans  $E$ , de manière à ce que le volume  $n$ -dimensionnel de l'ouvert  $U_\epsilon \setminus K_\epsilon$  soit inférieur ou égal à  $\epsilon$ . Le *volume  $n$ -dimensionnel* de  $E$  est alors un nombre positif ou nul (forcément fini), que l'on note

$$\text{vol}_n(E) := \int \dots \int_E dx_1 \dots dx_n.$$

Un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit *mesurable* (au sens de Lebesgue) si, pour tout  $R > 0$ ,  $E \cap [-R, R]^n$  est intégrable. On pose alors

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(E) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (\text{vol}_n(E \cap ]-R, R[^n) - R, R[^n) = \\ (1.14) \quad &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int \dots \int_{E \cap ]-R, R[^n} dx_1 \dots dx_n \right) \in [0, \infty]. \end{aligned}$$

<sup>6</sup>. Voir par exemple le cours de Calcul Scientifique et Symbolique [**Ycalc**], Proposition 4.6; il s'agit de ce que l'on appelle la *décomposition en valeurs singulières* (svd dans les codes des logiciels) de la matrice  ${}^t M(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ .

Un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit *négligeable* s'il est intégrable et tel que l'on ait  $\text{vol}_n(E) = 0$ .

REMARQUE 1.4. Tout sous-ensemble d'un ensemble négligeable est encore négligeable. Ainsi, tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  contenu dans une droite ou une portion de courbe est négligeable dans le plan  $\mathbb{R}^2$  ; tout sous-ensemble de l'espace  $\mathbb{R}^3$  contenu dans un plan ou une portion de surface est négligeable dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Ceci se généralise aux dimensions supérieures<sup>7</sup>. En particulier, la frontière d'un pavé fermé de  $\mathbb{R}^n$ , et donc tout sous-ensemble inclus dans cette frontière (comme une face, une arête, *etc.*), sont des sous-ensembles négligeables de  $\mathbb{R}^n$ .

Du point de vue pratique, voici comment l'on peut calculer le volume  $n$ -dimensionnel (c'est-à-dire la mesure) d'un sous-ensemble  $E$  mesurable borné (donc intégrable) de  $\mathbb{R}^n$ . On fixe un pas  $\tau > 0$  (très petit) et l'on plaque sur  $E$  un maillage régulier  $n$ -dimensionnel de pas  $\tau$  (voir la figure 1.3). On compte le nombre  $N_E(\tau)$  de cellules fermées du maillage rencontrant  $E$ . Lorsque  $\tau$  tend vers 0, on a

$$(1.15) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0_+} (\tau^n N_E(\tau)) = \text{vol}_n(E) = \int \cdots \int_E dx_1 \dots dx_n$$

( $\tau^n$  figure ici le volume  $n$ -dimensionnel d'une maille de la grille). Si  $E$  n'était pas mesurable, il se pourrait que l'on obtienne un résultat différent (strictement plus petit) en remplaçant dans (1.15)  $N_E(\tau)$  par le nombre (*a priori* strictement plus petit) de cellules fermées du maillage entièrement incluses dans  $E$ . Cette méthode numérique est inspirée d'une méthode probabiliste dite de *méthode de Monte-Carlo* : si  $E$  est un domaine plan inscrit dans  $[0, 1]^2$ , on jette  $N$  fois une pièce de monnaie de rayon  $\tau$  sur  $[0, 1]^2$ , aucun point du cadre  $[0, 1]^2$  n'étant privilégié : on compte le nombre de fois  $M_E(\tau)$  où la pièce (une fois tombée) rencontre  $E$ . Le quotient  $M_E(\tau)/N$  réalise, lorsque  $N$  est grand, une approximation  $p_\tau(E)$  de  $\text{vol}_2(E)$ . Si l'on choisit la pièce de rayon de plus en plus petit, cette approximation  $p_\tau(E)$  tend vers  $\text{vol}_2(E)$  lorsque  $\tau$  tend vers  $0_+$ .

Nous admettrons ici que la famille des sous-ensembles mesurables de  $\mathbb{R}^n$  (qui contient les ouverts et les fermés de  $\mathbb{R}^n$ , ainsi que bien sûr tous les sous-ensembles négligeables de  $\mathbb{R}^n$ ) contient tous les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  qu'il est « explicitement<sup>8</sup> » possible de décrire en termes d'ouverts (ou fermés) à partir des opérations ensemblistes usuelles (union et intersection), ainsi, bien sûr, que tous les sous-ensembles des ensembles négligeables qu'il est possible de décrire explicitement en termes d'ouverts (ou fermés) à partir de ces mêmes opérations ensemblistes usuelles. Cette famille a en particulier les trois propriétés suivantes :

- elle contient l'ensemble vide (négligeable bien sûr) ;
- si  $E$  est mesurable,  $\mathbb{R}^n \setminus E$  l'est aussi ;
- si  $(E_k)_{k \geq 1}$  est une suite de sous-ensembles mesurables, l'union  $\bigcup_{k \geq 1} E_k$  l'est aussi.

7. Par exemple, si  $m < n$  et si  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  sont  $m$  vecteurs linéairement indépendants de  $\mathbb{R}^n$ , le compact (1.11) de la Proposition 1.1 est négligeable dans  $\mathbb{R}^n$  ; il ne l'est pas en revanche dans le plus petit sous-espace vectoriel de dimension  $m$  qui le contienne, à savoir  $V(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$  (*cf.* la formule (1.12) donnant dans ce cas son volume  $m$ -dimensionnel « relatif » dans ce sous-espace).

8. C'est-à-dire par un jeu de phrases logiques n'impliquant en aucune manière l'axiome du choix hors du cadre dénombrable.

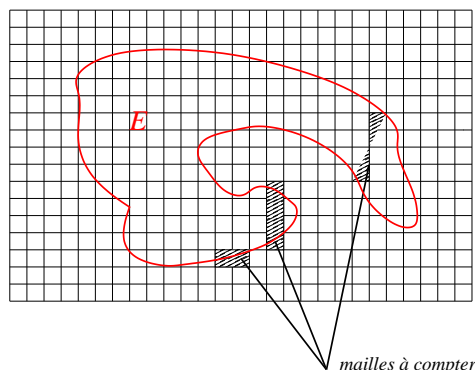


FIGURE 1.3. Volume et méthode de Monte-Carlo

Une famille de parties d'un ensemble (ici  $\mathbb{R}^n$ ) ayant ces trois propriétés est appelée *tribu* sur cet ensemble. La tribu construite ici sur  $\mathbb{R}^n$  est appelée *tribu de Lebesgue* sur  $\mathbb{R}^n$  et notée  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . L'application

$$\text{vol}_n : E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \mapsto \int \cdots \int_E dx_1 \dots dx_n \in [0, \infty]$$

est caractérisée par trois propriétés :

- (1)  $\text{vol}_n([0, 1]^n) = 1$  ;
- (2)  $\text{vol}_n(E + x) = \text{vol}_n(E)$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et tout  $E$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  (le volume d'un ensemble n'est pas affecté par une translation dans  $\mathbb{R}^n$ ) ;
- (3) pour toute suite  $(E_k)_{k \geq 1}$  d'ensembles mesurables deux à deux disjoints,

$$\text{vol}_n\left(\bigcup_{k \geq 1} E_k\right) = \sum_{k \geq 1} \text{vol}_n(E_k).$$

Les propriétés (2) et (3) constituent ce que l'on peut naturellement exiger d'une fonction « volume ». La propriété (1) correspond à une condition de *normalisation*. L'application  $\text{vol}_n : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  caractérisée par les trois propriétés ci-dessus est appelée *mesure de Lebesgue* sur  $\mathbb{R}^n$ .

Quand bien même la tribu de Lebesgue contient tous les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  qu'il est possible de décrire à partir d'opérations logiques usuelles, ainsi que tous les sous-ensembles des ensembles négligeables qu'il est possible de décrire de la même manière, il existe des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  qui ne sont pas mesurables : un célèbre paradoxe de Banach-Tarski<sup>9</sup> affirme par exemple qu'il est possible d'éclater une sphère pleine de  $\mathbb{R}^3$  en un puzzle, puis de recoller les morceaux du puzzle de manière à réaliser deux sphères, toutes deux de même volume que la sphère pleine initiale. C'est donc forcément que l'un au moins des morceaux du puzzle ne saurait se voir attribuer un volume !

## 1.2. L'intégration des fonctions sur $\mathbb{R}^n$

Toutes les fonctions intervenant dans la suite seront des fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $[0, \infty[$  ou de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Les fonctions seront toujours prolongées par 0 hors

9. Voir par exemple [http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe\\_de\\_Banach-Tarski](http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Banach-Tarski)

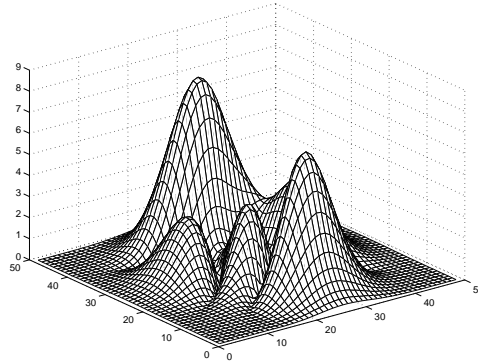


FIGURE 1.4. Le graphe d'une fonction positive sur  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $[0, 10]$

de leur domaine d'intégration ou d'étude si nécessaire (au cas où, comme c'est bien sûr le cas dans la pratique, le domaine sur lequel on veut intégrer la fonction  $f$  est un sous-ensemble intégrable et borné de  $\mathbb{R}^n$ , par exemple un pavé fermé  $[-R, R]^n$ ). Ce prolongement correspond à la méthode classique de **zeropadding** en analyse numérique. Lorsque le champ d'étude d'une fonction  $f$  se trouve être, non plus  $\mathbb{R}^n$  tout entier, mais un sous-ensemble mesurable  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  strictement inclus dans  $\mathbb{R}^n$ , on remplace donc  $f$  par  $f \times \chi_E$ , où  $E$  désigne la fonction valant 1 sur  $E$  et 0 hors de  $E$  (*fonction indicatrice de  $E$* ). Les fonctions dont il est question ici seront toujours des fonctions explicitables<sup>10</sup> (comme l'est l'ensemble  $E$  sur lequel on prétend les intégrer); la fonction  $f \times \chi_E$  est donc tout autant explicitable que  $f$  puisque  $E$  l'est.

**1.2.1. Intégrale des fonctions positives.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ . Pour définir l'intégrale de  $f$ , il faut avoir en tête, non le « graphe » de la fonction  $f$ , mais le tracé de ses lignes de niveau lorsque l'intervalle  $[0, \infty[$  est découpé en seuils  $0, h, 2h, 3h, \dots$ ,  $h$  désignant un pas strictement positif fixé (imaginez une carte en relief). Soit  $f : \mathbb{R}^n \mapsto [0, \infty[$  une fonction positive, comme sur la figure 1.4 (ici  $n = 2$ ). Sur la figure 1.5 ( $n = 2$ ), on a colorié de manière différentes les sous-ensembles  $E_k$  de  $\mathbb{R}^n$  définis par

$$E_{h,k} := \{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \in [kh, (k+1)h]\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

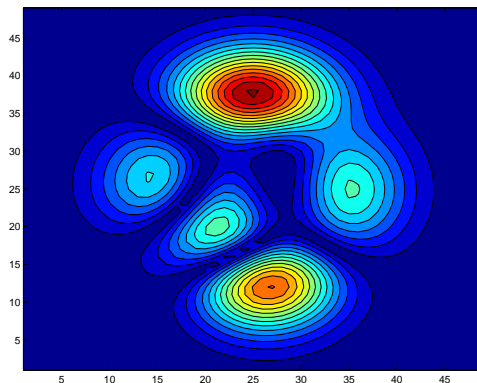
Pour chaque  $h > 0$ , la fonction

$$f_h : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} kh \chi_{E_{h,k}}(x)$$

est majorée partout sur  $\mathbb{R}^n$  par la fonction  $f$ . On remarque que le volume  $(n+1)$ -dimensionnel de

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty[ ; y \leq f_h(x)\} \subset \mathbb{R}^n \times [0, \infty[ \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

10. On ne se posera pas ici de question relativement à cette restriction sur  $f$ . Vous verrez en L3 que la restriction (théorique) consiste à supposer  $f$  mesurable, ce qui est le cas pour toutes les fonctions que nous qualifierons dans ce cours d'« explicitables » ou de « constructibles ».

FIGURE 1.5. Tracé des  $E_{h,k}$  pour  $h = 0.5$  ( $k = 0, \dots, 20$ )

(qui correspond à l'ensemble des points de coordonnée  $y \geq 0$  se trouvant sous le graphe de  $f_h$ ) vaut

$$\text{vol}_{n+1}\left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty[; y \leq f_h(x)\}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} kh \text{vol}_n(E_{h,k})$$

(on effectue un calcul de ce volume en empilant des volumes de « tranches horizontales »).

Il est par conséquent naturel de définir comme suit l'intégrale de la fonction  $f$  (au sens de Lebesgue) sur  $\mathbb{R}^n$ .

DÉFINITION 1.4 (intégrale d'une fonction positive). L'intégrale de la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$  est définie par

$$(1.16) \quad \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \sup_{h>0} \left( \sum_{k=0}^{\infty} kh \text{vol}_n(E_{h,k}) \right) \in [0, \infty]$$

Si ce nombre est fini, on dit que  $f$  est *intégrable* sur  $\mathbb{R}^n$ , ou encore que l'intégrale de la fonction positive  $f$  est convergente. Si  $f$  est de la forme  $f = g \times \chi_E$ , où  $E$  est un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^n$  et  $g$  une fonction de  $E$  dans  $[0, \infty[$  prolongée par 0 hors de  $E$ , on note

$$(1.17) \quad \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) \chi_E(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int \cdots \int_E g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

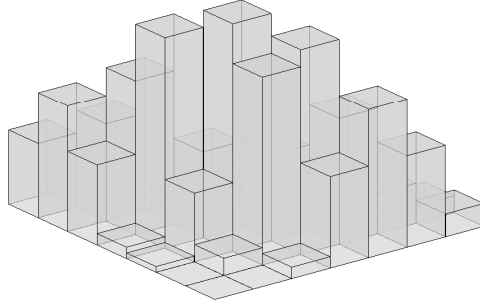
et l'on dit, si cette quantité est finie, que la fonction  $g$  est intégrable sur  $E$ , ou que l'intégrale sur  $E$  de la fonction  $g : E \rightarrow [0, \infty[$  est convergente.

EXEMPLE 1.1 (le lien avec la notion d'intégrabilité des ensembles). Si  $E$  est un sous-ensemble intégrable de  $\mathbb{R}^n$ , on a

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \text{vol}_n(E) \in [0, \infty[.$$

Si  $E$  est seulement mesurable (mais non intégrable)

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \text{vol}_n(E) = +\infty.$$

FIGURE 1.6. Le graphe d'une fonction du type  $\tilde{f}_\tau$ 

REMARQUE 1.5. Une autre manière d'envisager l'intégration d'une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$  serait d'utiliser un maillage régulier  $\mathcal{M}_\tau$  de pas  $\tau > 0$  et de considérer, au dessus de chaque maille ouverte  $C$  de ce maillage  $\mathcal{M}_\tau$ , la valeur  $\inf_{\overline{C}} f$ . La fonction

$$\tilde{f}_\tau : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{C \in \mathcal{M}_\tau} \inf_{\overline{C}} f \times \chi_C(x_1, \dots, x_n).$$

est encore une fonction positive majorée par  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Son graphe est cette fois représenté sur la figure 1.6. Le volume  $(n + 1)$ -dimensionnel de l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty[; y \leq \tilde{f}_\tau(x)\}$$

vaut cette fois

$$\text{vol}_{n+1}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty[; y \leq \tilde{f}_\tau(x)\}) = \tau^n \sum_{C \in \mathcal{M}_\tau} \inf_{\overline{C}} f$$

(on ajoute les volumes  $(n + 1)$ -dimensionnels des colonnes verticales). On pourrait donc envisager de définir l'intégrale de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  par

$$\sup_{\tau > 0} \left( \tau^n \sum_{C \in \mathcal{M}_\tau} \inf_{\overline{C}} f \right).$$

C'est cette seconde méthode (due à Riemann) à laquelle vous avez été habitués au lycée et en  $L1$ , dans le cas  $n = 1$  (voir l'introduction des sommes de Riemann ou des sommes de Darboux dans le cours Analyse 1). Un problème surgit cependant avec cette approche consistant à calculer l'intégrale des fonctions par « tubes verticales » au lieu de « tranches horizontales ». Vous verrez en L3 que l'égalité

$$(1.18) \quad \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \sup_{\tau > 0} \left( \tau^n \sum_{C \in \mathcal{M}_\tau} \inf_{\overline{C}} f \right)$$

(où le membre de gauche est défini par (1.16)) est fautive en général<sup>11</sup>, même dans le cas  $n = 1$ .

11. Si  $f$  est la fonction valant 1 sur tous les irrationnels de  $[0, 1]$  et 0 partout ailleurs, l'intégrale de gauche dans (1.18) vaut 1, tandis que la quantité de droite vaut 0.

La manière d'intégrer les fonctions positives par « tranches horizontales » (cf. la Définition 1.4), et non plus par « tubes verticaux » comme vous étiez habitués jusque là à le faire, permet en fait d'élargir la classe des fonctions positives qu'il est possible d'intégrer. Elle permet surtout, ce que nous exploiterons tout au long de ce chapitre, d'envisager de manière pratique les calculs d'intégrales multiples et de disposer de bons résultats (plus aisés en tout cas à atteindre qu'ils ne le seraient en suivant le principe de l'intégration par « tubes verticaux ») concernant l'interversion entre prise d'intégrale et prise de limite pour les suites ou les séries de fonctions (cf. le cours d'Analyse 3 en parallèle à ce cours).

La proposition suivante (que nous admettrons, bien qu'elle ne soit pas difficile<sup>12</sup>) évite cependant des surprises désagréables ; elle nous ramène, dans le cas  $n = 1$ , en terrain connu (cf. le cours de MIS100, voir par exemple [Mismi], section 3.8).

PROPOSITION 1.2. *Soit  $U$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $K$  le compact  $K = \overline{U}$ . La frontière de  $U$  est un sous-ensemble négligeable de  $\mathbb{R}^n$ , et l'on a, pour toute fonction positive continue sur  $K = \overline{U}$ ,*

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \int \cdots \int_U f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \int \cdots \int_K f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \sup_{\tau > 0} \left( \tau^n \sum_{C \in \mathcal{M}_\tau} \min_{\overline{C} \cap K} f \right) = \inf_{\tau > 0} \left( \tau^n \sum_{C \in \mathcal{M}_\tau} \max_{\overline{C} \cap K} f \right), \end{aligned}$$

où  $\mathcal{M}_\tau$  désigne ici un maillage de pas  $\tau$  de  $\mathbb{R}^n$  dont  $C$  représente la maille courante. En particulier, si  $[a, b]$  est un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f$  est une fonction continue positive sur  $[a, b]$ , on a

$$(1.20) \quad \int_{[a, b]} f(t) dt = \int_{]a, b[} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

où  $x \mapsto F(x)$  désigne n'importe quelle primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ .

La proposition 1.2 permet de calculer l'intégrale sur  $[a, b]$  de toute fonction positive continue sur  $[a, b]$ . Nous verrons dans une section ultérieure comment il sera possible d'en déduire le calcul de l'intégrale d'une fonction positive continue sur un intervalle  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}$ , contenant ou non ses bornes, ces bornes pouvant être éventuellement  $-\infty$  pour  $a$ ,  $+\infty$  pour  $b$ .

Il faut aussi noter que, lorsque l'on se trouve sous les hypothèses de la Proposition 1.2, c'est par le procédé de Riemann (addition de volumes  $(n+1)$ -dimensionnels de tubes verticaux) qu'il est le plus aisé de calculer numériquement l'intégrale

$$\int \cdots \int_U f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int \cdots \int_K f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Cette approche donne l'encadrement

$$\tau^n \sum_{C \in \mathcal{M}_\tau} \min_{\overline{C} \cap K} f \leq \int \cdots \int_K f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \leq \tau^n \sum_{C \in \mathcal{M}_\tau} \max_{\overline{C} \cap K} f$$

et fournit une approximation de l'intégrale lorsque le pas  $\tau$  du maillage tend vers 0. En revanche, l'approche consistant à calculer cette même intégrale de manière

<sup>12</sup>. C'est l'uniforme continuité de  $f$  sur  $K$  qui ici doit être exploitée.



approchée (par « tranches horizontales » cette fois) en disant que

$$\int \cdots \int_U f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \simeq \sum_{k=0}^{\infty} kh \operatorname{vol}_n(E_{h,k})$$

(pourvu que l'épaisseur  $h$  des tranches soit assez petite, approche qui sera justifiée dans la sous-section suivante) est inexploitable numériquement (car il faut calculer les volumes des sous-ensembles mesurables  $E_{h,k}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , ce qui ne s'avère pas chose facile, ces sous-ensembles pouvant être difficiles à décrire, donc à mesurer).

**1.2.2. Le théorème de convergence monotone à l'épreuve des exemples.** Le théorème de convergence monotone (ou encore de Beppo-Levi) est un avatar de la construction de l'intégrale telle qu'elle est proposée « en tranches horizontales » dans la section 1.2.1 (et non plus en « tubes verticaux » comme Riemann le suggérait, cf. la Remarque 1.5). Il a le mérite de s'appliquer à toute fonction (mesurable, *i.e.* pour nous « constructible ») positive sur  $\mathbb{R}^n$ , qu'elle soit intégrable ou non. Par contre, la limite du résultat tient au fait qu'il ne concerne que les fonctions positives.

THEORÈME 1.1 (théorème de convergence monotone). *Soit  $(f_k)_{k \geq 0}$  une suite de fonctions (constructibles) positives sur  $\mathbb{R}^n$ , monotone croissante<sup>13</sup> au sens suivant :*

$$(1.21) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{N}^*, f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$$

(on peut tolérer éventuellement que pareille inégalité soit vraie seulement presque partout, c'est-à-dire partout sauf au pire sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  de volume  $n$ -dimensionnel nul). Alors on a

$$(1.22) \quad \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) dx_1 \dots dx_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx_1 \dots dx_n \right).$$

EXEMPLE 1.2 (le lien avec l'intégrale de Riemann en dimension 1). Soit  $I = (a, b)$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  (ouvert, semi-ouvert ou fermé, borné ou non à gauche ou à droite, ou bien des deux côtés) et  $f : I \mapsto [0, \infty[$  une fonction régulière sur  $I$  (disons par exemple continue par morceaux, comme c'est en général le cas dans les questions appliquées). On a

$$\int_{(a,b)} f(t) dt = \lim_{\substack{a_n \rightarrow a_+ \\ b_n \rightarrow b_-}} \int_{a_n}^{b_n} f(t) dt = \lim_{\substack{a_n \rightarrow a_+ \\ b_n \rightarrow b_-}} (F(b_n) - F(a_n)),$$

où  $(a_n)_{n \geq 0}$  est une suite décroissant vers  $a_+$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  une suite croissant vers  $b_-$  (on applique juste le Théorème 1.1 avec la suite  $(f \chi_{[a_n, b_n]})_{n \geq 0}$ ). Ici  $F$  désigne une primitive de  $f$  sur l'intérieur  $]a, b[$  de  $(a, b)$ . Par exemple, si  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{]0, +\infty[} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{\substack{\epsilon_n \rightarrow 0_+ \\ T_n \rightarrow +\infty}} (F(T_n) - F(\epsilon_n))$$

avec  $F(t) = \ln t$  (ln désigne le *logarithme népérien*, que les logiciels de calcul scientifique manipulent souvent avec la terminologie log, toute aussi commune) si  $\alpha = 1$

13. Attention! C'est la suite qui est monotone croissante, pas les fonctions  $f_k$  (ce qui d'ailleurs n'aurait aucun sens en dimension  $n > 1$ ).

et  $F(t) = t^{1-\alpha}/(1-\alpha)$  si  $\alpha \neq 1$ . Dans les deux cas, on trouve

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty.$$

On remarque toutefois que

$$(1.23) \quad \int_{]0,1]} \frac{dt}{t^\alpha} < \infty \iff (\alpha < 1)$$

tandis que

$$(1.24) \quad \int_{[1,\infty[} \frac{dt}{t^\alpha} < \infty \iff (\alpha > 1)$$

Ces deux clauses (exclusives l'une de l'autre) constituent le *critère de Riemann* (en dimension un ici). En dimension  $n$ , où  $dt/t^\alpha$  est à remplacer par  $dx_1 \cdots dx_n/|x|^\alpha$ , on verra que le seuil pour la validité des clauses (1.23) ou (1.24) n'est plus 1, mais  $n$ , à savoir la dimension de l'espace vectoriel dans lequel on travaille.

EXEMPLE 1.3 (totaux cumulés et convergence monotone). Bien souvent, le Théorème 1.1 s'applique avec (en place de la suite  $(f_k)_{k \geq 0}$ ) une suite de fonctions  $(F_k)_{k \geq 1}$  représentant des totaux cumulés d'une autre suite de fonctions positives  $(f_k)_{k \geq 1}$ , *i.e.*

$$F_k(x) = \sum_{l=1}^k f_l(x) \quad \forall k \geq 1,$$

où les fonctions  $f_l$  (pour  $l \geq 1$ ) sont toutes des fonctions (constructibles) positives sur  $\mathbb{R}^n$ . La suite  $(F_k)_{k \geq 1}$  est bien une suite monotone croissante (car les  $f_l$  sont toutes positives sur  $\mathbb{R}^n$ ). Le résultat s'énonce alors sous la forme :

$$(1.25) \quad \begin{aligned} \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{l=1}^{\infty} f_l(x) \right) dx_1 \cdots dx_n &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \sum_{l=1}^k f_l(x) \right) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_l(x) dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

Voici par exemple le calcul de

$$\int_{]0,+\infty[} e^{-t} \left( \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \right) dt.$$

Il n'est ici pas question de chercher une primitive de la fonction sous l'intégrale ; une telle primitive (d'une fonction mélangeant ainsi exponentielle et fractions rationnelles) ne saurait (comme c'est le cas dans la quasi-totalité des situations « usuelles » surgissant dans les questions appliquées) s'exprimer à partir de fonctions simples. On remarque que

$$e^{-t} \left( \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \right) = e^{-t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{(l+2)!} \quad \forall t > 0.$$

Il résulte de (1.25) que

$$\int_{]0,+\infty[} e^{-t} \left( \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \right) dt = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+2)!} \int_{]0,+\infty[} t^l e^{-t} dt.$$

Or, pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $I_l = \int_{]0, \infty[} t^l e^{-t} dt$  se calcule immédiatement (cf. l'exemple 1.2) comme la limite, lorsque  $(\epsilon_\nu)_\nu$  tend vers 0 et  $(T_\nu)_\nu$  tend vers  $+\infty$ , de la suite de nombres

$$\int_{[\epsilon_\nu, T_\nu]} t^l e^{-t} dt = \int_{\epsilon_\nu}^{T_\nu} t^l e^{-t} dt,$$

nombres que l'on peut calculer comme des intégrales de Riemann; par parties, on trouve que  $I_l$  vaut  $l!$ . On remarque en effet que

$$(1.26) \quad \int_0^\infty t^{q+1} e^{-t} dt = [t^{q+1} e^{-t}]_0^\infty - (q+1) \int_0^\infty t^q e^{-t} dt \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{]0, +\infty[} e^{-t} \left( \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \right) dt &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)(l+2)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{l+1} - \frac{1}{l+2} \right) \end{aligned}$$

et la somme de cette série télescopique vaut 1. Finalement

$$\int_{]0, +\infty[} e^{-t} \left( \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \right) dt = 1.$$

EXEMPLE 1.4 (la fonction Gamma et la formule d'Euler *via* le théorème de convergence monotone). Pouvoir extrapoler la fonction  $k \in \mathbb{N} \mapsto k!$  en une fonction de  $]0, \infty[$  dans  $]0, \infty[$  est une question importante de par le rôle crucial joué par la fonction factorielle dans nombre de situations (expression de l'exponentielle, coefficients binomiaux, transformée de Laplace et calcul symbolique, *etc.*). On aimerait pouvoir définir  $x!$  pour  $x \in ]0, +\infty[$  et non seulement  $x = k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . On introduit pour cela la fonction

$$\Gamma : x \in ]0, \infty[ \mapsto \int_{]0, \infty[} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

En vertu du critère de Riemann (cf. l'exemple 1.2), on a

$$x > 0 \implies \int_{]0, 1]} e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_{]0, 1]} \frac{1}{t^{1-x}} dt < +\infty.$$

Comme l'exponentielle impose sa limite à toute fonction puissance, on a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{]1, \infty[} e^{-t} t^{x-1} dt \leq C(x) \int_{]1, \infty[} e^{-t/2} dt < +\infty.$$

Pour tout  $x > 0$ , on a donc

$$\int_{]0, \infty[} e^{-t} t^{x-1} dt < +\infty.$$

Pour  $x = k + 1 \in \mathbb{N}^*$ , on remarque que  $\Gamma(k + 1) = k!$  (voir les calculs (1.26) de l'exemple (1.3)). Pour  $x = 1/2$ , on déduit  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  par changement de variables à partir de la formule

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt = 1$$

traduisant le fait que la densité de la loi normale est bien une densité. Pour calculer  $\Gamma(x)$  pour  $x > 0$ , on remarque que la suite de fonctions  $(f_k)_{k \geq 1}$ , où

$$f_k(t) = (1 - t/k)^k \chi_{]0, k[}(t)$$

converge de manière monotone croissante vers  $t \mapsto e^{-t}$  sur  $]0, +\infty[$ . En effet, pour tout  $t \in ]0, k[$ ,

$$\ln(1 - t/k) = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{l+1}}{(l+1)k^{l+1}}$$

(noter les signes moins partout); on reporte ensuite dans

$$f_k(t) = (1 - t/k)^k \chi_{]0, k[}(t) = \exp\left(-t - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{l+1}}{(l+1)k^{l+1}}\right) \chi_{]0, k[}(t).$$

Le Théorème 1.1 implique donc

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad \Gamma(x) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{]0, \infty[} f_k(t) t^{x-1} dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{]0, k[} (1 - t/k)^k t^{x-1} dt \\ (1.27) \quad &= \lim_{k \rightarrow +\infty} k^x \int_{]0, 1[} (1 - u)^k u^{x-1} du. \end{aligned}$$

Un calcul de la dernière intégrale dans (1.27) par parties donne

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k! k^x}{x(x+1) \cdots (x+k)}.$$

Cette formule est connue comme la *formule d'Euler*.

### 1.3. Intégration des fonctions de signe quelconque

Le point de vue de Riemann induit le concept d'*intégrale semi-convergente*, certes très intéressant et très riche, mais délicat car de fait plus proche de la notion de *primitive* que de la notion de *calcul d'aire* ou, en dimension strictement supérieure à 2 de *volume* : une fonction définie et continue sur  $[a, b[$  induit une *intégrale semi-convergente*

$$\int_a^b f(t) dt$$

sur  $[a, b[$  si et seulement si la primitive

$$(1.28) \quad F : x \in [a, b[ \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

de  $f$  sur  $[a, b[$  admet une limite finie  $L$  lorsque  $x$  tend vers  $b$ , la valeur de l'intégrale semi-convergente (1.28) étant alors définie comme cette limite  $L$ <sup>14</sup>. Par exemple

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt := \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

existe et vaut  $\pi/2$  tandis que la divergence de la série harmonique  $\sum_{k \geq 1} 1/k$  et la  $\pi$ -périodicité de la fonction  $t \mapsto |\sin t|$  impliquent

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty.$$

<sup>14</sup>. Pour parler de l'intégrale semi-convergente sur  $]a, b[$ , il faut à la fois avoir semi-convergence sur  $]a, c[$  et  $[c, b[$  lorsque  $c$  est un point arbitraire du domaine de définition  $]a, b[$  de la fonction.

Dès que les fonctions ne sont plus positives, le concept de « *semi-convergence* » se marie mal avec celui (pré-découpage en strates de niveaux « horizontales » et non plus en colonnes « verticales » au dessus du domaine de définition) que nous évoquions et où la mesure des ensembles précède le calcul de l'intégrale des fonctions : par exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{2t}{1+t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

tandis que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^{x^2} \frac{2t}{1+t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+x^4}{1+x^2} = +\infty;$$

il n'est donc absolument pas question de parler de l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $t \mapsto 2t/(1+t^2)$  ! L'extension de la théorie de l'intégration au cadre des fonctions de signe quelconque (ou des fonctions valeurs complexes) devra prendre en compte ce type de difficulté. La notion de *semi-convergence* inhérente au point de vue Riemann ou au théorème fondamental de l'analyse ne saurait être une bonne notion dans la théorie que nous envisageons de décrire. Il n'y aura, on le verra, de fonctions intégrables que les fonctions de module intégrable, ce qui en fait nous facilitera grandement la vie<sup>15</sup>.

**1.3.1. Intégrabilité  $\iff$  absolue intégrabilité.** Comme annoncé dans le préambule ci-dessus, il nous faut nous restreindre à la définition suivante pour parler de l'intégrale d'une fonction (constructible)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ .

DÉFINITION 1.5 (intégrabilité d'une fonction). Une fonction<sup>16</sup>  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  est dite *intégrable* sur  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} |f(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n < \infty.$$

Les quatre fonctions

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f^+ &:= \sup(\operatorname{Re} f, 0), & \operatorname{Re} f^- &:= \sup(-\operatorname{Re} f, 0) \\ \operatorname{Im} f^+ &:= \sup(\operatorname{Im} f, 0), & \operatorname{Im} f^- &:= \sup(-\operatorname{Im} f, 0) \end{aligned}$$

sont alors intégrables sur  $\mathbb{R}^n$  (car  $|g| = g^+ + g^-$  si  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tandis que  $g = g^+ - g^-$ ) et l'intégrale de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  (relativement au volume  $n$ -dimensionnel  $\operatorname{vol}_n$ ) est définie comme le nombre complexe :

$$(1.29) \quad \begin{aligned} \int \cdots \int f(x) dx_1 \dots dx_n &= \int \cdots \int \operatorname{Re} f^+(x) dx_1 \dots dx_n - \int \cdots \int \operatorname{Re} f^-(x) dx_1 \dots dx_n \\ &+ i \left( \int \cdots \int \operatorname{Im} f^+(x) dx_1 \dots dx_n - \int \cdots \int \operatorname{Im} f^-(x) dx_1 \dots dx_n \right). \end{aligned}$$

REMARQUE 1.6 (clause de domination). Toute fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  dont le module est majoré par une fonction intégrable positive  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$  est encore intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ .

15. Comme s'il n'y avait de séries convergentes que les séries absolument convergentes, ce qui malheureusement n'est pas le cas bien sûr, sinon la théorie des séries perdrait tout son sel!

16. Constructible, comme toujours, cela va de soi.

### 1.3.2. Le théorème de convergence dominée à l'épreuve des exemples.

Toutes les fonctions dont il est question à partir de maintenant dans ce cours seront supposées mesurables sur  $\mathbb{R}^n$ . Pas de souci à ce niveau car, comme nous l'avons déjà mentionné, toute fonction explicitement « constructible » est mesurable. C'est bien sûr le cas pour toutes les fonctions impliquées dans les problèmes en relation avec l'ingénierie mathématique (elles sont en général continues par morceaux).

L'intégration des fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est une opération linéaire : si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions (à valeurs complexes) intégrables sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\lambda, \mu$  deux nombres complexes, la fonction  $\lambda f + \mu g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ , et l'on a

$$(1.30) \quad \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f + \mu g)(x) dx_1 \dots dx_n = \lambda \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1 \dots dx_n + \mu \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Le fait que l'on ait, pour  $N$  nombres complexes  $a_1, \dots, a_N$  l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{j=1}^N a_j \right| \leq \sum_{j=1}^N |a_j|$$

rejaillit au niveau de l'intégration en le résultat suivant : si  $f$  est une fonction à valeurs complexes intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ , on a l'inégalité (très importante en pratique pour les estimations grossières permettant de court-circuiter tout calcul explicite, qui d'ailleurs s'avèrerait le plus souvent impossible autrement que numériquement) :

$$(1.31) \quad \left| \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1 \dots dx_n \right| \leq \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx_1 \dots dx_n.$$

Si  $(f_k)_{k \geq 0}$  désigne une suite de fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$ , toutes intégrables sur  $\mathbb{R}^n$ , et telles que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  (hors éventuellement d'un ensemble de volume  $n$ -dimensionnel nul  $E$ ), la limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$$

existe et définit, une fois prolongée par 0 sur  $E$ , une fonction intégrable  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ , il est naturel de se demander si

$$(1.32) \quad \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx_1 \dots dx_n &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) \right) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Autrement dit, peut-on toujours intervertir (comme par exemple le Théorème de convergence monotone 1.1 nous y autorisait lorsque les fonctions  $f_k$  étaient toutes positives et la convergence des  $f_k$  vers  $f$  « monotone croissante ») « prise de limite » et « prise d'intégrale ». On se doute de l'importance d'un tel résultat en mathématiques appliquées, puisque la plupart des phénomènes physiques  $f$  ne sont en général connus numériquement que par le biais d'approximations  $f_k$ ,  $k \geq 0$ . La réponse est NON en règle générale. Cependant, il est un cas particulier très important où la réponse se trouve être positive (c'est en fait une conséquence assez facile du Théorème 1.1, mais que nous admettrons néanmoins ici car seul l'aspect proprement « applicatif » nous préoccupe).

THEOREME 1.2 (convergence dominée, ou de Lebesgue). Soit  $(f_k)_{k \geq 0}$  une suite de fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$  assujettie à deux hypothèses :

- une clause de domination : il existe une fonction « chapeau »  $g$ , positive, intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ , « dominant » toutes les fonctions  $|f_k|$ ,  $k \geq 0$ , i.e.

$$(1.33) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^n, |f_k(x)| \leq g(x).$$

- une hypothèse de comportement asymptotique : pour tout  $x$  hors (éventuellement) d'un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  de volume  $n$ -dimensionnel nul, la suite  $(f_k(x))_{k \geq 0}$  tend vers une limite  $f(x) \in \mathbb{C}$ .

Alors, toutes les fonctions  $f_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sont intégrables<sup>17</sup>, ainsi que la fonction  $f$  (prolongée éventuellement par 0 sur  $E$ ). De plus, on a la formule attendue (1.32), à savoir :

$$(1.34) \quad \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx_1 \dots dx_n &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) \right) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

EXEMPLE 1.5 (un exemple « d'école »). Voici un exemple artificiel pour s'initier à la pratique du théorème. Les fonctions en jeu sont ici positives, mais la convergence n'est pas *a priori* monotone. Pour tout  $t \in ]0, 1]$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$f_k(t) := k \frac{\sqrt{t} \sin(t/k)}{t^2 + \frac{1}{k}}.$$

La suite de fonctions  $(f_k)_{k \geq 1}$  est une suite de fonctions continues de  $]0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . De plus, on dispose de la clause de domination sur  $]0, 1]$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in ]0, 1], |f_k(t)| \leq \frac{t^{3/2}}{t^2 + \frac{1}{k}} \leq t^{-1/2}$$

puisque  $|\sin u| \leq u$  sur  $]0, \infty[$ . Enfin, on a le comportement asymptotique :

$$\forall t \in ]0, 1], \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(t) = t^{-1/2}.$$

Comme la fonction

$$t \in ]0, 1] \mapsto t^{-1/2} \chi_{]0, 1]}(t)$$

est un chapeau « intégrable » sur  $\mathbb{R}$ , le théorème de convergence dominée assure

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{]0, 1]} f_k(t) dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(t) \chi_{]0, 1]}(t) dt = \int_{]0, 1]} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2.$$

EXEMPLE 1.6 (un autre exemple d'école, impliquant cette fois les séries). Voici un autre exemple, impliquant cette fois une suite de fonctions de signe quelconque. Soit  $\theta \in ]0, 2\pi[$  et

$$f_\theta : t \in [0, 1[ \mapsto \frac{1}{1 - te^{i\theta}}.$$

La fonction  $f_\theta$  est continue sur  $[0, 1[$  (car le dénominateur ne s'annule pas puisque  $\theta \in ]0, 2\pi[$ ). Pour calculer explicitement l'intégrale

$$\int_{[0, 1[} f_\theta(t) dt,$$

17. Cela résulte immédiatement de la clause de domination (1.33) et de la Remarque 1.6.

on pense par exemple à développer en série (seulement lorsque  $t \in [0, 1[$ )

$$f_\theta(t) = \sum_{l=0}^{\infty} t^l e^{il\theta} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{l=0}^k t^l e^{il\theta}.$$

Si l'on pose

$$f_{\theta,k}(t) := \sum_{l=0}^k t^l e^{il\theta} \quad \forall t \in [0, 1],$$

on note que

$$f_{\theta,k}(t) = \frac{1 - t^{k+1} e^{i(k+1)\theta}}{1 - te^{i\theta}} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Il existe donc une constante  $C_\theta$  telle que

$$(1.35) \quad \forall t \in [0, 1], |f_{\theta,k}(t)| \leq \frac{2}{\min_{t \in [0,1]} |1 - te^{i\theta}|} = \frac{2}{\gamma_\theta} = C_\theta.$$

Notons cependant que, même si nous regardions la majoration de  $|f_\theta(t) - f_{\theta,k}(t)|$  donnée, pour  $t \in [0, 1[$ , par

$$|f_\theta(t) - f_{\theta,k}(t)| = \left| \sum_{l=k+1}^{\infty} t^l e^{il\theta} \right| = \left| \frac{t^{k+1} e^{i(k+1)\theta}}{1 - te^{i\theta}} \right| \leq \frac{1}{|1 - te^{i\theta}|},$$

celle-ci ne garantit en rien la convergence uniforme de  $f_{\theta,k}$  vers  $f_\theta$  sur  $[0, 1]$  (en défaut ici d'ailleurs)! Profitant de la clause de domination (1.35) et du fait que

$$\forall t \in [0, 1[, \lim_{k \rightarrow +\infty} f_{\theta,k}(t) = f_\theta(t)$$

(hypothèse de comportement asymptotique), nous pouvons, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, affirmer que

$$\int_{[0,1]} f_\theta(t) dt = \int_{[0,1]} f_\theta(t) dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} f_{\theta,k}(t) dt.$$

Or

$$\int_{[0,1]} f_{\theta,k}(t) dt = \int_{[0,1]} f_{\theta,k}(t) dt = \sum_{l=0}^k e^{il\theta} \int_0^1 t^l dt = \sum_{l=0}^k \frac{e^{il\theta}}{l+1}.$$

Nous obtenons ainsi au final la formule

$$\int_{[0,1]} \frac{dt}{1 - te^{i\theta}} = \int_{[0,1]} \frac{dt}{1 - te^{i\theta}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{l=0}^k \frac{e^{il\theta}}{l+1}.$$

La convergence de la série numérique de terme général  $u_k = e^{ik\theta}/(k+1)$  (qui n'est pas, notons-le, une série absolument convergente) n'est en fait nullement évidente (elle résulte du lemme d'Abel, voir le cours d'Analyse 3). On voit donc ici en action toute la puissance du théorème de convergence dominée : non seulement on prouve la convergence (subtile) de cette série numérique, mais on relie la valeur de sa somme au calcul d'une intégrale. Le calcul de la somme peut s'avérer d'ailleurs plus direct que le calcul numérique de l'intégrale.



### 1.4. Les intégrales fonction de paramètres

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue trouve son meilleur champ d'application dans l'étude des intégrales sur  $\mathbb{R}^n$  qui se présentent comme dépendant d'un paramètre  $\lambda$  ou même de plusieurs  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  figurant sous la prise d'intégrale, ces paramètres pouvant être réels, voire complexes. De très nombreuses transformations mathématiques font surgir de telles intégrales. En voici quelques exemples.

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ , sa *transformée de Fourier* est la fonction

$$(1.36) \quad \omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \widehat{f}(\omega) := \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle \omega, x \rangle} dx,$$

où

$$\langle \omega, x \rangle := \sum_{j=1}^n \omega_j x_j.$$

Dans le cas où  $n = 2$ , elle est matérialisée par l'opération optique de *diffraction* à travers une lentille. Le fait que l'intégrale dans (1.36) soit définie résulte de la Remarque 1.6. Cette intégrale est fonction de  $n$  paramètres réels  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ .

Si  $f$  est une fonction  $]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $]0, \infty[$  figure ici le domaine temporel causal ( $t > 0$ ), telle qu'il existe un « seuil »  $x \in \mathbb{R}$  de manière à ce que

$$(1.37) \quad \int_{]0, \infty[} |f(t)| e^{-xt} dt < +\infty,$$

sa *transformée de Laplace*  $\mathcal{L}[f]$  est la fonction

$$(1.38) \quad p \in \{\operatorname{Re} p > x_0\} \mapsto \mathcal{L}[f](p) = \int_{]0, \infty[} f(t) e^{-pt} dt,$$

où  $x_0$  désigne la borne inférieure de l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}$  satisfaisant (1.37). Ici encore, la Remarque 1.6 assure la définition de l'intégrale fonction du paramètre (complexe)  $p$  figurant en (1.38).

Si  $f$  est une fonction de  $]0, \infty[$  dans  $\mathbb{C}$  telle que l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}$  tels que

$$\int_{]0, \infty[} |f(t)| t^{x-1} dt < +\infty$$

soit non vide et que

$$(1.39) \quad \begin{aligned} -\infty \leq x_0^- &:= \inf \left\{ x \in \mathbb{R}; \int_{]0, 1]} |f(t)| t^{x-1} dt < \infty \right\} \\ &< \sup \left\{ x \in \mathbb{R}; \int_{]1, \infty[} |f(t)| t^{x-1} dt < \infty \right\} := x_0^+ \leq +\infty, \end{aligned}$$

la Remarque 1.6 permet de définir dans la bande verticale  $]x_0^-, x_0^+[ + i\mathbb{R}$ , la *transformée de Mellin*  $\mathcal{M}[f]$  :

$$(1.40) \quad \lambda \in ]x_0^-, x_0^+[ + i\mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}[f](\lambda) := \int_{]0, \infty[} f(t) t^{\lambda-1} dt.$$

Transformées de Laplace et de Mellin ont aussi des versions « multivariées » lorsque  $f$  est une fonction de  $]0, \infty[^p$  dans  $\mathbb{C}$ , ou, plus généralement une fonction définie

dans un cône ouvert de  $\mathbb{R}^p$  de sommet l'origine et à valeurs complexes. La transformation de Fourier est un outil fondamental en physique et en mathématiques appliquées (théorie des EDP). La transformation de Laplace joue un rôle majeur en théorie de l'information et calcul symbolique (en ingénierie mathématique). La transformation de Mellin est devenue aujourd'hui un outil important en analyse et traitement d'images.

REMARQUE 1.7 (que faire si le paramètre est aussi dans les bornes de l'intégrale?). Lorsque le paramètre  $\lambda$  dont dépend l'intégrale se trouve aussi présent dans les bornes de l'intégrale multiple, comme par exemple dans l'étude d'une fonction dy type

$$\lambda \in U \subset \mathbb{R}^p \mapsto \int \cdots \int_{A_\lambda \subset \mathbb{R}^n} f_\lambda(x) dx_1 \dots dx_n,$$

on convient de le faire « rentrer » d'office à l'intérieur en remarquant

$$\int \cdots \int_{A_\lambda \subset \mathbb{R}^n} f_\lambda(x) dx_1 \dots dx_n = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x) \chi_{A_\lambda}(x) dx_1 \dots dx_n,$$

où  $\chi_{A_\lambda}$  désigne la fonction valant 1 sur l'ensemble  $A_\lambda$  et 0 ailleurs. Si  $n = 1$  et que  $A_\lambda = [u_\lambda, v_\lambda]$ , on peut aussi étudier la fonction

$$F : (u, v, \lambda) \mapsto \int_u^v f_\lambda(t) dt$$

et (s'il s'agit par exemple de différentiabilité par rapport au paramètre  $\lambda$ ), calculer les dérivées partielles de cette fonction par rapport aux variables  $u, v, \lambda$  avant l'appliquer la règle de différentiation des fonctions composées pour différentier dans un second temps

$$\lambda \mapsto F(u_\lambda, v_\lambda, \lambda).$$

**1.4.1. Continuité des intégrales fonction d'un ou plusieurs paramètres réels ou complexes.** Dans cette sous-section,  $U$  désigne un sous-ensemble quelconque de  $\mathbb{R}^p$  ou de  $\mathbb{C}^p$ . On considère une famille  $(f_\lambda)_{\lambda \in U}$  de fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$ .

Nous faisons deux hypothèses sur cette famille  $(f_\lambda)_{\lambda \in U}$ .

- Tout d'abord une hypothèse de continuité par rapport au paramètre : pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  (hormis éventuellement pour les points d'un sous-ensemble de volume  $n$ -dimensionnel nul), la fonction

$$\lambda \in U \mapsto f_\lambda(x)$$

est une fonction continue sur  $U$  (c'est-à-dire en tout point de  $U$ ).

- Ensuite une hypothèse de domination : il existe une fonction intégrable positive  $g_U : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ , telle que

$$(1.41) \quad \forall \lambda \in U, \forall x \in \mathbb{R}^n, |f_\lambda(x)| \leq g_U(x).$$

Sous ces hypothèses, on peut affirmer deux choses :

- D'une part (du fait de la Remarque 1.6), la fonction  $f_\lambda$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n$  pour tout  $\lambda \in U$ , ce qui permet donc de définir l'intégrale à paramètres :

$$\lambda \in U \mapsto \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x) dx_1 \dots dx_n.$$

- D'autre part, en vertu cette fois du théorème de convergence dominée<sup>18</sup> (Théorème 1.2), la fonction

$$\lambda \in U \mapsto \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x) dx_1 \dots dx_n$$

est continue dans  $U$ .

REMARQUE 1.8 (caractère local de la continuité). Il ne faut pas perdre de vue que la continuité d'une fonction est une propriété qui se teste « localement ». Si l'on prétend prouver la continuité de

$$\lambda \in U \mapsto \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x) dx_1 \dots dx_n$$

sur un « gros » sous-ensemble  $U$ , il faut, plutôt que de chercher (ce qui s'avère souvent impossible) un « chapeau »  $g_U$  de manière à ce que soit remplie la clause de domination (1.41), se contenter de trouver, pour chaque point  $\lambda_0$  de  $U$ , un voisinage  $U(\lambda_0) \subset U$  de ce point dans  $U$  et un « chapeau »  $g_{U(\lambda_0)}$  couplé avec le choix de ce voisinage (de manière à ce que (1.41) soit valable avec  $U(\lambda_0)$  en place de  $U$ ).

EXEMPLE 1.7. Les transformées de Fourier (1.36), Laplace (1.38), Mellin (1.40) sont continues dans leurs ouverts de définition respectifs.

**1.4.2. Différentiabilité des intégrales fonction de plusieurs paramètres complexes.** Plus intéressant encore, car il fournit le moyen de calculer des intégrales à partir d'autres, nous avons un résultat concernant la *différentiabilité* des intégrales fonctions de  $p$  paramètres réels.

Dans cette sous-section,  $U$  désigne cette fois un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ . On considère une famille  $(f_\lambda)_{\lambda \in U}$  de fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$ , supposées cette fois toutes intégrables dans  $\mathbb{R}^n$ .

Nous faisons deux hypothèses sur cette famille  $(f_\lambda)_{\lambda \in U}$ .

- Tout d'abord une hypothèse de  $C^1$ -régularité par rapport au paramètre : pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  (hormis éventuellement pour les points d'un sous-ensemble de volume  $n$ -dimensionnel nul), la fonction

$$\lambda \in U \mapsto f_\lambda(x)$$

est une fonction de classe  $C^1$  dans  $U$ .

- Ensuite une hypothèse de domination : il existe une fonction intégrable positive  $g_U : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ , telle que

$$(1.42) \quad \forall \lambda \in U, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|\nabla_\lambda[f_\lambda(x)]\| \leq g_U(x)$$

(notez bien que la condition porte ici sur le gradient  $\nabla_\lambda[f_\lambda(x)]$  par rapport aux variables  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ , à  $x$  chaque fois fixé).

Sous ces hypothèses, on peut affirmer deux choses (en vertu du Théorème de convergence dominée 1.2) :

---

18. Pour vérifier la continuité d'une fonction en un point de  $\mathbb{R}^p$  ou  $\mathbb{C}^d$ , il suffit de s'assurer de la continuité séquentielle en ce point, *i.e.* de tester la continuité sur les suites tendant vers ce point dans  $\mathbb{R}^p$  ou  $\mathbb{C}^d$ .

– D'une part (du fait de la Remarque 1.6), les  $p$  fonctions

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \mapsto \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda_j}(x) dx_1 \dots dx_n, \quad j = 1, \dots, p$$

sont définies et continues sur  $U$ .

– D'autre part (c'est le Théorème 1.2 en action, couplé avec l'inégalité des accroissements finis), la fonction

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in U \mapsto \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x) dx_1 \dots dx_n$$

est de classe  $C^1$  dans  $U$  et ses  $p$  dérivées partielles se calculent dans  $U$  via les formules

$$(1.43) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[ \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x) dx_1 \dots dx_n \right] &= \\ &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial [f_\lambda(x)]}{\partial \lambda_j} dx_1 \dots dx_n, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

REMARQUE 1.9 (caractère local de la différentiabilité). Il ne faut pas perdre de vue que la différentiabilité d'une fonction est une propriété qui se teste « localement ». Si l'on prétend prouver le caractère  $C^1$  de

$$\lambda \in U \mapsto \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x) dx_1 \dots dx_n$$

sur un « gros » ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ , il faut, plutôt que de chercher (ce qui s'avère souvent impossible) un « chapeau »  $g_U$  de manière à ce que soit remplie la clause de domination (1.42), se contenter de trouver, pour chaque point  $\lambda_0$  de  $U$ , un voisinage ouvert  $U(\lambda_0) \subset U$  de ce point dans  $U$  et un « chapeau »  $g_{U(\lambda_0)}$  couplé avec le choix de ce voisinage (de manière à ce que (1.42) soit valable avec  $U(\lambda_0)$  en place de  $U$ ).

DÉMONSTRATION. On se contente de prouver ce résultat si  $p = 1$ . Dans le cas  $p > 1$ , on se contentera en effet d'utiliser l'équivalence entre le fait qu'une fonction soit de classe  $C^1$  dans un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et le fait que cette fonction admette des dérivées partielles continues dans cet ouvert.

On pose alors, pour  $\lambda$  fixé dans  $U$  :

$$F(\lambda) := \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Il suffit de prouver, en utilisant le Théorème de Lebesgue 1.2, que, si  $(h_k)_{k \geq 0}$  est une suite tendant vers 0 dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{F(\lambda + h_k) - F(\lambda)}{h_k} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_{\lambda+h_k}(x) - f_\lambda(x)}{h_k} dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{d\lambda} [f_\lambda(x)] dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

On utilise pour justifier la clause de domination permettant le recours ici au théorème de Lebesgue 1.2 l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \left| \frac{f_{\lambda+h_k}(x) - f_\lambda(x)}{h_k} \right| \leq \sup_{\xi \in [\lambda, \lambda+h_k]} \left| \frac{d}{d\xi} [f_\xi(x)] \right| \leq g_U(x).$$

□

Nous donnerons plusieurs exemples d'application de ce résultat dans la sous-section ultérieure.

**1.4.3. Exemples.** Le résultat présenté dans la sous-section 1.4.2 concernant la régularité  $C^1$  des intégrales fonction d'un ou plusieurs paramètres réels est dans la pratique utilisé pour calculer de nouvelles intégrales à partir d'intégrales déjà connues. Mais on peut également l'exploiter pour calculer des intégrales inconnues en les considérant comme intégrales fonction de paramètres, puis en les différentiant (si tant est que ceci soit licite) suivant ces paramètres pour former des équations différentielles (EDO) ou des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) dont elles sont solutions (quitte ensuite, lorsque cela s'avère possible, à intégrer ces EDO ou ces systèmes d'EDP pour calculer explicitement les intégrales). En voici quelques exemples.

EXEMPLE 1.8 (Intégrales fonction de paramètres et EDO, un exemple d'« école »). Considérons les intégrales fonction d'un paramètre

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{[0, \infty[} \cos(xt) e^{-t^2} dt, \quad G : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{[0, \infty[} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t^2} dt.$$

L'objectif est ici de calculer ces deux fonctions. Comme

$$\forall t \in [0, \infty[, \quad |\cos(xt)| e^{-t^2} \leq e^{-t^2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\sin(xt)}{t} \right| e^{-t^2} \leq |x| e^{-t^2},$$

puisque  $|\sin u| \leq |u|$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , et que la fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  est intégrable sur  $]0, \infty[$ ,  $F$  et  $G$  existent bien puisque les fonctions sous l'intégrale sont dominées en valeur absolue par des fonctions intégrables (cf. la Remarque 1.6). Pour chaque  $t \in ]0, \infty[$ , les fonctions

$$x \mapsto \cos(xt) e^{-t^2}, \quad x \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t^2}$$

sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ , de dérivées respectives les fonctions  $x \mapsto -t \sin(xt) e^{-t^2}$  et  $x \mapsto \cos(xt) e^{-t^2}$ . Comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in ]0, \infty[, \quad |\cos(xt)| e^{-t^2} + t |\sin(xt)| e^{-t^2} \leq (1+t) e^{-t^2}$$

et que la fonction  $t \mapsto (1+t) e^{-t^2}$  est intégrable sur  $[0, \infty[$ , la clause de domination (1.42) est bien remplie (dans les deux cas) et les deux fonctions  $F$  et  $G$  sont donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , de dérivées respectives

$$F'(x) = - \int_{[0, \infty[} t \sin(xt) e^{-t^2} dt, \quad G'(x) = \int_{[0, \infty[} \cos(xt) e^{-t^2} dt = F(x).$$

Une intégration par parties nous donne

$$F'(x) = \left[ -\sin(xt) \frac{e^{-t^2}}{2} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x \cos(xt) e^{-t^2} dt = -\frac{x}{2} F(x).$$

Une intégration immédiate de cette équation différentielle du premier ordre nous donne

$$F(x) = F(0) e^{-x^2/4} = e^{-x^2/4} \times \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$$

(on admet ici<sup>19</sup>  $\int_{]0, \infty[} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$ ). Puisque  $G' = F$ , on a

$$G(x) = G(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^x e^{-t^2/4} dt.$$

Or  $G(0) = \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 0$  grâce au théorème de convergence dominée puisque

$$\left| \frac{\sin(xt)}{t} \right| e^{-t^2} \leq |x| e^{-t^2} \leq e^{-t^2}$$

si  $|x| \leq 1$ ; donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty e^{-t^2/4} dt = \frac{\pi}{2}.$$

On remarque aussi (en effectuant le changement de variables  $u = tx$ ) que

$$(1.44) \quad G(x) = \int_{]0, \infty[} \frac{\sin u}{u} e^{-u^2/x^2} du.$$

Du fait du critère des séries alternées, on sait que la limite, lorsque  $T$  tend vers  $+\infty$  de

$$\Phi : T \in [0, \infty[ \mapsto \int_0^T \frac{\sin u}{u} du$$

existe (bien que la fonction  $u \in [0, \infty[ \mapsto \sin u/u$  ne soit pas, notons le, intégrable<sup>20</sup> sur  $[0, +\infty[$ ). Une intégration par parties à partir de (1.44) montre que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} G(x) &= \left[ (\Phi(u) - \Phi(\infty)) e^{-u^2/x^2} \right]_0^\infty - \int_0^\infty (\Phi(u) - \Phi(\infty)) d[e^{-u^2/x^2}] = \\ &= \Phi(\infty) - \int_0^\infty (\Phi(t) - \Phi(\infty)) d[e^{-u^2/x^2}] \\ &= \Phi(\infty) - \int_0^T (\Phi(u) - \Phi(\infty)) d[e^{-u^2/x^2}] - \int_T^\infty (\Phi(u) - \Phi(\infty)) d[e^{-u^2/x^2}]. \end{aligned}$$

Si  $\epsilon > 0$  est donné, on voit qu'en prenant  $T$  assez grand, on a

$$\left| \int_T^\infty (\Phi(u) - \Phi(\infty)) d[e^{-u^2/x^2}] \right| \leq \epsilon \int_T^\infty |d[e^{-u^2/x^2}]| = \epsilon e^{-T^2/x^2} = \epsilon.$$

D'autre part, pour ce choix de  $T$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T (\Phi(u) - \Phi(\infty)) d[e^{-u^2/x^2}] \right| &\leq 2 \sup_{]0, \infty[} |\Phi| \times \int_0^T |d[e^{-u^2/x^2}]| \\ &= 2 \sup_{]0, \infty[} |\Phi| \times (1 - e^{-T^2/x^2}). \end{aligned}$$

En faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$ , on en conclut que  $\Phi(\infty)$  est aussi égal à la limite de la fonction  $G$  à l'infini, soit la *formule de Dirichlet* :

$$(1.45) \quad \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du := \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \frac{\sin u}{u} dt = \frac{\pi}{2}.$$

19. Ceci sera justifié plus loin, avec le théorème de Fubini concernant le calcul d'intégrales multiples.

20. Ceci est lié au fait que la fonction  $u \mapsto |\sin u|$  est périodique de période  $\pi$ , tandis que la série harmonique  $\sum_{k \geq 1} 1/k$  diverge. En revanche, la convergence de la série alternée  $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1}/k$  (de somme  $\ln 2 = [\ln(1+x)]_{|x=1}$ , cf. le cours d'Analyse 3) explique l'existence de la limite de  $T \mapsto \int_0^T (\sin u/u) du$  lorsque  $T$  tend vers l'infini.

EXEMPLE 1.9 (différentiation de la transformation de Fourier). Voici un second exemple d'application du résultat établi dans la sous-section 1.4.2, touchant cette fois la transformation intégrale de Fourier (dite aussi *prise de spectre*) qui a été introduite en (1.36)). Il s'agit là d'un résultat majeur, tant du point de vue de la physique que des mathématiques (théorie des EDP). Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction telle que, pour un certain  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$(1.46) \quad \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^N |f(x)| dx_1 \dots dx_n < +\infty.$$

La transformée de Fourier de  $f$  est alors la fonction :

$$\omega \in \mathbb{R}^n \mapsto \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(\omega, x)} dx_1 \dots dx_n$$

(qui est bien définie et est même une fonction continue sur  $\mathbb{R}^n$  puisque la condition (1.46) implique que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ ). D'après le résultat prouvé dans la sous-section (1.4.2) (appliqué ici  $N$  fois inductivement), cette fonction est une fonction de classe  $C^M$  sur  $\mathbb{R}^n$ . De plus, pour tout opérateur différentiel

$$(1.47) \quad D = \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} \circ \cdots \circ \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_n^{k_n}}, \quad k_1 + \cdots + k_n \leq N,$$

on a

$$(1.48) \quad \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} \circ \cdots \circ \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_n^{k_n}} [\widehat{f}](\omega) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \left( \prod_{j=1}^n (-ix_j)^{k_j} \right) f(x) e^{-i(\omega, x)} dx_1 \dots dx_n.$$

On reconnaît au second membre de (1.48) la transformée de Fourier de la fonction

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \prod_{j=1}^n (-ix_j)^{k_j} f(x).$$

Autrement dit, différentier le spectre d'une fonction  $f$  revient à calculer le spectre de la fonction obtenue en multipliant  $f$  par la fonction monomiale  $(-ix_1)^{k_1} \dots (-ix_n)^{k_n}$  correspondant à l'opérateur différentiel (1.47). Dans le cas particulier  $n = 1$ , la transformée de Fourier de la gaussienne

$$g : t \mapsto \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

(normalisée ici de manière à avoir pour intégrale 1) est une fonction  $\widehat{g}$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \widehat{g}(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt \right) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left( [e^{-t^2/2} e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-i(\omega, t)} dt \right) \\ &= -\omega \times \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt \right). \end{aligned}$$

On a donc  $\widehat{g}'(\omega) = -\omega \widehat{g}(\omega)$  pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ . En intégrant cette équation différentielle du premier ordre, on trouve que

$$\widehat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi} g(\omega),$$

autrement dit,  $g$  est une fonction propre (associée à la valeur propre  $\sqrt{2\pi}$ ) de l'opération de prise de spectre. C'est ici la raison pour laquelle les gaussiennes

(réalisant le meilleur « compromis » entre une « bonne » localisation des particules et une « bonne » localisation de leur spectre) sont des modèles fondamentaux en physique ou en imagerie mathématique.

EXEMPLE 1.10 (le caractère  $C^1$  se teste localement : le problème de Dirichlet dans un demi-plan). Il faut toujours avoir en tête la Remarque 1.9 lorsqu'il s'agit d'assurer une condition de domination du type (1.42). Soit par exemple une fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt < +\infty.$$

Dans le demi-plan  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ , on peut donc définir la fonction

$$(1.49) \quad (x, y) \mapsto \frac{2y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t) dt}{(x-t)^2 + y^2}.$$

Il est facile de vérifier que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la fonction

$$(1.50) \quad (x, y) \mapsto \frac{2y}{\pi} \left( \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2} \right) = \frac{1}{i\pi} \left( \frac{f(t)}{x-t-iy} - \frac{f(t)}{x-t+iy} \right)$$

est une fonction  $C^\infty$  harmonique dans  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ , *i.e.* annulée par l'opérateur Laplacien  $\Delta_{x,y} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ . Pour montrer que la fonction (1.49) est aussi  $C^\infty$  et harmonique dans ce même demi-plan  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ , il faut travailler chaque fois au voisinage d'un point  $(x_0, y_0)$ , avec  $y_0 > 0$ , donné. On montre que, si  $\overline{D(x_0, y_0)}$  désigne le disque fermé de centre  $(x_0, y_0)$  et de rayon  $y_0/2$  dans  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ , il existe des constantes strictement positives  $\kappa_{\overline{D(x_0, y_0)}}$  et  $K_{\overline{D(x_0, y_0)}}$  telles que,

$$(1.51) \quad \forall (x, y) \leftrightarrow z = x + iy \in \overline{D(x_0, y_0)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \kappa_{\overline{D(x_0, y_0)}} \leq \frac{|t-z|}{|t-z_0|} \leq K_{\overline{D(x_0, y_0)}}.$$

On déduit des inégalités (1.51) une clause de domination du type (1.42) pour toutes les dérivées partielles (d'ordre total  $K \in \mathbb{N}^*$ ) de la fonction (1.50) (par rapport aux variables  $x$  et  $y$ ), ce pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , pour tout  $(x, y) \in \overline{D(x_0, y_0)}$ , par un « chapeau » intégrable de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto C_K(\overline{D(x_0, y_0)}) \frac{|f(t)|}{|t - (x_0 + iy_0)|^{K+1}}.$$

La fonction (1.49) est donc à la fois  $C^\infty$  et harmonique dans le demi-plan ouvert  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ . De plus, si  $f$  est supposée continue sur  $\mathbb{R}$ , on pourra vérifier que cette fonction se prolonge en une fonction continue dans  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$ , dont la restriction à l'axe réel (frontière de ce demi-plan fermé) est la fonction  $f$ . On a ainsi su trouver un prolongement harmonique de  $f$  dans chacun des demi-plans dont  $\mathbb{R}$  est la frontière et résolu dans ce cas le *problème de Dirichlet*. Un problème similaire peut être posé cette fois dans une boule de  $\mathbb{R}^n$ , ou plus généralement l'adérence  $K$  d'un ouvert relativement compact, au lieu d'un demi plan, comme c'est le cas ici,  $K$  faisant alors figure d'« obstacle ».

**1.4.4. Différentiabilité au sens complexe des intégrales fonction d'un paramètre complexe.** Une fonction  $f$  définie dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  et à valeurs complexes admet une dérivée au sens complexe dans  $U$  si et seulement si, pour



tout point  $\zeta_0$  de  $U$ , la limite, lorsque  $h$  dans vers 0 dans  $\mathbb{C}$ , du « taux de variation complexe »

$$\frac{f(\zeta_0 + h) - f(\zeta_0)}{h}$$

existe dans  $\mathbb{C}$ ; on la note alors  $(df/d\zeta)(\zeta_0)$  ou encore  $f'(\zeta_0)$ . Si

$$f : \zeta = \xi + i\eta \in U \mapsto f(\xi + i\eta) = P(\xi, \eta) + iQ(\xi, \eta) \in \mathbb{C}$$

ceci est équivalent à dire que  $\mathbf{f} : (\xi, \eta) \mapsto (P(\xi, \eta), Q(\xi, \eta))$  est différentiable (comme application cette fois d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ ) en tout point  $(\xi_0, \eta_0)$  de  $U$  et que l'application linéaire tangente  $d\mathbf{f}_{(\xi_0, \eta_0)} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  est, pour chacun de ces points  $(\xi_0, \eta_0)$ , une similitude directe<sup>21</sup>. Une telle fonction  $f$  admet des dérivées au sens complexe à tout ordre et se représente au voisinage de chaque point  $\zeta_0$  de  $U$  comme la somme de la série de Taylor

$$(1.52) \quad f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{d\zeta^k}(\zeta_0) (\zeta - \zeta_0)^k$$

(le rayon de convergence de cette série entière

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{d\zeta^k}(\zeta_0) X^k$$

étant au moins égal à la distance de  $\zeta_0$  au bord de  $U$ ).

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $(f_\zeta)_{\zeta \in U}$  une collection de fonctions  $f_\zeta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , sur laquelle on fait deux hypothèses :

- Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  (hormis éventuellement les points d'un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  de volume  $n$ -dimensionnel nul), la fonction

$$\zeta \in U \mapsto f_\zeta(x)$$

admet une dérivée au sens complexe dans l'ouvert  $U$  (clause de régularité par rapport au paramètre).

- Il existe une fonction positive intégrable  $g_U : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$  telle que l'on ait la clause de domination suivante :

$$(1.53) \quad \forall \zeta \in U, \forall x \in \mathbb{R}^n, |f_\zeta(x)| \leq g_U(x)$$

(clause de domination, qui, notons le, ne fait pas apparaître<sup>22</sup> la dérivée au sens complexe de  $\lambda \mapsto f_\lambda(x)$ ).

Le Théorème de convergence dominée de Lebesgue 1.2 permet alors d'affirmer :

- d'une part que, pour tout  $\zeta \in U$ , la fonction  $f_\zeta$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n$  (puisque de module majoré par la fonction intégrable  $g_U$  d'après (1.53));

21. La raison pour lesquelles pareilles fonctions sont souvent présentes en mathématiques appliquées tient à l'important *principe de moindre action* : ce sont les transformations d'un ouvert du plan dans lui-même qui, au niveau infinitésimal, préservent la forme et l'orientation des figures. En effet les similitudes directes (composées de rotations et homothéties) de rapport d'homothétie non nul sont les seules transformations linéaires préservant les angles orientés.

22. L'explication en est que la dérivée au sens complexe  $d[f_\zeta(x)]/d\zeta$  est majorée au voisinage d'un point  $\zeta_0$  de  $U$  arbitraire par une constante fois le sup des  $|f_\zeta(x)|$  lorsque  $\zeta$  est assez voisin de  $\zeta_0$ . Ceci s'explique par l'extrême « rigidité » des fonctions ayant une dérivée au sens complexe en tout point d'un ouvert de  $\mathbb{C}$  (de telles fonctions ne sont pas loin de ressembler, au moins localement, aux fonctions polynomiales de la variable complexe  $\zeta$ , du fait de la formule de représentation (1.52)).

– d'autre part, que la fonction

$$\zeta \in U \mapsto \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_\zeta(x) dx_1 \dots dx_n$$

admet une dérivée au sens complexe dans  $U$  ;

– enfin que la fonction  $x \rightarrow (d/d\zeta)[f_\zeta(x)]$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n$  pour tout  $\zeta$  dans  $U$ , et que l'on a en prime dans  $U$  :

$$(1.54) \quad \frac{d}{d\zeta} \left[ \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_\zeta(x) dx_1 \dots dx_n \right] = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{d\zeta} [f_\zeta(x)] dx_1 \dots dx_n.$$

REMARQUE 1.10 (caractère local de la différentiabilité au sens complexe). Il ne faut pas perdre de vue ici encore que la différentiabilité d'une fonction au sens complexe dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  est une propriété qui se teste « localement ». Si l'on prétend prouver le caractère différentiable au sens complexe de

$$\zeta \in U \mapsto \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_\zeta(x) dx_1 \dots dx_n$$

sur un « gros » ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ , il faut, plutôt que de chercher (ce qui s'avère souvent impossible) un « chapeau »  $g_U$  de manière à ce que soit remplie la clause de domination (1.53), se contenter de trouver, pour chaque point  $\zeta_0$  de  $U$ , un voisinage ouvert  $U(\zeta_0) \subset U$  de ce point dans  $U$  et un « chapeau »  $g_{U(\zeta_0)}$  couplé avec le choix de ce voisinage (de manière à ce que (1.53) soit valable avec  $U(\zeta_0)$  en place de  $U$ ).

Ce résultat a beaucoup d'applications pratiques car nombre d'intégrales fonction de paramètres mobilisées en ingénierie mathématique sont explicitement fonction d'un paramètre complexe plutôt que d'un ou plusieurs paramètres réels.

EXEMPLE 1.11 (transformée de Laplace). Soit  $f$  une fonction de  $]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  telle qu'il existe un « seuil »  $x$  tel que

$$(1.55) \quad \int_{]0, \infty[} |f(t)| e^{-xt} dt < +\infty$$

et  $x_0$  la borne inférieure (dans  $[-\infty, +\infty[$ ) de l'ensemble (non vide) des nombres réels  $x$  satisfaisant (1.55). La transformée de Laplace de  $f$  :

$$\mathcal{L}[f] : p \in \{\operatorname{Re} p > x_0\} \mapsto \int_{]0, +\infty[} f(t) e^{-pt} dt$$

admet des dérivées au sens complexe à tout ordre dans le demi-plan  $\{\operatorname{Re} p > x_0\}$  et l'on a dans ce demi-plan droit ouvert, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{d^k}{dp^k} \left[ \int_{]0, +\infty[} f(t) e^{-pt} dt \right] = \int_{]0, +\infty[} f(t) (-t)^k e^{-pt} dt$$

(l'intégrale au second membre étant convergente au sens de Lebesgue).

EXEMPLE 1.12 (transformée de Mellin). Soit  $f$  une fonction de  $]0, \infty[$  dans  $\mathbb{C}$  telle que l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}$  tels que

$$\int_{]0, \infty[} |f(t)| t^{x-1} dt < +\infty$$

soit non vide et que

$$(1.56) \quad \begin{aligned} -\infty \leq x_0^- &:= \inf \left\{ x \in \mathbb{R}; \int_{]0,1[} |f(t)| t^{x-1} dt < \infty \right\} \\ &< \sup \left\{ x \in \mathbb{R}; \int_{]1,\infty[} |f(t)| t^{x-1} dt < \infty \right\} := x_0^+ \leq +\infty, \end{aligned}$$

Dans la bande verticale  $]x_0^-, x_0^+[ + i\mathbb{R}$ , la transformée de Mellin  $\mathcal{M}[f]$  définie par

$$(1.57) \quad \lambda \in ]x_0^-, x_0^+[ + i\mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}[f](\lambda) := \int_{]0,\infty[} f(t) t^{\lambda-1} dt$$

admet des dérivées au sens complexe à tout ordre et l'on a, dans cette bande verticale ouverte, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} \left[ \int_{]0,\infty[} f(t) t^{\lambda-1} dt \right] = \int_{]0,\infty[} f(t) (\log t)^k t^{\lambda-1} dt$$

(l'intégrale au second membre étant convergente au sens de Lebesgue).

### 1.5. La formule de changement de variables

On connaît depuis le L1 la formule de changement de variables dans le calcul de primitives : si  $I$  et  $J$  sont deux intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi : I \rightarrow J$  une application de classe  $C^1$  de  $I$  dans  $J$ ,  $f$  une fonction continue de  $J$  dans  $\mathbb{C}$ , on a la formule suivante :

$$(1.58) \quad \forall a, b \in I, \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Mais il ne s'agit pas tant ici d'une formule de changement de variables dans les intégrales que d'une remarque concernant les primitives et la différentiation des fonctions composées : si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $J$ ,  $F \circ \varphi$  est une primitive de  $(f \circ \varphi) \times \varphi'$  sur  $I$ . Notons que l'on peut ici tolérer que  $I$  et  $J$  ne soient plus ouverts à condition d'avoir précisé (par exemple, si  $I$  contient sa borne inférieure) qu'une fonction est de classe  $C^1$  sur  $[\alpha, \beta[$  si elle est de classe  $C^1$  sur  $] \alpha, \beta[$  et admet pour dérivée à droite en  $\alpha$  la limite, lorsque  $t$  tend vers  $\alpha$  par valeurs supérieures, de  $\varphi'(t)$ .

Voici cette fois une vraie formule de changement de variables, où ce ne sont plus les primitives qui sont en jeu, mais vraiment les intégrales, et non plus cette fois les fonctions (comme c'était le cas pour les primitives), mais les ensembles.

**THEOREME 1.3** (changement de variables dans les intégrales de Lebesgue). *Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , d'intérieurs respectifs  $U$  et  $V$  non vides, dont les frontières  $\partial A = A \setminus U$  et  $\partial B = B \setminus V$  sont des sous-ensembles de volume  $n$ -dimensionnel nul dans  $\mathbb{R}^n$ . On suppose qu'il existe une application de classe  $C^1$  de  $U$  dans  $V$ , bijective, et dont le jacobien*

$$\det \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right) = \text{Jac} [\Phi]$$

*ne s'annule pas dans  $U$  (l'application réciproque (ou inverse)  $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$  est alors aussi de classe  $C^1$ ). Dire qu'une fonction  $f : B \mapsto \mathbb{C}$  est intégrable dans  $B$*

équivalent à dire que la fonction

$$(1.59) \quad x \in A \mapsto \begin{cases} f \circ \Phi(x) & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \in A \setminus U = \partial A \end{cases}$$

est intégrable sur  $A$ . On a de plus, si c'est le cas, la formule dite de changement de variables

$$(1.60) \quad \int \cdots \int_B f(y) dy_1 \dots dy_n = \int \cdots \int_A f(\Phi(x)) |\text{Jac}[\Phi](x)| dx_1 \dots dx_n$$

( $f \circ \Phi$ , qui est définie dans  $U$ , est comme dans (1.59) prolongée par 0 sur  $\partial A$ ). Si  $f$  est une fonction positive, la formule (1.60) est toujours vraie (sans condition d'intégrabilité de  $f$  sur  $B$ ), mais les deux membres (qui sont égaux) peuvent fort bien valoir tous les deux  $+\infty$ .

REMARQUE 1.11 (Attention à prendre la valeur absolue du jacobien!). Il est très important d'observer que, du fait que notre point de vue est ici ensembliste (et non fonctionnel comme dans la remarque sur les primitives conduisant à la formule (1.58)), c'est la valeur absolue du jacobien (et non le jacobien) du changement de variables  $\Phi$  qui se trouve être impliquée dans la formule (1.60).

ESQUISSE DE PREUVE. On peut remplacer  $A$  et  $B$  respectivement par  $U$  et  $V$  puisque les frontières de  $A$  et  $B$  sont de volume  $n$ -dimensionnel nul, donc ne comptent pour rien dans les calculs d'intégrales. On peut aussi se limiter à prouver le résultat pour des fonctions positives (on combine ensuite les quatre fonctions positives  $(\text{Re } f)^\pm, (\text{Im } f)^\pm$ ). Localement  $\Phi$  est assimilable à son application affine tangente. En subdivisant  $U$  en petits pavés disjoints  $P_j$  suffisamment petits, on peut se ramener au cas où  $\Phi$  est une application affine (on ajoute ensuite les intégrales de  $f \circ \Phi$  sur les  $P_j$  pour récupérer l'intégrale de  $f$  sur  $\Phi(U) = V$ ). Si  $\Phi$  est affine, on utilise le fait que le volume de l'image d'un pavé  $P$  par  $\Phi$  est égal à  $\text{vol}_n(P) \times |\det \Phi|$  (cf. la sous-section 1.1.3).  $\square$

La formule de changement de variables (1.60) est un précieux outil pour les calculs d'intégrales multiples. Outre les innombrables changements de variables *ad hoc* (tenant compte de l'expression plus simple du domaine d'intégration  $B$  en de judicieuses nouvelles coordonnées), il y a quelques changements de variables classiques « incontournables » souvent omniprésents en mathématiques appliquées.

EXEMPLE 1.13 (Le repérage polaire dans le plan). Un point  $(x, y)$  du plan  $\mathbb{R}^2$  peut être aussi repéré par la distance à l'origine  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$  et l'argument  $\theta \in [0, 2\pi[$  mesuré à partir du demi-axe  $0x$  (voir la figure 1.7). L'application

$$\Phi : (r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x \geq 0, y = 0\}$$

réalise une bijection de classe  $C^1$  (d'inverse aussi  $C^1$ ) entre  $]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$  et le plan « fendu »  $\mathbb{R}^2 \setminus \{x \geq 0, y = 0\}$ . Le jacobien de  $\Phi$  au point  $(r, \theta)$  vaut  $r \neq 0$ . Comme la demi-droite  $\{x \geq 0, y = 0\}$  est de volume 2-dimensionnel nul, la formule (1.60) s'applique : une fonction  $f : B \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur un sous-ensemble (mesurable)  $B$  du plan  $\mathbb{R}^2$  est intégrable dans  $B$  si et seulement si

$$(r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta) r$$

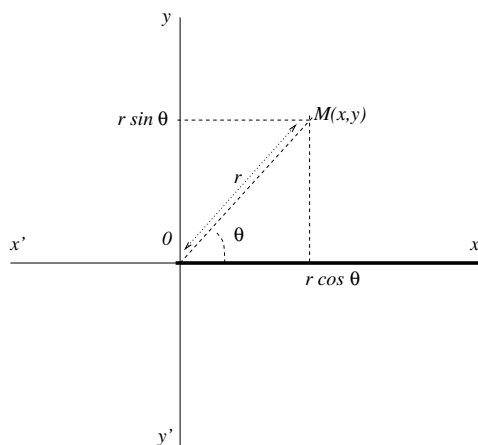


FIGURE 1.7. Le repérage polaire dans le plan

est intégrable dans  $\Phi^{-1}(B)$  et l'on a (si c'est le cas)

$$(1.61) \quad \iint_B f(x, y) \, dx dy = \iint_{A=\Phi^{-1}(B)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta.$$

Si par exemple  $B = \mathbb{R}^2$  et  $f : (x, y) \mapsto \exp(-x^2 - y^2)$  (il s'agit d'une fonction positive), on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} \, dx dy = \int_{]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[} r e^{-r^2} \, dr d\theta.$$

Comme dans les deux membres, il s'agit d'intégration sur des « rectangles » ici non bornés ( $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans le premier cas,  $]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[$ ) et que les fonctions sous les intégrales se « scindent » en des fonctions en les deux variables différentes d'intégration ( $x$  et  $y$  dans le premier cas,  $r$  et  $\theta$  dans le second), on en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx \times \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \, dy = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx \right)^2 = \int_{]0, \infty[} d\left[\frac{e^{-r^2}}{2}\right] \times \int_{]0, 2\pi[} d\theta = \pi.$$

On a donc au final la formule

$$(1.62) \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi},$$

formule qui s'écrit encore après changement de variables

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \, dx = 1$$

(formule de Gauß, stipulant que la *gaussienne*  $x \in \mathbb{R} \mapsto (1/\sqrt{2\pi}) e^{-x^2/2}$  est bien une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ , celle de la loi normale réduite centrée  $\mathcal{N}(0, 1)$ ).

EXEMPLE 1.14 (le repérage sphérique dans l'espace). Un point  $M = (x, y, z)$  de l'espace peut être repéré par sa distance  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  à l'origine et par deux angles, dits *angles d'Euler* :

- sa « longitude »  $\varphi \in [0, 2\pi[$ , le demi plan  $\{x \geq 0, y = 0\}$  faisant office de demi-plan méridien de Greenwich ;

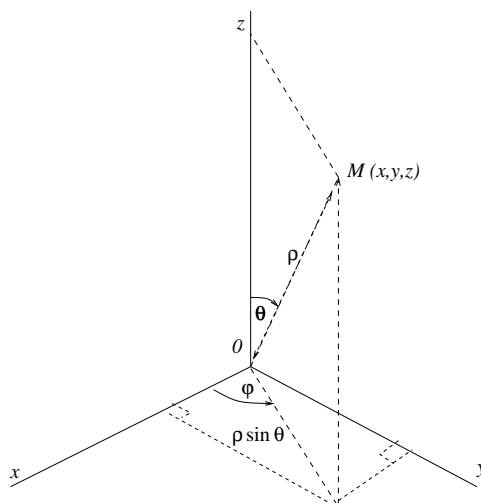


FIGURE 1.8. Le repérage sphérique par les angles d'Euler

– sa « colatitude »  $\theta \in [0, \pi[$  (latitude mesurée depuis le pôle Nord et non depuis le plan  $xOy$ )  
 (cf. la figure 1.8). Les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  de  $M$  se retrouvent *via* les relations

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta.$$

L'application

$$\Phi : (\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ \longrightarrow (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta)$$

réalise une application bijective de classe  $C^1$  (dont l'inverse est aussi de classe  $C^1$ ) entre  $\mathbb{R}_{>0} \times ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[$  et  $\mathbb{R}^3 \setminus \{x \geq 0, y = 0\}$ . De plus, le calcul montre que

$$\text{Jac}[\Phi](\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \sin \theta > 0 \quad (\text{car } \rho > 0, \theta \in ]0, \pi[).$$

Comme le demi-plan vertical  $\{x \geq 0, y = 0\}$  est de volume 3-dimensionnel nul, la formule (1.60) s'applique : une fonction  $f : B \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur un sous-ensemble (mesurable)  $B$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  est intégrable dans  $B$  si et seulement si

$$(\rho, \varphi, \theta) \longmapsto f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta)$$

est intégrable dans  $\Phi^{-1}(B)$  et l'on a (si c'est le cas)

$$(1.63) \quad \begin{aligned} \int \int \int_B f(x, y, z) \, dx dy dz &= \\ &= \int \int \int_{A=\Phi^{-1}(B)} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

EXEMPLE 1.15 (le repérage cylindrique dans l'espace). Un point  $M = (x, y, z)$  de l'espace peut aussi être repéré par :

- sa distance  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$  à l'axe vertical  $z'Oz$  ;
- sa longitude  $\theta \in [0, 2\pi[$ , le demi-plan  $xOy$  faisant toujours office de plan méridien de Greenwich ;
- son « altitude » ou sa « cote »  $z \in \mathbb{R}$ .

On pose

$$\Phi : (r, \theta, z) \in \mathbb{R}_{>0} \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

L'application  $\Phi$  réalise une bijection de classe  $C^1$  entre  $\mathbb{R}_{>0} \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$  et l'ouvert  $\mathbb{R}^3 \setminus \{x \geq 0, y = 0\}$ . De plus, on a

$$\text{Jac}[\Phi](r, \theta, z) = r.$$

Comme le demi-plan vertical  $\{x \geq 0, y = 0\}$  est de volume 3-dimensionnel nul, la formule (1.60) s'applique : une fonction  $f : B \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur un sous-ensemble (mesurable)  $B$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  est intégrable dans  $B$  si et seulement si

$$(r, \theta, z) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

est intégrable dans  $\Phi^{-1}(B)$  et l'on a (si c'est le cas)

$$(1.64) \quad \int \int \int_B f(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int \int_{A=\Phi^{-1}(B)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, r \, dr d\theta dz.$$

Ce système de coordonnées (où l'axe vertical  $z'0z$  joue un rôle axial) est dit système de *coordonnées cylindriques*. Il est fréquemment utilisé pour le calcul d'intégrales multiples dans l'espace se présentant comme des intégrales par exemple sur des secteurs de cylindres de révolution autour d'un axe.

## 1.6. Le théorème de Fubini

L'outil majeur pour le calcul d'intégrales multiples réside dans la possibilité (pour les fonctions intégrables sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ) de calculer l'intégrale en effectuant une intégration « par tranches ». Nous étudierons tout d'abord le cas des fonctions positives. Pour celles-ci, seul compte le fait que le sous-ensemble d'intégration et la fonction à intégrer soient tous deux constructibles ; c'est en effet dans ce cas la seule clause requise (dans la pratique, une telle clause est remplie car tous les objets intervenant en ingénierie mathématique sont bien sûr constructibles). Puis nous envisagerons le cas (un peu plus délicat) des fonctions à valeurs réelles ou complexes.

**1.6.1. Le cas des fonctions positives.** Nous nous plaçons ici dans  $\mathbb{R}^n$ , que nous scindons en

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

Les variables  $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$  seront notées plutôt  $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k})$ . On se donne un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  constructible, comme sur la figure 1.9. Pour chaque  $x \in \mathbb{R}^k$ , on introduit le sous-ensemble  $E_x$  de  $\mathbb{R}^{n-k}$  défini par

$$E_x := \{y \in \mathbb{R}^{n-k} ; (x, y) \in E\} \subset \mathbb{R}^{n-k}.$$

Le sous ensemble  $\{x\} \times E_x$  constitue la « tranche verticale de  $E$  » située à l'« abscisse »  $x \in \mathbb{R}^k$  (en rouge sur la figure 1.9). Pour chaque  $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ , on introduit de même le sous-ensemble  $E^y$  de  $\mathbb{R}^k$  défini par

$$E^y := \{x \in \mathbb{R}^k ; (x, y) \in E\} \subset \mathbb{R}^k.$$

Le sous ensemble  $E^y \times \{y\}$  constitue la « tranche horizontale de  $E$  » située à l'« ordonnée »  $y \in \mathbb{R}^{n-k}$  (en bleu sur la figure 1.9).

La construction même de la mesure de Lebesgue  $n$ -dimensionnelle sur  $\mathbb{R}^n$  induit le résultat suivant (on se ramène au cas où  $E$  est un pavé pour le prouver).

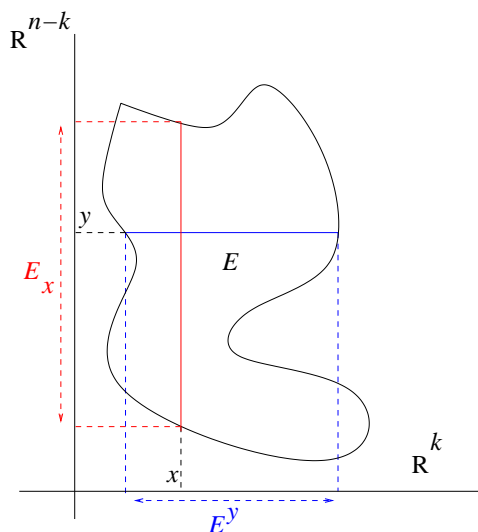


FIGURE 1.9. Calcul d'intégrales multiples par tranche (Fubini-Tonelli)

THEORÈME 1.4 (théorème de Fubini-Tonelli). Soient  $E$  comme ci-dessus et  $f$  une fonction constructible. On a

$$\begin{aligned}
 (1.65) \quad & \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx_1 \cdots dx_k dy_1 \cdots dy_{n-k} = \\
 & = \int \cdots \int_{\{x \in \mathbb{R}^k; E_x \neq \emptyset\}} \left( \int \cdots \int_{E_x} f(x, y) dy_1 \cdots dy_{n-k} \right) dx_1 \cdots dx_k \\
 & = \int \cdots \int_{\{y \in \mathbb{R}^{n-k}; E^y \neq \emptyset\}} \left( \int \cdots \int_{E^y} f(x, y) dx_1 \cdots dx_k \right) dy_1 \cdots dy_{n-k},
 \end{aligned}$$

ces trois quantités pouvant fort bien être égales ensemble à  $+\infty$ .

EXEMPLE 1.16 (le calcul du volume de la boule unité euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ ). Le calcul du volume  $n$ -dimensionnel de la boule unité euclidienne

$$B_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

illustre l'application du théorème de Fubini-Tonelli. On montre d'abord par récurrence que le volume  $V_n$  de  $B_n$  se plie à la relation inductive

$$(1.66) \quad V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2} \quad \forall n \geq 3.$$

Soit  $n \geq 3$ . On a, par définition du volume  $n$ -dimensionnel,

$$V_n = \int \cdots \int_{\{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + \cdots + y_{n-2}^2 \leq 1\}} dx_1 dx_2 dy_1 \cdots dy_{n-2}.$$

En utilisant le Théorème de Fubini-Tonelli (Théorème 1.4), il vient

$$(1.67) \quad V_n = \int \int_{\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}} \left( \int \cdots \int_{\{y_1^2 + \cdots + y_{n-2}^2 \leq 1 - x_1^2 - x_2^2\}} dy_1 \cdots dy_{n-2} \right) dx_1 dx_2.$$



Mais, pour  $(x_1, x_2)$  fixé dans  $B_2$ , l'intégrale

$$\int \cdots \int_{\{y_1^2 + \cdots + y_{n-2}^2 \leq 1 - x_1^2 - x_2^2\}} dy_1 \cdots dy_{n-2}$$

représente le volume  $(n-2)$ -dimensionnel de la boule euclidienne de centre l'origine et de rayon  $\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$  dans  $\mathbb{R}^{n-2}$ . Comme cette boule est, dans  $\mathbb{R}^{n-2}$ , image de la boule  $B_{n-2}$  par l'homothétie de centre l'origine et de rapport  $\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ , et que l'on est en dimension  $n-2$ , il vient (pour des raisons d'homogénéité)

$$(1.68) \quad \begin{aligned} \int \cdots \int_{\{y_1^2 + \cdots + y_{n-2}^2 \leq 1 - x_1^2 - x_2^2\}} dy_1 \cdots dy_{n-2} &= V_{n-2} \times \left( \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \right)^{n-2} \\ &= V_{n-2} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{n}{2} - 1}. \end{aligned}$$

En reportant dans (1.67), on obtient donc

$$(1.69) \quad \begin{aligned} V_n &= V_{n-2} \iint_{B_2} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{n}{2} - 1} dx_1 dx_2 = V_{n-2} \iint_{]0, 2\pi[ \times ]0, 1[} (1 - r^2)^{\frac{n}{2} - 1} dr \\ &= 2\pi V_{n-2} \int_{]0, 1[} (1 - r^2)^{\frac{n}{2} - 1} r dr = \pi V_{n-2} \int_{]0, 1[} (1 - u)^{\frac{n}{2} - 1} du \\ &= \pi V_{n-2} \left[ \frac{(1 - u)^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}. \end{aligned}$$

Pour la seconde égalité, on utilise le changement de variables en coordonnées polaires, cf. la formule (1.61), pour l'égalité suivante le Théorème de Fubini-Tonelli à nouveau, puis enfin le changement de variables  $r^2 \leftrightarrow u$ . Montrons maintenant par récurrence que

$$(1.70) \quad V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)},$$

où la fonction  $\Gamma$  (cf. l'exemple 1.4) est définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) := \int_{]0, +\infty[} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On rappelle auparavant que  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  et que, par conséquent,  $\Gamma(n+1) = n!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ; on rappelle enfin que l'on a aussi  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , ce que l'on voit en effectuant un changement de variables dans la formule

$$\int_{]0, +\infty[} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

déduite de (1.62). Comme  $V_1 = 2$  (puisque  $B_1 = [-1, 1]$ ), la formule (1.70) est vraie pour  $n = 1$  puisque  $\Gamma(3/2) = 1/2 \times \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$ . Cette même formule (1.62) est vraie pour  $n = 2$  puisque  $V_2 = \pi$  (surface du disque unité dans le plan) et que  $\Gamma(2) = 1$ . Si on suppose (1.70) vraie au cran  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$V_{n+2} = \frac{2\pi}{n} V_n = \frac{2\pi}{n} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \frac{\pi^{(n+2)/2}}{\Gamma(\frac{n+2}{2} + 1)},$$

ce qui prouve que la formule (1.70) est vérifiée par récurrence pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On remarque en particulier que

$$V_{2n} = \frac{\pi^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On retrouve bien aussi le fait que  $V_3 = 4\pi/3$  puisque  $\Gamma(5/2) = 3/2 \times \Gamma(3/2) = 3/2 \times 1/2 \times \Gamma(1/2) = 3\sqrt{\pi}/4$ .

**1.6.2. Le cas des fonctions de signe quelconque ou à valeurs complexes.** Soit  $E$  un sous-ensemble (constructible) de  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  comme dans la sous-section précédente. Si  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction constructible (mais non cette fois positive!) telle que

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{n-k} = +\infty,$$

il se peut fort bien que les deux intégrales

$$(1.71) \quad \begin{aligned} & \int \cdots \int_{\{x \in \mathbb{R}^k; E_x \neq \emptyset\}} \left( \int \cdots \int_{E_x} f(x, y) dy_1 \dots dy_{n-k} \right) dx_1 \dots dx_k, \\ & \int \cdots \int_{\{y \in \mathbb{R}^{n-k}; E_y \neq \emptyset\}} \left( \int \cdots \int_{E_y} f(x, y) dx_1 \dots dx_k \right) dy_1 \dots dy_{n-k} \end{aligned}$$

puissent toutes les deux être définies, mais ne soient pas égales!

EXEMPLE 1.17 (un exemple de fonction non positive où (1.65) s'avère en défaut). Soit  $E = ]0, 1]^2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Pour tout  $x \in ]0, 1]$ , la fonction  $f_x : y \mapsto f(x, y)$  est intégrable sur  $]0, 1]$  et l'on a

$$\int_{]0, 1]} f_x(y) dy = \frac{1}{x} \int_{]0, 1/x[} \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2} dt = \frac{1}{x} \left[ \frac{t}{1 + t^2} \right]_0^{1/x} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

On constate donc que la fonction

$$x \in ]0, 1] \mapsto \int_{]0, 1]} f(x, y) dy$$

est une fonction intégrable sur  $]0, 1]$ , d'intégrale  $\arctan(1) = \pi/4$ . Pour tout  $y \in ]0, 1]$ , la fonction  $f^y : x \mapsto f(x, y)$  est intégrable sur  $]0, 1]$  et

$$\int_{]0, 1]} f^y(x) dx = \frac{1}{y} \int_{]0, 1/y[} \frac{t^2 - 1}{(1 + t^2)^2} dt = \frac{1}{y} \left[ -\frac{t}{1 + t^2} \right]_0^{1/y} = -\frac{1}{1 + y^2}.$$

Ici encore, la fonction

$$y \in ]0, 1] \mapsto \int_{]0, 1]} f(x, y) dx$$

est aussi intégrable sur  $]0, 1]$  et l'on a

$$\int_{]0, 1]} \left[ \int_{]0, 1]} f(x, y) dx \right] dy = - \int_{]0, 1]} \left[ \int_{]0, 1]} f(x, y) dy \right] dx = \frac{\pi}{4} \neq 0.$$

Remarquons toutefois pour cet exemple « pathologique », en passant en coordonnées polaires, que, si  $A$  désigne le quart du disque  $D(0, 1)$  inclus dans le premier quadrant, on a

$$\begin{aligned} \iint_A |f(x, y)| \, dx dy &= \iint_{]0, \pi/2[ \times ]0, 1]} \frac{r^2 |\cos(2\theta)|}{r^4} r dr d\theta = \\ &= \int_{]0, \pi/2[} |\cos(2\theta)| \, d\theta \times \int_{]0, 1]} \frac{dr}{r} = +\infty, \end{aligned}$$

ce qui implique que la fonction  $f$  n'est pas intégrable sur  $]0, 1]^2$ .

Lorsque la fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  n'est plus positive, il convient donc d'ajouter aux hypothèses de constructibilité portant sur la fonction  $f$  et le sous-ensemble  $E$  en jeu la clause (restrictive) d'intégrabilité pour  $f$  dans  $E$  (comme fonction de toutes les variables  $(x, y)$ ).

THEORÈME 1.5 (théorème de Fubini). *Soient  $E$  comme dans le théorème 1.4 et  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction constructible. On suppose que la « clause de sécurité »*

$$(1.72) \quad \int \cdots \int_E |f(x, y)| \, dx_1 \dots dx_k \, dy_1 \dots dy_{n-k} < +\infty$$

*est remplie. Alors, on peut affirmer que*

$$\begin{aligned} (1.73) \quad & \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \, dx_1 \dots dx_k \, dy_1 \dots dy_{n-k} = \\ &= \int \cdots \int_{\{x \in \mathbb{R}^k; E_x \neq \emptyset\}} \left( \int \cdots \int_{E_x} f(x, y) \, dy_1 \dots dy_{n-k} \right) dx_1 \dots dx_k \\ &= \int \cdots \int_{\{y \in \mathbb{R}^{n-k}; E^y \neq \emptyset\}} \left( \int \cdots \int_{E^y} f(x, y) \, dx_1 \dots dx_k \right) dy_1 \dots dy_{n-k}, \end{aligned}$$

*ces trois quantités étant alors égales au même nombre complexe.*

REMARQUE 1.12. Il faut comprendre dans l'énoncé du théorème que les trois intégrables ci dessous sont bien définies : la première l'est bien sûr du fait de la clause de sécurité (1.72). La seconde l'est aussi car cette même clause de sécurité implique, que, pour tout  $x$  tel que  $E_x \neq \emptyset$  (hormis peut être des exceptions sur un sous-ensemble négligeable de  $\mathbb{R}^k$ ), on a

$$\int \cdots \int_{E_x} |f(x, y)| \, dy_1 \dots dy_{n-k} < +\infty$$

et qu'en prime la fonction

$$x \in \{x \in \mathbb{R}^k; E_x \neq \emptyset\} \longmapsto \int \cdots \int_{E_x} f(x, y) \, dy_1 \dots dy_{n-k}$$

(qui est donc bien définie, quitte à la prolonger par 0 pour les  $x$  exceptionnels) est intégrable sur  $\{x \in \mathbb{R}^k; E_x \neq \emptyset\}$ . On raisonne de même pour ce qui est de la définition de la troisième intégrale dans (1.73).

DÉMONSTRATION. Ce théorème se déduit du théorème de Fubini-Tonelli (Théorème 1.4) : il suffit d'exprimer  $f$  comme combinaison linéaire

$$f = \sup(\operatorname{Re} f, 0) - \sup(-\operatorname{Re} f, 0) + i(\sup(\operatorname{Im} f, 0) - \sup(-\operatorname{Im} f, 0)),$$

puis d'appliquer pour chacune des quatre fonctions positives impliquées dans cette décomposition le théorème de Fubini-Tonelli. On combine enfin les quatre intégrales

avec respectivement les coefficients  $1, -1, i, -i$ . La clause de sécurité (1.72) nous assure de toujours éviter dans ces calculs que ne surgisse une indétermination du type  $\infty - \infty$ .  $\square$

Voici pour conclure ici une règle pratique importante : les deux Théorèmes 1.4 et 1.5 s'utilisent en « tandem » : pour vérifier si oui ou non la clause de sécurité (1.72) est remplie, on invoque le Théorème de Fubini-Tonelli (Théorème 1.4), qui permet de calculer comme on le souhaite l'intégrale (1.72) et de vérifier si oui ou non cette intégrale est finie. Si oui, alors on peut mettre en œuvre le Théorème de Fubini (Théorème 1.5), ce qui revient à reprendre les calculs que l'on vient de faire, mais cette fois avec  $f$  et non plus  $|f|$ . Si non, il faut abandonner, car le Théorème de Fubini peut s'avérer en défaut. Ceci ne veut toutefois pas dire que le calcul que l'on souhaitait faire est définitivement faux, mais simplement, si par hasard il s'avérait correct, que l'on ne saurait le justifier en invoquant le Théorème 1.5 de cette façon.

**1.6.3. Le théorème fondamental de l'analyse en dimension 1, 2, 3.** En dimension 1, la brique de base (ou « maille élémentaire » sur la droite  $\mathbb{R}$ ) est le segment

$$\Delta_1 := [0, 1] = \{t \in \mathbb{R}; 0 \leq t \leq 1\}.$$

Par une application  $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  (c'est-à-dire de classe  $C^1$  au voisinage de  $\Delta_1$ ) et de dérivée restant strictement positive sur  $\Delta_1$  ( $\Phi$  est donc strictement croissante, donc injective), ce segment se trouve transformé en le nouveau segment  $\Phi(\Delta_1) = [\Phi(0), \Phi(1)]$ .

Cette brique de base (et ses images du type  $\Phi(\Delta_1)$  par de tels difféomorphismes) est utilisée sans arrêt en mathématiques appliquées (plus particulièrement en modélisation) lorsqu'il s'agit de segmenter des intervalles en introduisant des maillages

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_N = b.$$

Dans le contexte de la dimension  $n = 1$ , le *théorème fondamental de l'analyse* se formule ainsi :

THEORÈME 1.6 (théorème fondamental de l'analyse en dimension 1). *Soit  $[a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  (i.e. de classe  $C^1$  au voisinage de  $[a, b]$ ). Alors*

$$(1.74) \quad F(b) - F(a) = \int_{[a, b]} F'(t) dt.$$

REMARQUE 1.13 (un nouveau regard sur le résultat). Nous avons formulé ici ce résultat (bien connu depuis le lycée et le cours d'analyse 1) comme il doit l'être dans le cadre de ce cours d'intégration, c'est-à-dire en privilégiant, dans le membre de droite de (1.74), la notation

$$\int_{[a, b]} F'(t) dt$$

à la notation

$$\int_a^b F'(t) dt$$

(relevant plutôt du calcul de primitives et non de la théorie de l'intégration). On note aussi que le membre de gauche dans (1.74)

$$F(b) - F(a)$$

peut être compris comme une « intégration discrète » sur le bord orienté de  $[a, b]$ . Ce bord, constitué des singletons  $\{a\}$  et  $\{b\}$ , est ici en effet considéré comme « orienté » car assimilé à un *dipôle* : l'extrémité  $b$  est comptée positivement (+) tandis que l'extrémité  $\{a\}$  est comptée négativement (-).

En dimension 2, la brique de base (ou « maille élémentaire » dans le plan  $\mathbb{R}^2$ ) devient le simplexe

$$\Delta_2 := \{(t, s) \in \mathbb{R}^2; t \geq 0, s \geq 0, t + s \leq 1\}$$

dont les sommets sont l'origine et les extrémités des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Par une application  $\Phi : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  (c'est-à-dire de classe  $C^1$  au voisinage de  $\Delta_2$ ), injective, et de jacobien restant strictement positif sur  $\Delta_2$ , ce simplexe se trouve transformé en un « triangle déformé » de sommets  $\Phi(0, 0)$ ,  $\Phi(1, 0)$ ,  $\Phi(0, 1)$ . On note que le fait que le jacobien de  $\Phi : (t, s) \mapsto (x(t, s), y(t, s))$  reste strictement positif implique que  $\Phi$  respecte les orientations : si l'on suit le bord de  $\Delta_2$  dans le sens trigonométrique suivant la trajectoire paramétrée  $\tau \mapsto \gamma(\tau)$ , on parcourra le bord de  $\Phi(\Delta_2)$  aussi dans le sens trigonométrique en suivant cette fois la trajectoire paramétrée  $\tau \mapsto \Phi(\gamma(\tau))$ . En particulier, pour tout  $t \in ]0, 1[$ , le vecteur

$$\left( \frac{\partial y}{\partial t}(t, 0), -\frac{\partial x}{\partial t}(t, 0) \right)$$

est obtenu à partir du vecteur

$$\left( \frac{\partial x}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial y}{\partial t}(t, 0) \right) = \frac{d}{dt}[\Phi(t, 0)]$$

par rotation d'angle  $-\pi/2$  : il dirige donc la normale extérieure (*i.e.* pointant vers l'extérieur) au triangle déformé  $\Phi(\Delta_2)$  au point  $(x(t, 0), y(t, 0))$ . De même, pour tout  $s \in [0, 1]$ , le vecteur

$$\left( -\frac{\partial y}{\partial s}(0, s), \frac{\partial x}{\partial s}(0, s) \right)$$

est obtenu à partir du vecteur

$$\left( \frac{\partial x}{\partial s}(0, s), \frac{\partial y}{\partial s}(0, s) \right) = \frac{d}{ds}[\Phi(0, s)]$$

par rotation d'angle  $+\pi/2$  : il dirige donc encore la normale extérieure au triangle déformé  $\Phi(\Delta_2)$  au point  $(x(0, s), y(0, s))$ . Enfin, pour tout  $t \in ]t, 1[$ , le vecteur

$$\left( \frac{\partial y}{\partial s}(1-t, t) - \frac{\partial y}{\partial t}(1-t, t), \frac{\partial x}{\partial t}(1-t, t) - \frac{\partial x}{\partial s}(1-t, t) \right)$$

est obtenu à partir du vecteur

$$\left( \frac{\partial x}{\partial s}(1-t, t) - \frac{\partial x}{\partial t}(1-t, t), \frac{\partial y}{\partial t}(1-t, t) - \frac{\partial y}{\partial s}(1-t, t) \right) = \frac{d}{dt}[\Phi(1-t, t)]$$

par rotation d'angle  $+\pi/2$ . Il dirige donc toujours la normale extérieure au triangle déformé  $\Phi(\Delta_2)$  au point  $(1-t, t)$ .

La brique de base  $\Delta_2$  (et ses images  $\Phi(\Delta_2)$  par de tels difféomorphismes) est utilisée en mathématiques appliquées pour construire des maillages de domaines plans : on dit que les triangles déformés  $\Phi_1(\Delta_2), \dots, \Phi_M(\Delta_2)$  constituent un *maillage* (ou encore une *triangulation*) d'un domaine plan borné  $E$  lorsque

- $E$  est union des  $\Phi_j(\Delta_2)$ ,  $j = 1, \dots, M$ ;
- les intérieurs des triangles déformés  $\Phi_j(\Delta_2)$ ,  $j = 1, \dots, M$ , sont disjoints deux-à-deux ;

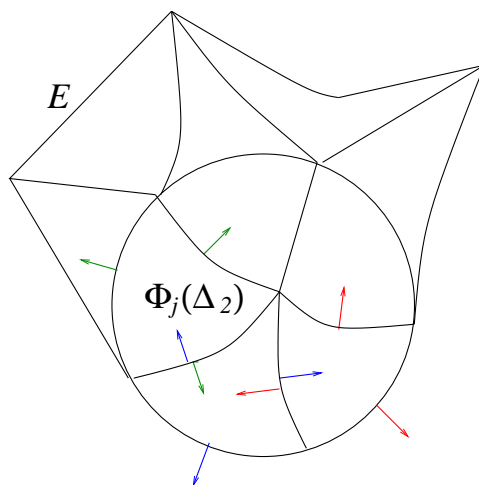


FIGURE 1.10. Triangulation d'un domaine plan

- si deux triangles déformés  $\Phi_j(\Delta_2)$  et  $\Phi_k(\Delta_2)$  se rencontrent, leur intersection est soit un sommet commun à ces deux triangles déformés, soit une arête commune à ces deux triangles déformés (*cf.* la figure 1.10).

Utilisons le Théorème de Fubini pour formuler la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.3** (théorème fondamental de l'analyse pour le simplexe  $\Delta_2$  du plan). *Soient  $F$  et  $G$  deux fonctions de classe  $C^1$  de  $\Delta_2$  dans  $\mathbb{R}$  (i.e. de classe  $C^1$  au voisinage de  $\Delta_2$ ). On a la formule*

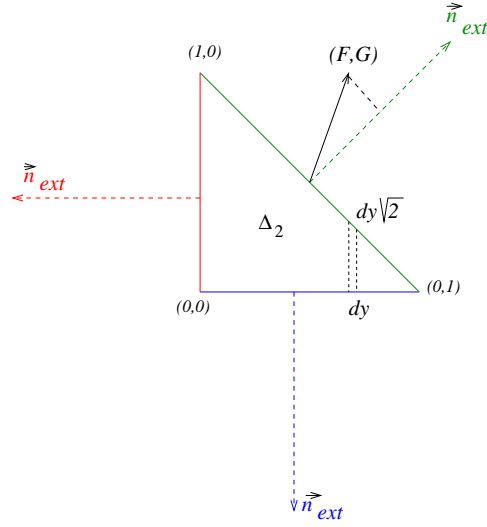
$$(1.75) \quad \begin{aligned} & \iint_{\Delta_2} \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \\ & = - \int_{[0,1]} F(0, y) dy - \int_{[0,1]} G(x, 0) dx + \int_{[0,1]} (F(x, 1-x) + G(x, 1-x)) dx. \end{aligned}$$

**DÉMONSTRATION.** Comme  $F$  et  $G$  sont de classe  $C^1$  dans  $\Delta_2$ , leurs deux dérivées partielles sont bornées en module, donc intégrables sur  $\Delta_2$ . La clause de sécurité (1.72) du théorème de Fubini (Théorème 1.5) est remplie, ce qui nous permet de calculer « par tranches » les deux intégrales

$$\iint_{\Delta_2} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) dx dy, \quad \iint_{\Delta_2} \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) dx dy.$$

On a donc, en utilisant précisément le Théorème de Fubini 1.5 :

$$(1.76) \quad \begin{aligned} & \iint_{\Delta_2} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1-y]} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) dx \right) dy \\ & = \int_{[0,1]} (F(1-y, y) - F(0, y)) dy = \int_{[0,1]} F(x, 1-x) dx - \int_{[0,1]} F(0, y) dy \end{aligned}$$

FIGURE 1.11. Le théorème fondamental de l'analyse pour  $\Delta_2$ 

(pour la seconde égalité, on utilise le Théorème fondamental de l'analyse en dimension 1, à savoir le Théorème 1.6). On a de même

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Delta_2} \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1-x]} \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) dx \right) dx \\
 (1.77) \quad &= \int_{[0,1]} (G(x, 1-x) - G(x, 0)) dx \\
 &= \int_{[0,1]} G(x, 1-x) dx - \int_{[0,1]} G(x, 0) dx.
 \end{aligned}$$

La formule (1.75) résulte alors de l'addition de (1.76) et (1.77).  $\square$

Il nous reste ici à interpréter ce résultat avec cette fois le regard du physicien et non plus du mathématicien. Pour chaque point  $(x, y)$  du bord de  $\Delta_2$  (hormis les trois sommets), nous pouvons définir en ce point le vecteur normal extérieur  $\vec{n}_{\text{ext}}(x, y)$  (unitaire et pointant depuis  $(x, y)$  vers l'extérieur de  $\Delta_2$  en étant au point  $(x, y)$  orthogonal à la frontière de  $\Delta_2$ ). Il se trouve que dans le cas de  $\Delta_2$ , ce vecteur normal ne prend que trois positions :

- le long du segment horizontal joignant  $(0, 0)$  à  $(1, 0)$ , on a  $\vec{n}_{\text{ext}}(x, y) = -\vec{j}$ ;
- le long du segment oblique joignant  $(1, 0)$  à  $(0, 1)$ , on a  $\vec{n}_{\text{ext}}(x, y) = (\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2}$ ;
- le long du segment vertical joignant  $(1, 1)$  à  $(1, 0)$ , on a  $\vec{n}_{\text{ext}}(x, y) = \vec{i}$ .

La donnée du couple de fonctions  $\vec{V} := (F, G)$  est interprétée comme la donnée d'un *champ de vecteurs* (ou *champ de forces*) de classe  $C^1$  au voisinage de  $\Delta_2$ . La fonction scalaire

$$(x, y) \in \Delta_2 \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial G}{\partial y}(x, y)$$

est appelée *divergence* de ce champ de forces  $\vec{V}$  et notée  $\text{div}(\vec{V})$ . Sur le bord de  $\Delta_2$  (qui est un arc de courbe plane, ici formé de la concaténation de trois segments du plan), on peut introduire une notion de *volume 1-dimensionnel* (ou *mesure de*

*longueur*)  $\text{vol}_{1,\partial\Delta_2}$ . Sur le segment horizontal joignant  $(0,0)$  à  $(1,0)$  (paramétré par  $x$ ),  $dx$  représente cette mesure au niveau infinitésimal. Sur le segment vertical joignant  $(0,0)$  à  $(0,1)$  (paramétré par  $y$ ),  $dy$  représente cette mesure au niveau infinitésimal. Enfin, sur le segment oblique joignant  $(1,0)$  à  $(0,1)$  et paramétré par  $y$ , c'est cette fois  $\sqrt{2}dy$  qui représente cette mesure au niveau infinitésimal. Tout ceci étant introduit, on remarque que l'on peut écrire le second membre de la formule (1.75) comme

$$(1.78) \quad \begin{aligned} & - \int_{[0,1]} G(x,0) dx + \int_{[0,1]} (F(y,1-y) + G(y,1-y)) dy - \int_{[0,1]} F(0,y) dy = \\ & = \int_{\partial\Delta_2} \langle \vec{V}(x,y), \vec{n}_{\text{ext}}(x,y) \rangle d[\text{vol}_{1,\partial\Delta_2}]. \end{aligned}$$

Le second membre de (1.78) est par définition appelé le *flux sortant* du champ de forces  $\vec{V}$  au travers du bord de  $\Delta_2$ . Nous voici presque prêts pour une reformulation de la Proposition 1.3, à la lumière d'un regard cette fois de physicien. Avant toutefois d'énoncer ce qui constituera le théorème fondamental de l'analyse en dimension 2, il convient de préciser la définition de *volume 1-dimensionnel* (ou *mesure de longueur*) sur un arc de courbe paramétré de  $\mathbb{R}^n$  (lorsque  $n \geq 2$ ).

**DÉFINITION 1.6** (mesure de longueur sur un arc de courbe paramétré de  $\mathbb{R}^n$ ). Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  l'image de  $\Delta_1 = [0,1]$  par une application  $\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  sur  $]0,1[$  (*i.e.* au voisinage de  $[0,1]$ ), injective sur  $]0,1[$ , et telle que  $\|\gamma'(t)\|$  ne s'annule pas (sauf éventuellement sur un sous-ensemble négligeable de  $[0,1]$ ). Le volume 1-dimensionnel sur l'arc de courbe<sup>23</sup> est défini par

$$(1.79) \quad \text{vol}_{1,\Gamma}(A) = \int_{\{t \in [0,1]; \gamma(t) \in A\}} \|\gamma'(t)\| dt$$

lorsque  $A$  est un sous-ensemble mesurable de  $\Gamma$  (c'est-à-dire l'intersection avec  $\Gamma$  d'un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^n$ ). L'intégrale sur  $\Gamma$  d'une fonction continue  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  relativement à cette mesure de longueur est alors définie par

$$(1.80) \quad \int_{\Gamma} f d[\text{vol}_{1,\Gamma}] := \int_{[0,1]} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

**REMARQUE 1.14.** Il résulte de la formule de changement de variables dans les intégrales (Théorème 1.3) que cette notion de longueur ne dépend pas du choix du paramétrage  $\gamma : [0,1] \rightarrow \Gamma$  de  $\Gamma$ , pourvu que ce paramétrage vérifie les conditions requises (injectif sur  $]0,1[$ , de classe  $C^1$  sur  $[0,1]$ , avec  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$  sauf éventuellement sur un sous-ensemble négligeable de  $[0,1]$ ). L'intégrale (1.80) (sur  $\Gamma$ ) d'une fonction continue  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  relativement à cette mesure de longueur ne dépend pas du choix du paramétrage  $\gamma : [0,1] \rightarrow \Gamma$ , pourvu, une fois encore, que celui ci vérifie les conditions requises.

**REMARQUE 1.15.** La Définition 1.6 s'étend naturellement au cas où  $\Gamma$  est l'image d'un segment  $[a,b]$  par une application  $\gamma : [a,b] \rightarrow \Gamma$ , continue et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[a,b]$ , injective sur  $]a,b[$ , et telle que  $\|\gamma'\|$  ne s'annule pas sur  $[a,b]$ , hormis éventuellement sur un sous-ensemble négligeable. C'est par exemple le cas de la frontière du simplexe  $\Delta_2$ , ou de celle de du triangle « déformé »  $\Phi(\Delta_2)$ ,

23. On parle ici de « mesure de longueur » car il s'agit d'une mesure sur un arc de courbe.



où  $\Phi$  est une application de classe  $C^1$  de  $\Delta_2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , injective et de jacobien strictement positif.

Ces diverses notions (et notations) ayant été introduites, voici donc la reformulation de la Proposition 1.3 dans un langage plus propre à la physique.

PROPOSITION 1.4 (le théorème fondamental de l'analyse dans le plan pour le simplexe  $\Delta_2$ ). *Soit  $\vec{V}$  un champ de forces de classe  $C^1$  dans  $\Delta_2$  (i.e. au voisinage de  $\Delta_2$ ). Le flux sortant du champ  $\vec{V}$  au travers du bord de  $\Delta_2$  est égal à l'intégrale sur  $\Delta_2$  de la divergence de  $\vec{V}$ , autrement dit*

$$(1.81) \quad \int_{\partial\Delta_2} \langle \vec{V}(x, y), \vec{n}_{\text{ext}}(x, y) \rangle d[\text{vol}_{1, \partial\Delta_2}] = \iint_{\Delta_2} \text{div}(\vec{V}(x, y)) dx dy.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le Théorème fondamental de l'analyse dans le plan (non plus seulement pour la brique de base  $\Delta_2$  comme dans la Proposition 1.4, mais pour des versions « déformées »  $\Phi(\Delta_2)$  de cette brique de base).

THEORÈME 1.7 (théorème fondamental de l'analyse en dimension 2). *Soit  $\Phi : \Delta_2 \mapsto \mathbb{R}^2$  une application de classe  $C^1$  (i.e. de classe  $C^1$  au voisinage de  $\Delta_2$ ), injective, de jacobien strictement positif sur  $\Delta_2$ . Soit  $\vec{V}$  un champ de forces de classe  $C^1$  au voisinage du « triangle déformé »  $\Phi(\Delta_2)$ . Le flux sortant du champ de vecteurs  $\vec{V}$  au travers du bord du triangle déformé  $\Phi(\Delta_2)$  est égal à l'intégrale sur ce triangle déformé de la divergence du champ  $\vec{V}$ , autrement dit :*

$$(1.82) \quad \int_{\partial\Phi(\Delta_2)} \langle \vec{V}(x, y), \vec{n}_{\text{ext}}(x, y) \rangle d[\text{vol}_{1, \partial\Phi(\Delta_2)}] = \iint_{\Phi(\Delta_2)} \text{div}(\vec{V}(x, y)) dx dy.$$

REMARQUE 1.16 (la formule de Green-Ostrogradski en dimension 2). Si l'on considère un domaine borné  $E \subset \mathbb{R}^2$  maillé par une triangulation (comme sur la figure 1.10), un champ de forces  $\vec{V}$  de classe  $C^1$  au voisinage de  $E$ , et que l'on ajoute toutes les formules (1.82) pour tous les triangles déformés  $\Phi_j(\Delta_2)$ ,  $j = 1, \dots, M$ , intervenant dans le maillage de  $E$ , on constate que les flux affectant les arêtes intérieures se détruisent deux-à-deux (il y a alors deux normales extérieures opposées, comme on le constate sur la figure 1.10!). Ne demeure donc au final que la formule :

$$(1.83) \quad \int_{\partial E} \langle \vec{V}(x, y), \vec{n}_{\text{ext}}(x, y) \rangle d[\text{vol}_{1, \partial E}] = \iint_E \text{div}(\vec{V}(x, y)) dx dy.$$

Cette formule (1.83) est la *formule de Green-Ostrogradski* en dimension 2. Elle stipule le fait suivant : *le flux sortant du champ  $\vec{V}$  au travers de la frontière de  $E$  est égal à l'intégrale sur  $E$  de la divergence de ce champ.*

DÉMONSTRATION. Comme on peut s'en douter, ces résultats (à savoir la formule (1.82) et donc la formule plus générale (1.83) qui s'en déduit suivant la Remarque 1.16) découlent de la Proposition 1.3 par changement de variables (à la fois dans les intégrales doubles de droite et les intégrales simples de gauche). Notons le champ de vecteurs  $P\vec{i} + Q\vec{j}$ , où  $P$  et  $Q$  sont des fonctions de classe  $C^1$  au voisinage du triangle déformé  $\Phi(\Delta_2)$ . Si

$$\Phi : (t, s) \in \Delta_2 \longmapsto (x(t, s), y(t, s)),$$

on pose

$$(1.84) \quad \begin{aligned} F(t, s) &= P(\Phi(t, s)) \frac{\partial x}{\partial s}(t, s) - Q(\Phi(t, s)) \frac{\partial x}{\partial t}(t, s) \\ G(t, s) &= Q(\Phi(t, s)) \frac{\partial x}{\partial t}(t, s) - P(\Phi(t, s)) \frac{\partial y}{\partial t}(t, s) \end{aligned} \quad \forall (t, s) \in \Delta_2.$$

Supposons dans un premier temps  $\Phi$  de classe  $C^2$  au voisinage de  $\Delta_2$ . Dans ce cas, un calcul simple, utilisant le fait que les opérateurs différentiels du second ordre  $\partial^2/\partial t \partial s$  et  $\partial^2/\partial s \partial t$  agissent de manière identique sur les fonctions de classe  $C^2$  (lemme de Schwarz du calcul différentiel relatif aux dérivées croisées) on observe que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, s) + \frac{\partial G}{\partial s}(t, s) = \operatorname{div}(\vec{V})[\Phi(t, s)] \times \operatorname{Jac}[\Phi](t, s) \quad \forall (t, s) \in \Delta_2.$$

On a donc, d'après la formule de changement de variables dans les intégrales (Théorème 1.3, formule (1.60)), et puisque le jacobien de  $\Phi$  est supposé strictement positif dans  $\Delta_2$  :

$$(1.85) \quad \iint_{\Phi(\Delta_2)} \operatorname{div}(\vec{V}(x, y)) \, dx dy = \iint_{\Delta_2} \left( \frac{\partial F}{\partial t}(t, s) + \frac{\partial G}{\partial s}(t, s) \right) dt ds.$$

On introduit maintenant le champ  $\vec{U}$  de classe  $C^1$  au voisinage de  $\Delta_2$ , défini par

$$\vec{U}(t, s) := F(t, s) \vec{i} + G(t, s) \vec{j}.$$

D'après la Proposition 1.4, on a

$$\iint_{\Delta_2} \operatorname{div}(\vec{U}(t, s)) \, dt ds = \iint_{\partial \Delta_2} \langle \vec{U}(t, s), \vec{n}_{\text{ext}}(t, s) \rangle d[\operatorname{vol}_{1, \partial[\Delta_2]}].$$

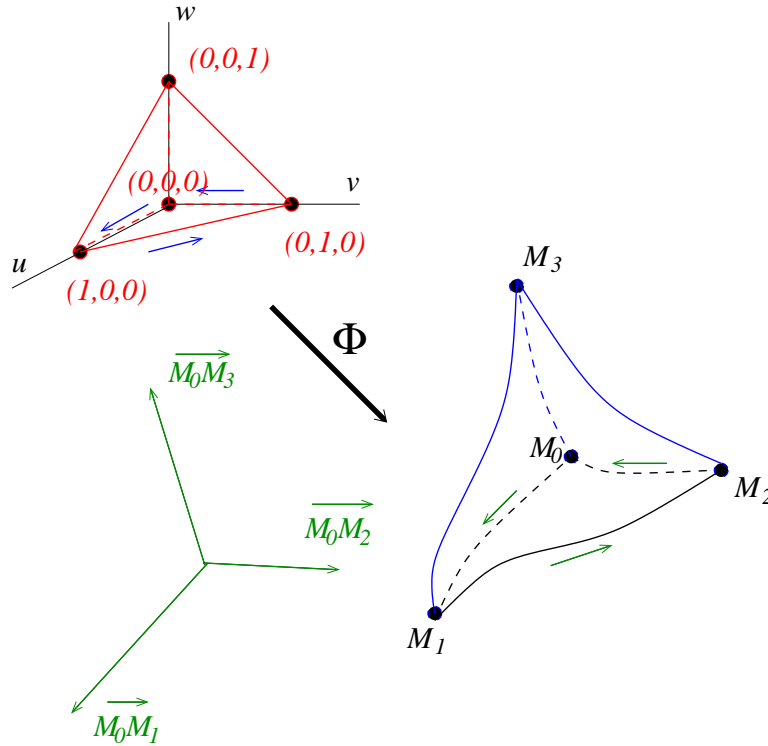
Il ne reste plus qu'à remarquer que le second membre de cette formule est exactement égal au membre de gauche de la formule (1.82). Cela résulte des diverses remarques faites à propos de l'application  $\Phi : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (et de son respect des orientations) avant l'énoncé de la Proposition 1.3. Lorsque  $\Phi$  est seulement de classe  $C^1$  (et non plus  $C^2$  au voisinage de  $\Delta_2$ ), on observe que la formule (1.82) que l'on souhaite établir ne fait intervenir que des dérivées partielles du premier ordre de la fonction  $\Phi$  (pour le calcul de la normale extérieure au bord). La formule demandée s'obtient donc en « régularisant »  $\Phi$ , ce que nous admettrons ici : les dérivées partielles d'ordre 2 ne jouent en effet au final aucun rôle dans cette formule.  $\square$

En dimension 3, la brique de base (ou « maille élémentaire » dans le plan  $\mathbb{R}^3$ ) devient le simplexe

$$\Delta_3 := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, u + v + w \leq 1\}$$

dont les sommets sont l'origine et les extrémités des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  (c'est maintenant un tétraèdre). Par une application  $\Phi : \Delta_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  (c'est-à-dire de classe  $C^1$  au voisinage de  $\Delta_3$ ), injective, et de jacobien restant strictement positif sur  $\Delta_3$ , ce simplexe se trouve transformé en un « tétraèdre déformé » de sommets  $\Phi(0, 0, 0)$ ,  $\Phi(1, 0, 0)$ ,  $\Phi(0, 1, 0)$ ,  $\Phi(0, 0, 1)$ .

Le fait que le jacobien  $\operatorname{Jac}[\Phi]$  reste strictement positif signifie ici encore que  $\Phi$  respecte les orientations : si l'on suit par exemple le bord de la face de  $\Delta_3$  située dans le plan horizontal  $\{w = 0\}$  en suivant le sens trigonométrique dans ce plan (partant de  $(0, 0, 0)$ , puis passant à  $(1, 0, 0)$ , ensuite à  $(0, 1, 0)$ , avant de revenir à  $(0, 0, 0)$ ), et que l'on prenne l'image par  $\Phi$  d'un tel chemin, on doit partir de

FIGURE 1.12. Respect des orientations par  $\Phi$ 

$\Phi(0,0,0)$ , puis passer (dans cet ordre) en  $\Phi(1,0,0)$ , puis en  $\Phi(0,1,0)$ , avant de revenir en  $\Phi(0,0,0)$ ; ce parcours doit définir le sens trigonométrique sur la face<sup>24</sup> du tétraèdre déformé contenant ces trois points  $M_0 := \Phi(0,0,0)$ ,  $M_1 := \Phi(1,0,0)$ ,  $M_2 := \Phi(0,1,0)$ . L'image  $M_3 := \Phi(0,0,1)$  se doit donc d'être placée de manière à ce que la base  $(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \overrightarrow{M_0M_3})$  de  $\mathbb{R}^3$  soit une base directe de  $\mathbb{R}^3$ , *i.e.* que le déterminant de ces vecteurs soit strictement positif (*cf.* la figure 1.12).

Le Théorème de Fubini, comme c'était le cas lors de la preuve de la Proposition 1.3, permet cette fois de démontrer le résultat suivant :

**PROPOSITION 1.5** (théorème fondamental de l'analyse pour le simplexe  $\Delta_3$  de l'espace). *Soient  $F, G, H$  trois fonctions de classe  $C^1$  de  $\Delta_3$  dans  $\mathbb{R}$  (*i.e.* de classe*

<sup>24</sup> Cette face se présente maintenant sous la forme d'un triangle non seulement « déformé » (comme l'était  $\Phi(\Delta_2)$  dans le Théorème 1.7), mais cette fois de plus « gondolé » dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

$C^1$  au voisinage de  $\Delta_3$ ). On a la formule

$$\begin{aligned}
 & \iint\iint_{\Delta_3} \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial G}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial H}{\partial z}(x, y, z) \right) dx dy dz = \\
 (1.86) \quad & = - \iint_{\Delta_2} F(0, y, z) dy dz - \iint_{\Delta_2} G(x, 0, z) dz dx - \iint_{\Delta_2} H(x, y, 0) dx dy \\
 & + \iint_{\Delta_2} \left\langle \begin{pmatrix} F(x, y, 1-x-y) \\ G(x, y, 1-x-y) \\ H(x, y, 1-x-y) \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \sqrt{3} dx dy.
 \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. C'est quasiment la même que celle de la Proposition 1.3. On utilise ainsi le théorème de Fubini : par exemple

$$\begin{aligned}
 & \iint\iint_{\Delta_3} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Delta_2} \left( \int_{[0, 1-y-z]} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) dx \right) dy dz \\
 & = \iint_{\Delta_2} (F(1-y-z, y, z) - F(0, y, z)) dy dz.
 \end{aligned}$$

d'après le Théorème fondamental de l'analyse en dimension 1 (à savoir le Théorème 1.6). On raisonne de la même manière pour chacune des trois intégrales impliquées dans la première ligne de (1.86).  $\square$

Avant d'énoncer une reformulation sous l'angle de la physique de ce résultat, ce qui constituera le Théorème fondamental de l'analyse en dimension 3, il convient de préciser la définition de *volume 2-dimensionnel* (ou *mesure de surface*) sur un morceau de nappe paramétrée de  $\mathbb{R}^3$ .

DÉFINITION 1.7 (mesure de surface sur un morceau de nappe paramétrée de  $\mathbb{R}^3$ ). Soit  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  l'image de  $\Delta_2$  par une application  $\sigma : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  sur  $\Delta_2$  (i.e. au voisinage de  $\Delta_2$ ), injective sur l'intérieur de  $\Delta_2$ , et telle l'application

$$(t, s) \mapsto \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right) (t, s) \in \mathbb{R}^3$$

ne s'annule pas (sauf éventuellement sur un sous-ensemble négligeable de  $\Delta_2$ ). Le volume 2-dimensionnel sur le morceau de nappe paramétrée<sup>25</sup> est défini par

$$(1.87) \quad \text{vol}_{2, \Sigma}(A) = \iint_{\{(t, s) \in \Delta_2 : \sigma(t, s) \in A\}} \left\| \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right) (t, s) \right\| dt ds.$$

lorsque  $A$  est un sous-ensemble mesurable de  $\Sigma$  (c'est-à-dire l'intersection avec  $\Sigma$  d'un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^3$ ). L'intégrale sur  $\Sigma$  d'une fonction continue  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  relativement à cette mesure de surface est alors définie par

$$(1.88) \quad \iint_{\Sigma} f d[\text{vol}_{2, \Sigma}] := \iint_{\Delta_2} f(\sigma(t, s)) \left\| \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right) (t, s) \right\| dt ds.$$

REMARQUE 1.17. On rappelle (cf. la Proposition 1.1) que la norme du produit extérieur de deux vecteurs de l'espace est égale à la surface du parallélogramme construit à partir de ces deux vecteurs dans le plan qu'ils engendrent. En ce sens, si  $(t, s) \in \Delta_2$  et si la fonction  $\sigma : (t, s) \in \Delta_2 \rightarrow \sigma(t, s) \in \mathbb{R}^3$  est le paramétrage de la nappe  $\Sigma$ , la quantité

$$\left\| \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right) (t, s) \right\| dt ds$$

25. On parle ici de « mesure de surface » car il s'agit d'une mesure sur un morceau de surface.

correspond bien à la mesure de l'élément infinitésimal de surface sur cette nappe paramétrée  $\Sigma$  au point  $\sigma(t, s)$ . Ceci explique naturellement les définitions (1.87) et (1.88).

Ceci étant posé, nous pouvons énoncer (dans un langage de physicien) le Théorème fondamental de l'analyse dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

**THÉORÈME 1.8** (théorème fondamental de l'analyse en dimension 3). *Soit  $\Phi : \Delta_3 \mapsto \mathbb{R}^3$  une application de classe  $C^1$  (i.e. de classe  $C^1$  au voisinage de  $\Delta_3$ ), injective, de jacobien strictement positif sur  $\Delta_3$ . Soit  $\vec{V}$  un champ de forces de classe  $C^1$  au voisinage du « tétraèdre déformé »  $\Phi(\Delta_3)$ . Le flux sortant du champ de vecteurs  $\vec{V}$  au travers du bord du tétraèdre déformé  $\Phi(\Delta_3)$  est égal à l'intégrale sur ce tétraèdre déformé de la divergence du champ  $\vec{V}$ , autrement dit :*

$$(1.89) \quad \begin{aligned} & \iint_{\partial\Phi(\Delta_3)} \langle \vec{V}(x, y, z), \vec{n}_{\text{ext}}(x, y, z) \rangle d[\text{vol}_{2, \partial[\Phi(\Delta_3)]}] = \\ & = \iiint_{\Phi(\Delta_3)} \text{div}(\vec{V}(x, y, z)) \, dx dy dz. \end{aligned}$$

**DÉMONSTRATION.** Elle repose une fois encore sur la formule de changement de variables du Théorème 1.3. Supposons

$$\vec{V}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}.$$

et

$$\Phi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)).$$

On introduit (dans  $\mathbb{R}^3$  rapporté aux coordonnées  $u, v, w$ ) le champ de vecteurs

$$\vec{U}(u, v, w) = F(u, v, w) \vec{i} + G(u, v, w) \vec{j} + H(u, v, w) \vec{k},$$

où  $F, G, H$  sont ainsi définies (de manière « tournante », notons le) :

$$\begin{aligned} F &= P \circ \Phi \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} + Q \circ \Phi \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \end{vmatrix} + R \circ \Phi \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} \\ G &= P \circ \Phi \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} + Q \circ \Phi \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial u} \end{vmatrix} + R \circ \Phi \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} \\ H &= P \circ \Phi \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} + Q \circ \Phi \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} + R \circ \Phi \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Si  $\Phi$  est supposée de classe  $C^2$  au voisinage de  $\Delta_3$ , le calcul (un peu pénible, mais juste technique) montre (toujours en utilisant l'égalité des dérivées partielles d'ordre deux croisées) que

$$\text{div}(\vec{U}(u, v, w)) = \text{div}(\vec{V})(\Phi(u, v, w)) \times \text{Jac}[\Phi](u, v, w).$$

On a donc, d'après la formule de changement de variables dans les intégrales (Théorème 1.3, formule (1.60)), et puisque le jacobien de  $\Phi$  est supposé strictement positif dans  $\Delta_3$  :

$$(1.90) \quad \iiint_{\Phi(\Delta_3)} \text{div}(\vec{V}(x, y, z)) \, dx dy dz = \iiint_{\Delta_3} \text{div}(\vec{U}(u, v, w)) \, dudvdw.$$

D'après la Proposition 1.5, on a

$$\iiint_{\Delta_3} \operatorname{div}(\vec{U}(u, v, w)) \, dudvdw = \iint_{\partial\Delta_3} \langle \vec{U}(u, v, w), \vec{n}_{\text{ext}}(u, v, w) \rangle d[\operatorname{vol}_{2, \partial[\Delta_3]}].$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que le second membre de cette formule est exactement égal au membre de gauche de la formule (1.89). On utilise pour cela le fait que (du fait que  $\Phi$  respecte les orientations, noter encore le caractère « circulant » des formules) :

$$\begin{aligned} \vec{n}_{\text{ext}}(0, v, w) &= - \frac{\frac{\partial\Phi(0, v, w)}{\partial v} \wedge \frac{\partial\Phi(0, v, w)}{\partial w}}{\left\| \frac{\partial\Phi(0, v, w)}{\partial v} \wedge \frac{\partial\Phi(0, v, w)}{\partial w} \right\|} \\ \vec{n}_{\text{ext}}(u, 0, w) &= - \frac{\frac{\partial\Phi(u, 0, w)}{\partial w} \wedge \frac{\partial\Phi(u, 0, w)}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial\Phi(u, 0, w)}{\partial w} \wedge \frac{\partial\Phi(u, 0, w)}{\partial u} \right\|} \\ \vec{n}_{\text{ext}}(u, v, 0) &= - \frac{\frac{\partial\Phi(u, v, 0)}{\partial u} \wedge \frac{\partial\Phi(u, v, 0)}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial\Phi(u, v, 0)}{\partial u} \wedge \frac{\partial\Phi(u, v, 0)}{\partial v} \right\|} \\ \vec{n}_{\text{ext}}(u, v, 1 - u - v) &= \frac{\frac{\partial\Phi(u, v, 1 - u - v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial\Phi(u, v, 1 - u - v)}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial\Phi(u, v, 1 - u - v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial\Phi(u, v, 1 - u - v)}{\partial v} \right\|}. \end{aligned}$$

Ce sont ces expressions que l'on reporte dans le membre de gauche de (1.89) en paramétrant respectivement les quatre faces du tétraèdre déformé par :

$$\begin{aligned} (v, w) \in \Delta_2 &\longmapsto \Phi(0, v, w) \\ (w, u) \in \Delta_2 &\longmapsto \Phi(u, 0, w) \\ (u, v) \in \Delta_2 &\longmapsto \Phi(u, v, 0) \\ (u, v) \in \Delta_2 &\longmapsto \Phi(u, v, 1 - u - v). \end{aligned}$$

Les quatre intégrales sur  $\Delta_2$  apparaissant ici correspondent (dans cet ordre) au quatre intégrales impliquées dans le membre de droite de la formule (1.86). Lorsque  $\Phi$  est seulement de classe  $C^1$  (et non plus  $C^2$  au voisinage de  $\Delta_3$ ), on observe que la formule (1.89) que l'on souhaite établir ne fait intervenir que des dérivées partielles du premier ordre de la fonction  $\Phi$  (pour le calcul de la normale extérieure au bord). La formule demandée s'obtient donc en « régularisant »  $\Phi$ , ce que nous admettrons ici : les dérivées partielles d'ordre 2 ne jouent en effet au final aucun rôle dans cette formule.  $\square$

La brique de base  $\Delta_3$  (et ses images  $\Phi(\Delta_3)$  par des applications à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , de classe  $C^1$  sur  $\Delta_3$ , injectives sur  $\Delta_3$  et de jacobien strictement positif) est utilisée en mathématiques appliquées pour construire des maillages de domaines volumiques dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  : on dit que les tétraèdres déformés  $\Phi_1(\Delta_3), \dots, \Phi_M(\Delta_3)$  constituent un *maillage* (ou encore une *tesselisation*<sup>26</sup>) d'un domaine plan borné  $E$  lorsque

- $E$  est union des  $\Phi_j(\Delta_3)$ ,  $j = 1, \dots, M$  ;
- les intérieurs des tétraèdres déformés  $\Phi_j(\Delta_3)$ ,  $j = 1, \dots, M$ , sont disjoints deux-à-deux ;

26. Pensez aux briques ou « tessons » impliqués dans une mosaïque spatiale.

- si deux tétraèdres déformés  $\Phi_j(\Delta_3)$  et  $\Phi_k(\Delta_3)$  se rencontrent, leur intersection est soit un sommet, soit une arête, soit une face, commune à ces deux tétraèdres déformés.

De la même manière que nous avons déduit du Théorème fondamental de l'analyse en dimension deux (Théorème 1.7) la formule de Green-Ostrogradski en dimension deux (à savoir la formule (1.83), cf. la remarque Remarque 1.16), nous pouvons déduire du théorème fondamental de l'analyse en dimension trois (Théorème 1.8) la *formule de Green Ostrogradski* en dimension trois.

**THEORÈME 1.9** (formule de Green-Ostrogradski en dimension 3). *Soit  $E$  un domaine volumique maillé par un maillage dont les mailles sont des tétraèdres déformés  $\Phi_j(\Delta_3)$ ,  $j = 1, \dots, M$ , où, pour chaque  $j = 1, \dots, M$ ,  $\Phi_j : \Delta_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une application de classe  $C^1$ , injective, et de jacobien strictement positif. Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  au voisinage de  $E$ . Alors le flux sortant du champ  $\vec{V}$  au travers du bord de  $E$  est égal à l'intégrale sur  $E$  de la divergence de ce champ. Autrement dit, on a la formule :*

$$(1.91) \quad \iint_{\partial E} \langle \vec{V}(x, y, z), \vec{n}_{\text{ext}}(x, y, z) \rangle d[\text{vol}_{2, \partial E}] = \iiint_E \text{div}(\vec{V}(x, y, z)) dx dy dz.$$

**DÉMONSTRATION.** On écrit la formule (1.89) pour chaque  $j = 1, \dots, M$ , puis on ajoute toutes les formules obtenues. Tous les calculs de flux correspondant à l'une face de l'un des tétraèdres déformés  $\Phi_j(\Delta_3)$  en même temps commune à un autre ( $\Phi_k(\Delta_3)$  pour  $k \neq j$ ) s'annihilent : en effet, il y a dans ce cas deux normales extérieures opposées à prendre en compte, celle correspondant à la face considérée comme face de la maille  $\Phi_j(\Delta_3)$  et celle correspondant à la même face, mais considérée cette fois comme face de la maille  $\Phi_k(\Delta_3)$ . Au final, il ne reste, après addition de toutes les formules (1.89) pour tous les  $\Phi_j(\Delta_3)$ ,  $j = 1, \dots, M$ , que la formule (1.91).  $\square$

**EXEMPLE 1.18** (formule de Green). Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de classe  $C^2$  au voisinage d'un tel domaine volumique maillé  $E$  (comme dans le Théorème 1.9), un calcul simple montre que

$$\text{div}(f \vec{\nabla} g - g \vec{\nabla} f) = f \Delta g - g \Delta f,$$

où  $\vec{\nabla}$  désigne la prise de gradient et

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

désigne le laplacien<sup>27</sup>. En appliquant au champ de vecteurs  $\vec{V} = f \vec{\nabla} g - g \vec{\nabla} f$  la formule de Green-Ostrogradski (1.91), on obtient l'importante *formule de Green* :

$$(1.92) \quad \begin{aligned} & \iint_{\partial E} \langle (f \vec{\nabla} g - g \vec{\nabla} f)(x, y, z), \vec{n}_{\text{ext}}(x, y, z) \rangle d[\text{vol}_{2, \partial E}] = \\ & = \iint_{\partial E} \left( f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}} - g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}} \right) (x, y, z) d[\text{vol}_{2, \partial E}] \\ & = \iiint_E (f \Delta g - g \Delta f)(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

<sup>27</sup>. Cet opérateur différentiel du second ordre ne privilégie aucune direction dans l'espace : on dit qu'il est *isotrope*.

Cette formule justifie le rôle important joué par exemple par le laplacien en analyse d'image : pour mettre en évidence les lignes de contraste d'une image (par exemple les contours des objets figurés), on en calcule le laplacien. Elle est aussi capitale en électromagnétisme. On dispose de la même formule en dimension 2 ( $E$  étant cette fois un domaine plan maillé dont la frontière et une courbe) en appliquant (toujours au champ de vecteurs  $f \vec{\nabla} g - g \vec{\nabla} f$ ) la formule de Green-Ostrograski cette fois en dimension 2 (à savoir la formule (1.83), cf. la Remarque 1.16).

**1.6.4. Circulation d'un champ de vecteurs et formule de Stokes.** Le Théorème fondamental de l'analyse en dimension 2 se décline sous une forme différente, faisant intervenir la notion physique de *travail* ou *circulation* d'un champ de vecteurs.

**DÉFINITION 1.8** (circulation ou travail d'un champ de vecteurs). Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$  par morceaux<sup>28</sup> et  $\vec{V}$  un champ de vecteurs (*i.e.* une application à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ), défini et continu au voisinage de  $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$ . On appelle *circulation* ou *travail* du champ de vecteurs  $\vec{V}$  sur  $[a, b]$  l'intégrale

$$W(\vec{V}; \gamma) := \int_{[a,b]} \langle \vec{V}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

**REMARQUE 1.18.** Si  $\tilde{\gamma} : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une autre application de classe  $C^1$  par morceaux telle que  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$ , où  $\varphi : [a, b] \rightarrow [a', b']$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  strictement croissant, on a, d'après la formule de changement de variables dans les intégrales (Théorème 1.3) :

$$(1.93) \quad W(\vec{V}; \gamma) := \int_{[a,b]} \langle \vec{V}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{[a',b']} \langle \vec{V}(\tilde{\gamma}(t)), \tilde{\gamma}'(t) \rangle dt = W(\vec{V}; \tilde{\gamma})$$

Autrement dit, le travail d'un champ le long d'un chemin paramétré ne dépend pas du paramétrage (pourvu que celui ci respecte le même sens de parcours).

Si  $\gamma : t \in [a, b] \rightarrow (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \in \mathbb{R}^n$  est un chemin paramétré de classe  $C^1$  par morceaux, et si  $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$  désigne un champ de vecteurs continu au voisinage de l'image de ce chemin, il est commode de noter<sup>29</sup> le travail  $W(\vec{F}; \gamma)$  sous la forme

$$W(\vec{F}; \gamma) = \int_{\gamma} (F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n).$$

En effet  $dx_j = \gamma'_j(t) dt$  pour  $j = 1, \dots, n$ . On a donc bien, suivant cette règle :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n) &= \int_{[a,b]} (F_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + F_n(\gamma(t))\gamma'_n(t)) dt \\ &= \int_{[a,b]} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = W(\vec{F}; \gamma). \end{aligned}$$

28. On dit aussi : un *chemin paramétré  $C^1$  par morceaux*.

29. On définit ainsi l'*intégrale curviligne* de ce que vous serez appelé peut-être à dénommer ultérieurement comme la *1-forme différentielle*  $F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$ , prise sur le chemin paramétré  $\gamma$ . Mais comme la notion (géométrique) de forme différentielle sort du cadre de cette UE, nous n'insisterons pas ici sur cette notion d'intégrale curviligne, (bien qu'elle s'avère important tout de même dans la théorie des EDO, si l'on pense par exemple écrire  $dy/dx = A(x, y)$  sous la forme alternative  $dy - A(x, y) dx = 0$ ).



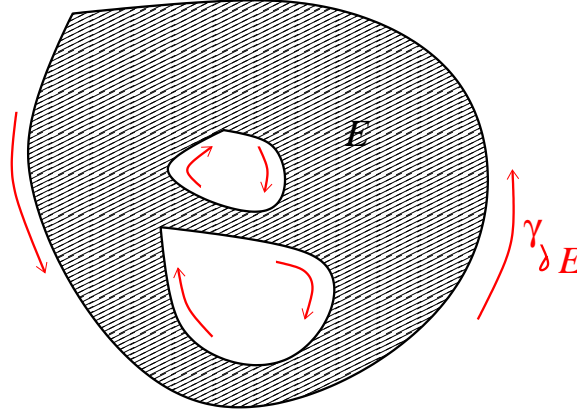


FIGURE 1.13. Orientation du bord pour la formule de Green-Riemann dans le plan

THEORÈME 1.10 (formule de Stokes dans le plan, ou de Green-Riemann). Soit  $E$  un domaine plan maillé par une triangulation constituée des triangles déformés  $\Phi_j(\Delta_2)$ , comme dans la Remarque 1.16. Soit  $\gamma_{\partial E}$  le bord<sup>30</sup> de  $E$ , parcouru de manière à avoir toujours le domaine  $E$  à gauche. Si  $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j}$  est un champ de vecteurs de classe  $C^1$  au voisinage de  $E$ , on a

$$(1.94) \quad W(\vec{V}; \gamma_{\partial E}) = \int_{\gamma_{\partial E}} Pdx + Qdy = \iint_E \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (x, y) dx dy.$$

DÉMONSTRATION. On remarque qu'en un point du bord de  $E$  (paramétré comme convenu comme le chemin  $\gamma_{\partial E}$ ), on a

$$\vec{n}_{\text{ext}}(\gamma_{\partial E}(t)) = R_{-\pi/2} \left[ \frac{\gamma'_{\partial E}(t)}{\|\gamma'_{\partial E}(t)\|} \right],$$

où  $\mathcal{R}_{-\pi/2}$  désigne la rotation vectorielle d'angle  $-\pi/2$ . On a donc :

$$\langle \vec{V}(\gamma_{\partial E}(t)), \gamma'_{\partial E}(t) \rangle = \langle \mathcal{R}_{-\pi/2}[\vec{V}(\gamma_{\partial E}(t))], \vec{n}_{\text{ext}}(\gamma_{\partial E}(t)) \rangle \|\gamma'_{\partial E}(t)\|.$$

La formule (1.94) résulte de la formule de Green-Ostrogradski en dimension deux ((1.83), Remarque 1.16), appliquée avec le champ de vecteurs  $\mathcal{R}_{-\pi/2}[\vec{V}]$ .  $\square$

EXEMPLE 1.19 (exemple d'application : le calcul des surfaces de domaines plans). Si  $E$  est un domaine plan maillé (comme dans le Théorème 1.10), il est aisé de calculer sa surface suivant l'une ou l'autre des formules (au choix) :

$$\text{Aire}(E) := \iint_E dx dy = \int_{\gamma_{\partial E}} x dy = - \int_{\gamma_{\partial E}} y dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma_{\partial E}} (x dy - y dx).$$

Par exemple, prendre pour la première  $P(x, y) = 0$  et  $Q(x, y) = x$ , pour la seconde  $P(x, y) = -y$  et  $Q(x, y) = 0$ . Ces formules sont bien plus pratiques que l'utilisation du théorème de Fubini pour calculer la surface d'un domaine compliqué. Par

<sup>30</sup>. Ce bord est considéré comme une famille de lacets paramétrés, l'un constituant le bord « externe », les autres les bords « internes » (comme sur la figure 1.13).

exemple, la surface de l'ellipse

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

de grand axe  $a$  et de petit axe  $b$ , dont le bord se paramètre par :

$$\theta \in [0, 2\pi] \mapsto (a \cos \theta, b \sin \theta)$$

vaut

$$\int_{[0, 2\pi]} a \cos \theta d[b \sin \theta] = ab \int_{[0, 2\pi]} \cos^2 \theta d\theta = \pi ab.$$

Notons que l'on peut, suivant le même principe, ramener le calcul du volume d'un domaine maillé  $E$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  à une intégrale double (en l'occurrence un calcul de flux sortant au travers du bord de  $E$ ) grâce à la formule de Green-Ostrogradski en dimension trois (formule (1.91)), en prenant comme champ de vecteurs  $(x, 0, 0)$ ,  $(0, y, 0)$  ou  $(0, 0, z)$ , de manière à ce que la divergence du champ  $\vec{V}$  en jeu dans cette formule soit identiquement égale à 1 dans  $E$ .

Pour étendre la formule de Green-Riemann (1.94) au cadre de l'espace, il nous faut introduire la notion de *rotationnel* d'un champ de vecteurs dans l'espace.

**DÉFINITION 1.9** (rotationnel d'un champ). Soit  $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ . Le *rotationnel* de  $\vec{V}$  dans cet ouvert  $U$  est le champ de vecteurs

$$(1.95) \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) := \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & P & \vec{i} \\ \frac{\partial}{\partial y} & Q & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial z} & R & \vec{k} \end{vmatrix}.$$

**REMARQUE 1.19.** La formule (1.94), si l'on note  $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ , se reformule donc ainsi :

$$(1.96) \quad W(\vec{V}; \gamma_{\partial E}) = \iint_E \langle \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}), \vec{k} \rangle(x, y, 0) dx dy.$$

Remarquons que le vecteur  $\vec{k}$  est le vecteur unitaire orthogonal à la « plaque » plane  $E$  (considérée cette fois dans le plan  $\{z = 0\}$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ ), choisi de manière à former une base directe avec la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  du plan  $\mathbb{R}^2$ .

La formule de Green-Riemann (1.94) peut être « relevée » sur un graphe dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Nous avons ainsi le résultat suivant :

**THEORÈME 1.11** (formule de Stokes sur un graphe dans l'espace). Soit  $E$  un domaine plan maillé par une triangulation constituée des triangles déformés  $\Phi_j(\Delta_2)$ , comme dans la Remarque 1.16. Soit  $\sigma : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue, égale à une fonction  $\sigma_j$  de classe  $C^1$  sur chaque maille  $\Phi_j(\Delta_2)$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Soit  $\vec{V} := P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  au voisinage du graphe<sup>31</sup>

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in E, z = \sigma(x, y)\}$$

<sup>31</sup>. Ce graphe se présente comme une nappe paramétrée (par  $(x, y)$  appartenant au domaine maillé  $E \subset \mathbb{R}^2$ ).

de l'application  $\sigma$  au dessus du domaine plan maillé  $E$ . Soit  $\Gamma_{\partial\Sigma}$  le « bord<sup>32</sup> » de  $\Sigma$  orienté par transfert par  $(x, y) \mapsto (x, y, \sigma(x, y))$  de l'orientation du bord de  $E$ . Soit aussi, pour chaque point  $(x, y) \in \Phi_j(\Delta_2)$  ( $j = 1, \dots, M$ ) :

$$\vec{n}_{\Sigma, j}(x, y, \sigma(x, y)) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \sigma_j}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \sigma_j}{\partial y} \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \sigma_j}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \sigma_j}{\partial y} \end{pmatrix} \right\|}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\vec{\nabla} \sigma_j(x, y)\|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \sigma_j}{\partial x}(x, y) \\ -\frac{\partial \sigma_j}{\partial y}(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

(figurant le vecteur normal unitaire à  $\Sigma$  au point  $(x, y, \sigma(x, y))$ , considéré comme point de  $\sigma(\Phi_j(\Delta_2)) = \sigma_j(\Phi_j(\Delta_2))$ , dirigé de manière à ce que

$$\langle \vec{n}_{\Sigma, j}(x, y, \sigma(x, y)), \vec{k} \rangle > 0.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} W(\vec{V}; \Gamma_{\partial\Sigma}) &= \\ &= \sum_{j=1}^m \iint_{\sigma_j(\Phi_j(\Delta_2))} \langle \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}), \vec{n}_{\Sigma, j} \rangle(x, y, \sigma_j(x, y)) d[\text{vol}_{2, \Sigma}](x, y, \sigma_j(x, y)) \\ (1.97) \quad &= \iint_{\Sigma} \langle \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}), \vec{n}_{\Sigma} \rangle(x, y, z) d[\text{vol}_{2, \Sigma}](x, y, z) \\ &= \iint_E \langle \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}), \vec{n}_{\Sigma} \rangle(x, y, \sigma(x, y)) \sqrt{1 + \|\vec{\nabla} \sigma(x, y)\|^2} dx dy \\ &= \iint_E \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) & 1 & 0 \\ & \frac{\partial \sigma}{\partial x} & \frac{\partial \sigma}{\partial y} \end{vmatrix} (x, y, \sigma(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Autrement dit, la circulation du champ de vecteurs  $\vec{V}$  le long du bord de la nappe paramétrée  $\Sigma$  (orienté par transfert par  $(x, y) \mapsto (x, y, \sigma(x, y))$  de l'orientation du bord de  $E$ ) est égale au flux du rotationnel du champ  $\vec{V}$  à travers la nappe  $\Sigma$ , calculé avec la convention que la normale extérieure au point courant de  $\Sigma$  pointe dans la direction des  $z > 0$ .

DÉMONSTRATION. On se ramène à prouver cette formule lorsque  $E = \Phi_j(\Delta_2)$ ; la formule finale s'obtiendra ensuite par addition comme c'est le cas pour la formule de Green-Riemann, cf. la Remarque 1.16). Supposons donc  $E = \Phi_j(\Delta_2)$  et  $\sigma = \sigma_j$ . On peut aussi se contenter de prouver le résultat lorsque  $\sigma_j$  est  $C^2$  puisque la formule (1.97) ne fait en aucun cas apparaître de calculs de dérivées partielles du second ordre. Il suffit alors de remarquer (en utilisant la formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue en une variable) que :

$$W(\vec{V}; \Gamma_{\partial\Sigma}) = W(\vec{U}; \gamma_{\partial E}),$$

où

$$\vec{U}(x, y) = F(x, y) \vec{i} + G(x, y) \vec{j},$$

32. C'est-à-dire l'image par  $(x, y) \mapsto (x, y, \sigma(x, y))$  du bord de  $E$ .

avec

$$(1.98) \quad \begin{aligned} F(x, y) &= P(x, y, \sigma(x, y)) + R(x, y, \sigma(x, y)) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \\ G(x, y) &= Q(x, y, \sigma(x, y)) + R(x, y, \sigma(x, y)) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

En utilisant la formule (1.94) (Théorème de Green-Riemann dans le plan), on observe que

$$W(\vec{V}; \Gamma_{\partial\Sigma}) = W(\vec{U}; \gamma_{\partial E}) = \iint_E \left( \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) (x, y) \, dx dy.$$

C'est en fait (une fois tous les calculs faits) la formule voulue : le membre de droite de cette formule correspond en effet à l'expression figurant sur la dernière ligne de la formule (1.97).  $\square$

Ainsi se termine cette première partie du cours dédiée à une présentation « piétonne » de l'intégration « moderne », couplée avec une brève initiation aux rudiments de l'analyse vectorielle (champs de vecteurs, flux, formules de Green-Ostrogradski – on dit aussi de la divergence – et de Stokes dans le plan ou l'espace). Voir les exercices proposés en TP pour la « gymnastique » pratique avec ces formules.

## Initiation à l'étude qualitative des EDO

L'intégration (par le biais de l'explicitation de leurs solutions exactes sous forme de primitives – on parle alors de *méthode de quadrature* – ou du calcul numérique approché de solutions exactes exprimés sous forme de primitives) est, on s'en doute, intimement liée à l'étude (et à la résolution, autant que faire se peut, qu'elle soit analytique et donc théorique, ou bien simplement numérique), des équations différentielles ordinaires (EDO). Il est donc tout-à-fait naturel que la seconde partie de ce cours soit centrée autour de ces aspects, tout autant fondamentaux en ingénierie mathématique que ne le sont les outils de l'intégration pratique et de l'analyse vectorielle présentés au chapitre 1.

### 2.1. Équations différentielles résolubles en $Y'$

Soit  $p$  un entier supérieur ou égal à 1 et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{p+1}$ . Il faut comprendre cet ouvert  $U$  comme l'*espace des états* (on dit aussi *espace des phases*) d'un certain phénomène physique  $p$ -dimensionnel (dépendant d'une variable  $t$ , en général le temps) que l'on prétend contrôler : l'ensemble  $U$  est l'ensemble des couples  $(t, Y(t))$ , où  $t$  désigne un instant  $t$  pour lequel le phénomène se produit, et  $Y(t) \in \mathbb{R}^p$  la valeur du phénomène en cet instant  $t \in \mathbb{R}$ .

On supposera que le phénomène physique  $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}^d$  est régi par l'équation différentielle :

$$(2.1) \quad (t, Y(t)) \in U \quad \text{et} \quad Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

où  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  désigne une fonction continue. Une telle équation différentielle est dite *résoluble en  $Y'$* .

Tous les phénomènes physiques ne sont pas régis par une telle équation : par exemple, si l'espace des états est  $\mathbb{R}^2$  et que le phénomène physique est régi par l'équation différentielle (de Bessel, avec ici paramètre  $\nu$ , régissant de nombreux problèmes en mécanique) :

$$(2.2) \quad (t, Y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad t^2 Y''(t) + t Y'(t) + (t^2 - \nu^2) Y(t) = 0,$$

on peut certes considérer le vecteur

$$\tilde{Y}(t) = \begin{pmatrix} Y(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

et remarquer que l'équation (2.2) se met sous la forme :

$$(2.3) \quad (t, \tilde{Y}(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad t^2 \tilde{Y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu^2 - t^2 & -t \end{pmatrix} \tilde{Y}(t).$$

Mais aller plus loin serait impossible, car il faudrait pour cela pouvoir considérer pareille équation sous la forme :

$$(2.4) \quad (t, \tilde{Y}(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \tilde{Y}'(t) = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu^2 - t^2 & -t \end{pmatrix} \tilde{Y}(t),$$

ce qui ne saurait convenir car la division par  $t$  (qui s'annule en  $t = 0$ , ce qui créerait une discontinuité dans une fonction  $F$  éventuellement candidate) pose problème au second membre. Autant on peut en effet considérer séparément les deux équations :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} (t, \tilde{Y}(t)) \in ]0, \infty[ \times \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \tilde{Y}'(t) &= \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu^2 - t^2 & -t \end{pmatrix} \tilde{Y}(t) \\ (t, \tilde{Y}(t)) \in ]-\infty, 0[ \times \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \tilde{Y}'(t) &= \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu^2 - t^2 & -t \end{pmatrix} \tilde{Y}(t) \end{aligned}$$

comme des équations du type (2.1), c'est-à-dire résolubles ici en  $\tilde{Y}'$ , autant on ne saurait considérer l'équation différentielle (2.3) sous la forme d'une équation différentielle résoluble en  $\tilde{Y}'$ , c'est-à-dire de la forme (2.1).

Autre exemple, si  $p = 1$  cette fois. On serait aussi dans l'incapacité de ramener à une équation résoluble en  $y'$  du type (2.1) une équation (par exemple) du type :

$$(t, y(t)) \in U \quad \text{et} \quad \sin(y'(t)) = f(t, y(t)),$$

où  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue arbitraire dans  $U$ .

Par contre, toute équation différentielle d'ordre supérieur  $k > 1$ , de la forme :

$$(2.6) \quad (t, Y(t), Y'(t), \dots, Y^{(k-1)}(t)) \in \mathbb{U} \quad \text{et} \quad Y^{(k)}(t) = F(t, Y(t), \dots, Y^{(k-1)}(t)),$$

où  $\mathbb{U}$  est un ouvert cette fois de  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^p)^k = \mathbb{R}^{pk+1}$  et  $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^p$  une fonction de  $\mathbb{U}$  dans  $\mathbb{R}^p$ , peut se mettre sous la forme d'une équation du type (2.1). On associe pour cela au vecteur de fonctions  $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de fonctions :

$$t \mapsto \tilde{Y}(t) = \begin{pmatrix} Y(t) \\ Y'(t) \\ \vdots \\ Y^{(k-2)}(t) \\ Y^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{pk}$$

et à la fonction continue  $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^p$  figurant dans (2.6) la fonction  $\mathbb{F} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^{pk}$  continue dans  $\mathbb{U}$  (puisque  $F$  l'est) définie par :

$$(2.7) \quad \forall (t, \tilde{Y}) \in \mathbb{U}, \quad \mathbb{F}(t, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_k) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_p & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I_p \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_{k-2} \\ \tilde{Y}_{k-1} \end{pmatrix} \\ F(t, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_k) \end{bmatrix}$$

(où  $I_p$  désigne la matrice identité de  $\mathbb{R}^p$ ). Alors, on remarque que dire que  $t \mapsto Y(t)$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ ) est solution de l'équation différentielle (2.6) d'ordre  $k$  équivaut à dire que  $t \mapsto \tilde{Y}(t)$  (à valeurs cette fois dans  $\mathbb{R}^{pk}$ ) est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 résoluble en  $\tilde{Y}'$  :

$$(2.8) \quad (t, \tilde{Y}(t)) \in \mathbb{U} \quad \text{et} \quad \tilde{Y}'(t) = \mathbb{F}(t, \tilde{Y}(t)).$$

On ne traitera donc dans ce cours que les équations différentielles du premier ordre résolubles en  $Y'$  (c'est-à-dire du type (2.1)). Notre étude englobe bien les équations d'ordre  $k > 1$ , pourvu qu'elles se présentent sous la forme d'une équation différentielle résoluble en  $Y^{(k)}$  de la forme (2.8). On les appellera *équations différentielles ordinaires résolubles en  $Y'$*  (en abrégé « EDO » résolubles en  $Y'$ , par souci de distinction avec les EDP : « équations aux dérivées partielles », où les fonctions  $Y$  en jeu dépendent de strictement plus que d'un paramètre).

## 2.2. Solutions d'une EDO résoluble en $Y'$ ; conditions initiales

DÉFINITION 2.1 (solution d'une EDO résoluble en  $Y'$ ). Soit l'équation différentielle résoluble en  $Y'$  :

$$(2.9) \quad (t, Y(t)) \in U \quad \text{et} \quad Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

où  $U$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{p+1}$  et  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  une fonction continue. On appelle *solution de l'équation différentielle* (2.9) tout couple  $(I, Y)$  constitué d'un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  et d'une fonction  $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $C^1$  dans  $I$  telle que :

$$(2.10) \quad \forall t \in I, (t, Y(t)) \in U \quad \text{et} \quad Y'(t) = F(t, Y(t)).$$

L'intervalle ouvert  $I$  est appelé *intervalle de vie* de la solution  $(I, Y)$ .

Ce qui sera surtout important pour nous sera le concept de *solution maximale*, car notre souci constant par la suite sera de trouver les solutions qui « vivent » le plus longtemps possible.

DÉFINITION 2.2 (solution maximale d'une EDO résoluble en  $Y'$ ). Une solution  $(I_{\max}, Y_{\max})$  de l'équation différentielle (2.9) est dite *solution maximale* de cette équation différentielle si et seulement si, pour toute autre solution  $(I, Y)$  de cette équation (2.9) telle que

$$I \supset I_{\max} \quad \text{et} \quad Y|_{I_{\max}} = Y_{\max},$$

alors on a en fait  $I = I_{\max}$ . Autrement dit, il est impossible de « prolonger » la solution  $Y_{\max}$  définie *a priori* sur l'intervalle  $I_{\max}$  en une solution qui vivrait plus longtemps qu'elle, c'est-à-dire qui continuerait à survivre dans un intervalle strictement plus grand que l'intervalle de vie  $I_{\max}$ .

Un puissant principe de logique mathématique que nous admettrons (l'*axiome de Zorn*, ce qui revient de fait à admettre, ce que nous ferons bien sûr, l'axiome du choix) assure que, si  $(I, Y)$  est une solution de l'EDO (2.9), alors il existe certainement au moins une solution maximale  $(I_{\max}, Y_{\max})$  (il peut fort bien y en avoir plusieurs) telle que  $I \subset I_{\max}$  et que  $(Y_{\max})|_I = Y$ . Autrement dit, toute solution de l'EDO (2.9) se prolonge d'au moins une manière en une solution maximale de cette EDO.

Ce qui sera de fait le plus important pour nous sera de savoir si, étant donné un point  $(t_0, Y_0)$  de  $U$ , il existe bien au moins une solution de l'équation différentielle (2.9) telle que  $t_0 \in I$  et  $Y(t_0) = Y_0$ . Si par chance il n'en existe qu'une, la trouver nous permettra à la fois de prévoir l'évolution du phénomène physique  $t \rightarrow Y(t)$  dans le futur ( $t > t_0$ ), étant entendu que l'on a observé (ou imposé) la « condition

initiale  $\gg Y(t_0) = Y_0$ , et aussi de tracer l'évolution de ce même phénomène physique dans son passé ( $t < t_0$ ).

Nous introduisons dans ce but, étant donnée une EDO du type (2.9), une nouvelle notion, celle de *problème de Cauchy avec condition (ou donnée) initiale*.

DÉFINITION 2.3 (problème de Cauchy). Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{p+1}$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  une fonction continue et

$$(2.11) \quad (t, Y(t)) \in U \quad \text{et} \quad Y'(t) = F(t, Y(t))$$

l'EDO résoluble en  $Y'$  associée. Étant donné un point  $(t_0, Y_0)$  de l'ouvert  $U$ , on appelle *problème de Cauchy pour l'EDO (2.11) avec donnée initiale  $Y_0$  à l'instant  $t_0$*  le couplage :

$$(2.12) \quad \begin{aligned} (t, Y(t)) \in U \quad \text{et} \quad Y'(t) &= F(t, Y(t)) \quad (\text{EDO}) \\ Y(t_0) &= Y_0 \quad (\text{condition initiale}). \end{aligned}$$

REMARQUE 2.1 (le cas des EDO d'ordre supérieur du type (2.6)). Pour une EDO d'ordre  $k$  résoluble en  $Y^{(k)}$  du type (2.6), une condition initiale à l'instant  $t_0$  est la donnée d'un vecteur  $(Y_0, Y'_0, \dots, Y_0^{(k-1)}) \in \mathbb{R}^{pk}$ , c'est-à-dire de  $k$  éléments de  $\mathbb{R}^p$  : la *position initiale*  $Y_0$  à l'instant  $t_0$ , la *vitesse initiale*  $Y'_0$  à l'instant  $t_0$ , l'*accélération initiale* à l'instant  $t_0$ , etc.

Nous pouvons préciser maintenant la notion de solution d'une EDO du type (2.11) avec données initiales précisées.

DÉFINITION 2.4 (solution d'un problème de Cauchy avec condition initiale pour une EDO du type (2.11)). Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{p+1}$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  une fonction continue. Soit  $(t_0, Y_0)$  un point marqué de l'ouvert  $U$ . On appelle solution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} (t, Y(t)) \in U \quad \text{et} \quad Y'(t) &= F(t, Y(t)) \quad (\text{EDO}) \\ Y(t_0) &= Y_0 \quad (\text{condition initiale}) \end{aligned}$$

tout couple  $(I, Y)$  constitué d'un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  et d'une fonction  $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $C^1$  dans  $I$  telle que :

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \forall t \in I, \quad (t, Y(t)) \in U \quad \text{et} \quad Y'(t) &= F(t, Y(t)) \\ Y(t_0) &= Y_0 \quad (\text{condition initiale}). \end{aligned}$$

Il est important d'observer le fait suivant :

PROPOSITION 2.1. *Un couple  $(I, Y)$  est dit solution du problème de Cauchy avec condition initiale (2.12) si et seulement si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^p$  une fonction continue (et non plus cette fois  $C^1$ ) telle que :*

$$(2.14) \quad \forall t \in I, \quad (t, Y(t)) \in U \quad \text{et} \quad Y(t) = Y_0 + \int_0^t F(\tau, Y(\tau)) d\tau,$$

*étant entendu que l'intégrale sur  $[t_0, t]$  d'une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  est le vecteur des intégrales des fonctions coordonnées.*



DÉMONSTRATION. Si  $t \in I \rightarrow Y(t)$  est une fonction continue vérifiant (2.14), cette fonction est une primitive de la fonction continue  $t \in I \mapsto F(t, Y(t))$ . C'est par conséquent une fonction dérivable sur  $I$  qui a pour dérivée sur cet intervalle la fonction continue  $t \in I \mapsto F(t, Y(t))$ . Cette fonction  $t \mapsto Y(t)$  vérifie aussi  $Y(t_0) = Y_0$ . Réciproquement, toute fonction  $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $C^1$  solution de (2.13) vérifie aussi (2.14) : ceci résulte du Théorème fondamental de l'analyse en dimension 1 (cf. le Théorème 1.6 au chapitre 1).  $\square$

REMARQUE 2.2 (un problème de point fixe). Supposons un instant que l'on puisse trouver (par chance) un segment fermé  $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subset \mathbb{R}$  et une boule fermée  $\bar{B}(Y_0, \eta)$  de  $\mathbb{R}^p$  de manière à ce que :

- d'une part

$$[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \bar{B}(Y_0, \eta) \subset U ;$$

- d'autre part, pour toute fonction continue  $Y : [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \rightarrow \bar{B}(Y_0, \eta)$ , la fonction continue

$$(2.15) \quad T[Y] : t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \mapsto Y_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, Y(\tau)) d\tau$$

soit telle que  $\text{Im}(T[Y]) \subset \bar{B}(Y_0, \eta)$ .

Dire alors qu'une fonction continue

$$Y : [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \rightarrow \bar{B}(Y_0, \eta)$$

vérifie (2.14) équivaut à dire que  $Y$  est un point fixe de l'application :

$$T : Y \in \mathcal{C}([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \bar{B}(Y_0, \eta)) \longrightarrow T[Y] \in \mathcal{C}([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \bar{B}(Y_0, \eta))$$

(où  $\mathcal{C}(A, B)$  désigne le  $\mathbb{R}$  espace des applications continues de  $A$  dans  $B$ , lorsque  $A$  est un segment de  $\mathbb{R}$  et  $B$  une boule fermée de  $\mathbb{R}^p$ ). Or on sait que si  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  une application strictement contractante, *i.e.* il existe  $\kappa \in ]0, 1[$  tel que  $\|T[X_2] - T[X_1]\| \leq \kappa \|X_2 - X_1\|$  pour tout  $X_1, X_2$  dans  $\mathbb{R}^N$ , alors  $T$  admet un unique point fixe, auquel on peut accéder (avec une convergence exponentiellement rapide) en suivant l'algorithme itératif  $X \leftarrow T[X]$  initié à partir de d'importe quel point de  $\mathbb{R}^N$  (cf. le cours d'Analyse 2 et le cours de Calcul Scientifique et Symbolique N1MA3003 [**Ycalc**], section 4.1). Malheureusement, le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{C}([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \bar{B}(Y_0, \eta))$  des fonctions continues de  $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$  dans  $\bar{B}(Y_0, \eta)$  (que l'on peut équiper de la norme uniforme), n'est pas un espace de dimension finie du type  $\mathbb{R}^N$ . Vous verrez cependant en L3 qu'il s'agit d'un espace où toute suite de Cauchy converge (on dit un *espace normé complet*), et où par conséquent le théorème du point fixe reste vrai. C'est sur ce résultat que va reposer le résultat majeur que nous admettrons dans ce cours, à savoir le Théorème de Cauchy-Lipschitz que nous allons énoncer dans la section suivante. Il est vraiment important ici de faire cette remarque capitale. Le fait qu'il existe une démarche algorithmique pour accéder au point fixe indique aussi qu'il sera possible numériquement de résoudre (au moins localement) dans ce cas le problème de Cauchy (2.12) et d'en trouver une solution dont l'intervalle de vie contient l'instant initial  $t_0$ . On pressent (dans cette approche numérique) l'importance que prendra le calcul numérique d'intégrale (méthodes de Newton, de quadrature, *etc.*, cf. encore le cours de l'UE N1MA3003, [**Ycalc**], chapitre 5), puisque c'est précisément une intégrale que l'opérateur  $T$  (dont on cherche à calculer le point fixe) fait apparaître (voir l'expression de  $T$  dans (2.15)).

Exactement comme nous avons défini la notion de solution maximale d'une EDO du type (2.11) (Définition 2.2), nous pouvons définir la notion de *solution maximale d'un problème de Cauchy avec condition initiale* du type (2.14).

DÉFINITION 2.5 (solution maximale d'un problème de Cauchy avec condition initiale du type (2.12)). Une solution  $(I_{\max}, Y_{\max})$  du problème de Cauchy avec condition initiale (2.12) est dite *solution maximale* de ce problème si et seulement si, pour toute autre solution  $(I, Y)$  de ce même problème telle que

$$I \supset I_{\max} \quad \text{et} \quad Y|_{I_{\max}} = Y_{\max},$$

alors on a en fait  $I = I_{\max}$ . Autrement dit, il est impossible de « prolonger » la solution  $Y_{\max}$  définie *a priori* sur l'intervalle  $I_{\max}$  en une solution de la même équation (2.11) qui vivrait plus longtemps qu'elle, c'est-à-dire qui continuerait à survivre dans un intervalle strictement plus grand que l'intervalle de vie  $I_{\max}$ .

On sait que toute solution  $(I, Y)$  du problème de Cauchy avec condition initiale (2.12) se prolonge en une solution maximale  $(I_{\max}, Y_{\max})$  de l'EDO résoluble en  $Y'$  (2.11). Ce prolongement est évidemment une solution maximale du problème de Cauchy avec condition initiale (2.12).

En général (c'est-à-dire lorsque la fonction  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  est continue, on dispose du résultat suivant, intéressant, mais de peu d'intérêt pratique :

THEORÈME 2.1 (théorème d'Ascoli-Peano). *Étant donnée une EDO résoluble en  $Y'$  du type (2.11) et un point  $(t_0, Y_0)$  de l'espace des états  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$  associé, il existe toujours au moins une solution maximale du problème de Cauchy (2.12). Par contre, l'unicité n'est pas assurée, ni au niveau local, ni au niveau global.*

Sans hypothèse supplémentaire sur  $F$ , on est donc incapable de prévoir l'évolution du phénomène physique régi par cette EDO (ou de retracer son passé) à partir de l'instant  $t_0$ , une fois après avoir observé (ou en ayant imposé) la condition initiale  $Y(t_0) = Y_0$ . La configuration de la figure 2.1 (deux solutions maximales du même problème de Cauchy), voire une configuration où une solution de l'EDO s'arrêterait brusquement de vivre en un point intérieur à l'espace des états, sont dans ce cas tout-à-fait envisageables.

EXEMPLE 2.1 (le seau percé). Soit l'équation (ici  $p = 1$ ) :

$$(2.16) \quad (t, y(t)) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad y'(t) = -C\sqrt{|y(t)|},$$

$C$  étant ici encore une constante réelle positive. On rencontre cette équation dans la célèbre expérience du « seau percé » retrouvé vide à un instant  $t = a \in \mathbb{R}$  (voir la figure 2.2). En fait, on se trouve dans l'incapacité de préciser à quel instant  $t_0 < a$  ce seau était plein : en effet, selon la loi de Toricelli, la hauteur d'eau dans le seau est régie par l'équation différentielle  $y'(t) = -C\sqrt{|y(t)|}$ ,  $C$  désignant une constante positive liée aux données de l'expérience (les paramètres physiques du seau percé et du liquide). Tant que  $y(t)$  reste strictement positif, il est aisé d'intégrer l'équation différentielle (2.16) qui, dans ce cas, devient  $y'(t) = -C\sqrt{y(t)}$  ou encore  $(\sqrt{y(t)})' = -C/2$ , ce qui donne

$$\sqrt{y(t)} = \frac{C}{2} \left( t_0 + \frac{2\sqrt{y_0}}{C} - t \right)$$

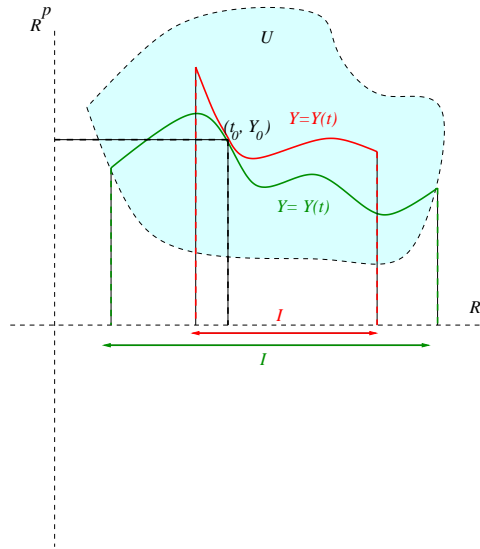


FIGURE 2.1. Espace des états et solutions maaximales d'un problème de Cauchy

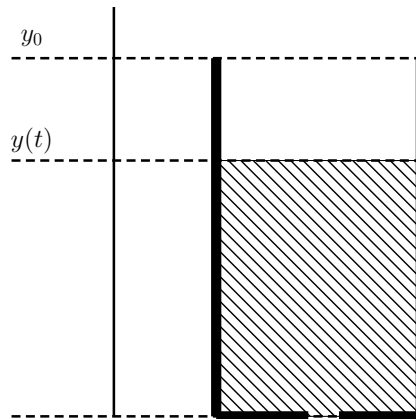


FIGURE 2.2. Ecoulement d'un liquide (loi de Toricelli)

si l'on suppose que  $y_0$  marque le niveau du seau plein ; si l'on suppose  $t_0 + \frac{2\sqrt{y_0}}{C} < a$ , toutes les fonctions

$$t \mapsto y(t) = \begin{cases} \frac{C^2}{4} \left( t_0 + \frac{2\sqrt{y_0}}{C} - t \right)^2 & \text{si } t \leq t_0 + \frac{2\sqrt{y_0}}{C} \\ 0 & \text{si } t \geq t_0 + \frac{2\sqrt{y_0}}{C} . \end{cases}$$

sont candidates à être solution de notre problème, car elles présentent toutes le seau vide à l'instant  $a$ , d'où l'ambiguïté en ce qui concerne la possibilité de déterminer

$t_0$  ! D'ailleurs, ici, toutes les fonctions  $y_{t_1, t_2}$ ,  $-\infty \leq t_1 < t_2 \leq +\infty$ , définies par

$$y_{t_1, t_2}(t) = \begin{cases} \frac{C^2}{4}(t - t_1)^2 & \text{si } t \leq t_1 \\ 0, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -\frac{C^2}{4}(t - t_2)^2 & \text{si } t \geq t_2. \end{cases}$$

sont solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle (2.16), et il suffit que  $a \in ]t_1, t_2[$  pour que l'indétermination de  $t_0$  soit totale.

### 2.3. Le théorème de Cauchy-Lipschitz et ses compagnons

**2.3.1. L'énoncé du résultat.** Pour parer au problème de non unicité qui limite l'intérêt du Théorème d'Ascoli-Peano (Théorème 2.1), il faut introduire une contrainte supplémentaire sur la fonction  $F$  impliquée dans l'EDO  $Y' = F(t, Y)$  avec condition initiale  $Y(t_0) = Y_0$ .

**THEORÈME 2.2** (Théorème de Cauchy-Lipschitz<sup>1</sup> version globale). *Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{p+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$  et  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  une fonction continue telle que, pour tout  $(t_0, Y_0)$  de  $U$ , il existe un voisinage ouvert  $V(t_0, Y_0) \subset U$  de  $(t_0, Y_0)$  et une constante  $K_{t_0, Y_0}$  telle que*

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \forall (t, Y_1), (t, Y_2) \in V(t_0, Y_0), \\ \|F(t, Y_1) - F(t, Y_2)\| \leq K_{t_0, Y_0} \|Y_1 - Y_2\| \end{aligned}$$

(une fonction  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  satisfaisant cette condition est dite localement lipschitzienne par rapport au bloc de variables  $Y \in \mathbb{R}^p$ ). Pour tout point  $(x_0, Y_0)$  de  $U$ , il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy

$$(2.18) \quad Y' = F(t, Y) \quad ; \quad Y(t_0) = Y_0 \quad (\text{condition initiale})$$

posé dans l'ouvert  $U$ .

**EXEMPLE 2.2** (Un cas particulier très important). L'exemple le plus fréquent est celui où la fonction  $F$  a des dérivées partielles en les coordonnées  $(Y_1, \dots, Y_p)$  qui sont toutes des fonctions continues de  $(t, Y)$  dans l'ouvert  $U$ . Dans ce cas, la fonction  $F$  est bien localement lipschitzienne dans  $U$  du fait de l'inégalité des accroissements finis et la conclusion du Théorème de Cauchy-Lipschitz 2.2 est valide. Tous les exemples traités dans la suite du cours entreront dans le cadre de cet exemple. Notamment l'exemple où  $U = I \times \mathbb{R}^p$  et  $F(t, Y) = A(t)Y + B(t)$ ,  $A$  étant une application continue de  $I$  dans  $\mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R})$  ( $\mathbb{R}$ -espace des matrices  $p \times p$  à coefficients réels) et  $B$  une application continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}^p$ ; une EDO du type :

$$(2.19) \quad Y' = A(t)Y + B(t), \quad A \in C^0(I, \mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R})), \quad B \in C^0(I, \mathbb{R}^p)$$

(où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ) est dite *EDO linéaire* sur  $I \times \mathbb{R}^p$ .

La preuve du Théorème 2.2 repose sur une version locale du même résultat (pour laquelle le recours au théorème du point fixe dans un espace vectoriel normé complet convenable est l'outil majeur). Nous admettons ici ce résultat (voir le cours de L3). Voir la Remarque 2.2 pour une première sensibilisation.

---

1. Au nom du mathématicien français Augustin Cauchy (1789-1857) est ici associé celui de l'analyste allemand Rudolph Lipschitz (1832-1903), à qui l'on doit la mise en évidence de l'importance de la condition (2.17); une fonction satisfaisant cette condition est d'ailleurs appelée fonction *localement lipschitzienne*.

**2.3.2. Un premier lemme « compagnon » : le lemme des bouts.** Un complément essentiel du Théorème de Cauchy Lipschitz s'énonce heuristiquement ainsi : aucune solution maximale du problème de Cauchy avec condition initiale (2.18) ne peut « disparaître dans un puits » tant qu'elle n'a pas atteint la frontière de l'espace des états  $U \subset \mathbb{R}^{p+1}$  sur lequel est définie la fonction  $F$ .

Pour préciser les choses, voici une définition et un énoncé.

**DÉFINITION 2.6** (« bouts » de solutions maximales). Soit  $(I, Y)$  une solution maximale du problème de Cauchy (2.18) posé dans  $U$ . Si  $I = ]\alpha, \beta[$  et  $\beta < +\infty$ , on appelle « bout droit de la solution maximale »  $(I, \varphi)$  le sous-ensemble

$$\{\beta\} \times \left( \bigcap_{t \in I} \overline{Y(]t, \beta[)} \right) \subset \mathbb{R}^{p+1}$$

de toutes les limites possibles des suites  $(t_n, Y(t_n))$  lorsque  $(t_n)_{n \geq 1}$  est une suite de points de  $I$  tendant vers  $\beta$ . De même, si  $\alpha > -\infty$ , on appelle « bout gauche de la solution maximale »  $(I, \varphi)$  le sous-ensemble

$$\{\alpha\} \times \left( \bigcap_{t \in I} \overline{Y(] \alpha, t[)} \right) \subset \mathbb{R}^{p+1}$$

de toutes les limites possibles des suites  $(t_n, Y(t_n))$  lorsque  $(t_n)_{n \geq 1}$  est une suite de points de  $I$  tendant vers  $\alpha$ .

**LEMME 2.1** (Lemme des bouts). *Pour un problème de Cauchy du type (2.18) avec posé dans l'ouvert  $U \subset \mathbb{R}^{p+1}$  (contenant  $(t_0, Y_0)$ ) avec*

$$F : (t, Y) \in U \mapsto F(t, Y) \in \mathbb{R}^p$$

*localement lipschitzienne en  $Y$  dans  $U$ , les « bouts de solutions maximales » sont toujours à la frontière de l'ouvert des états  $U$  sur lequel est définie (et localement lipschitzienne par rapport à  $Y$ ) la fonction  $F$ .*

**2.3.3. Un second lemme compagnon : le critère d'existence de Grönwall.** Le lemme des bouts (Lemme 2.1) s'avère bien souvent un auxiliaire précieux pour prédire (dans le futur) ou anticiper (dans le passé) les trajectoires des solutions de l'EDO, mais ce n'est pas toujours la panacée. L'ouvert  $U$  peut fort bien ne pas être borné et, dans ce cas, avoir pour une solution maximale un « bout » sur la frontière de  $U$  peut fort bien signifier que la solution  $t \mapsto Y(t)$  correspondante s'échappe vers l'infini lorsque  $t$  s'approche de l'abscisse du bout. Le critère d'existence de Thomas Grönwall<sup>2</sup> ci-dessous, fondé sur l'intégration d'une inéquation différentielle (nous l'admettrons encore) permet de compléter avantageusement le tableau : il nous donne des conditions permettant d'affirmer avec certitude qu'une solution maximale vivra assez longtemps.

**PROPOSITION 2.2** (critère d'existence de Grönwall). *Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $F : (t, Y) \mapsto F(t, Y)$  une fonction continue sur  $I \times \mathbb{R}^p$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ , localement lipschitzienne par rapport aux variables  $Y$ , et telle que, pour tout segment  $K = [a, b]$  de  $I$ , il existe des constantes positives  $C_{K,1}$  et  $C_{K,2}$  avec*

$$(2.20) \quad \forall (t, Y) \in K \times \mathbb{R}^p, \quad \|F(t, Y)\| \leq C_{K,1} \|Y\| + C_{K,2}.$$

2. Thomas Håkon Grönwall (1877-1932), physicien et mathématicien suédois à qui l'on doit (en 1919) le lemme d'analyse important qui porte son nom et implique le critère d'existence énoncé ici.

Les solutions maximales de tout problème de Cauchy

$$Y' = F(t, Y) \quad ; \quad Y(t_0) = Y_0 \text{ (condition initiale)}$$

posé dans  $I \times \mathbb{R}^p$  sont définies sur  $I$  tout entier. Autrement dit, elles vivent aussi longtemps qu'il leur est donné de vivre.

EXEMPLE 2.3 (l'exemple des EDO linéaires). C'est l'exemple d'application majeur du critère d'existence de Grönwall. L'ouvert  $U$  est ici  $I \times \mathbb{R}^p$  et la fonction  $F$  est de la forme

$$F(t, Y) = A(t)Y + B(t), \quad A \in C^0(I, \mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R})), \quad B \in C^0(I, \mathbb{R}^p)$$

(cf. (2.19)). Dans ce cas, le critère s'applique est l'on est certain que l'intervalle de vie de toute solution maximale est  $I$ . Mais il existe d'autres exemples où le critère de Grönwall s'applique : par exemple, les solutions maximales du problème :

$$y' = y - 2ty \sin y \quad ; \quad y(t_0) = y_0 \quad (t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2,$$

vivent dans  $\mathbb{R}$  tout entier (ici  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) ; en effet, on a  $|\sin y| \leq 1$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ .

Ce sont le Théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 2.2), le Lemme des bouts (Lemme 2.1), le Critère de Grönwall (Proposition 2.2), couplés en général avec d'autres principes (par exemple le *principe de comparaison* dont nous ne parlerons pas, faute de temps, dans ce cours) qui permettent de tracer les trajectoires des solutions de l'EDO résoluble en  $Y'$  que l'on a à étudier, prenant en compte par exemple qu'elles puissent se retrouver « piégées » dans des entonnoirs, qu'elles ne puissent franchir un certain type de « barrière » une fois qu'elle cette barrière franchie une fois, *etc.*, voir par exemple la section IV du chapitre 16 dans [MathL2]. Tracer les trajectoires solutions consiste à représenter ce que l'on appelle communément *plan de phase* de l'EDO résoluble en  $Y'$ . Il s'agit avant tout ici d'une étude *qualitative* et non *quantitative*. Avec l'étude des systèmes autonomes (section 2.6), nous ne ferons qu'effleurer dans ce cours sur un exemple particulier (Lotka-Volterra) le principe soutendant une telle démarche qualitative.

## 2.4. Les EDO linéaires ou s'y ramenant

**2.4.1. Le cas  $p = 1$ .** Rappelons ici la méthode de résolution par quadrature des équations linéaires dans le cas  $p = 1$ . L'ouvert  $U$  est dans ce cas  $I \times \mathbb{R}$  et  $t \in I \mapsto a(t)$ ,  $t \in I \mapsto b(t)$  sont deux fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

Pour trouver la solution (sur  $I$ ) de l'EDO

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

telle que  $y(t_0) = y_0$ , on introduit (première quadrature) la fonction

$$t \mapsto R(t_0, t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau\right).$$

On remarque ensuite que l'EDO homogène (*i.e.* sans second membre)

$$(2.21) \quad y' = a(t)y(t)$$

s'exprime aussi :

$$\frac{d}{dt}[y/R(t, t_0)] = 0.$$

Les solutions maximales de l'équation homogène (2.21) sont donc les fonctions :

$$t \in I \mapsto uR(t, t_0) = R(t, t_0)u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

La solution de l'équation homogène (2.21) valant  $u$  en  $t_0$  est en particulier

$$t \in I \mapsto R(t, t_0)u$$

car  $R(t_0, t_0) = 1$ .

On utilise ensuite pour calculer la solution de l'équation avec second membre

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

valant  $y_0$  en  $t_0$  la *méthode dite de variation des constantes* en cherchant la fonction  $y$  sous la forme  $y(t) = C(t)R(t, t_0)$ . La solution du problème

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \quad ; \quad y(t_0) = y_0$$

est alors donnée (après une seconde quadrature) par la *formule de Lagrange* :

$$(2.22) \quad \forall t \in I, \quad y(t) = R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s) \, ds.$$

**2.4.2. Le cas  $p \geq 2$ .** Soit une EDO de la forme :

$$Y' = A(t)Y + B(t),$$

où  $A \in C^0(I, \mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R}))$  et  $B \in C^0(I, \mathbb{R}^p)$ ,  $I$  étant un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Cette fois encore, il est judicieux d'étudier dans un premier temps l'EDO homogène :

$$(2.23) \quad Y'(t) = A(t)Y(t).$$

Soit  $t_0 \in I$ . Pour chaque vecteur  $u \in \mathbb{R}^p$ , il existe une unique solution de l'équation homogène (2.23) valant  $u$  en  $t_0$ . On convient de noter cette solution :

$$t \in I \mapsto R(t, t_0)u.$$

On constate que l'application

$$u \in \mathbb{R}^p \mapsto R(t, t_0)u$$

est linéaire (du fait que l'EDO (2.23) est homogène), ce qui permet de définir une application

$$(t, s) \in I \times I \mapsto R(t, s) \in \mathcal{M}^{p,p}(\mathbb{R}).$$

Cette application est très difficilement calculable, sauf si  $A(t) = A$  est une matrice constante, auquel cas

$$R(t, s) = \exp[(t-s)A] = \sum_{k=0}^{\infty} (t-s)^k \frac{A^k}{k!}$$

On l'appelle la *résolvante* de l'EDO homogène (2.23).

Une fois cette résolvante connue (ce qui est dans le cas général irréaliste), alors la solution du problème :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t) \quad ; \quad Y(t_0) = Y_0$$

est donnée encore par la *formule de Lagrange* :

$$(2.24) \quad \forall t \in I, \quad Y(t) = R(t, t_0)Y_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)B(s) \, ds.$$

Le point est que cette belle formule est difficilement exploitable si la résolvante si la résolvante n'est pas connue.

REMARQUE 2.3 (le cas où  $A(t) = A$ ). Dans le cas où  $A(t) = A$  est une matrice constante, il est plus judicieux de trigonaliser<sup>3</sup>  $A$  (dans  $\mathbb{C}^p$ ) en  $A = PTP^{-1}$ ,  $T$  étant triangulaire inférieure, puis de remarquer ensuite que si l'on pose  $Z = P^{-1}Y$ , résoudre le problème

$$Y'(t) = AY(t) + B(t) \quad ; \quad Y(t_0) = Y_0$$

revient à résoudre

$$Z'(t) = TZ(t) + P^{-1}Z(t) \quad ; \quad Z(t_0) = P^{-1}Y_0.$$

La résolution de ce nouveau problème se fait par quadrature de proche en proche (à partir de la dernière ligne du système, puis en remontant) puisque la matrice  $T$  est devenue maintenant triangulaire inférieure. C'est bien plus simple ! Il reste au final à poser  $Y(t) = PZ(t)$  pour trouver la solution cherchée. Ceci est en général plus efficace que de calculer la résolvante de l'EDO homogène  $Y' = AY$  qui, dans ce cas, vaut  $R(t, s) = \exp[(t - s)A]$ .

**2.4.3. Les équations de Bernoulli.** Il s'agit (dans le contexte d'EDO avec  $p = 1$ ) d'équations du type

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y^\alpha(t)$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0, 1$ , sous la condition initiale

$$y(t_0) = y_0 > 0.$$

Comme  $\alpha \neq 0, 1$ , ces équations ne sont pas linéaires. L'ensemble  $U$  sur lequel on pose le problème est soit  $U = I \times \mathbb{R}$ , soit  $U = I \times \mathbb{R}^*$ , soit  $U = I \times ]0, +\infty[$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  sur lequel  $a$  et  $b$  (à valeurs réelles) sont continues ; l'exclusion ou non de 0 ou de  $]-\infty, 0]$  pour poser le problème dépend de la valeur de  $\alpha$  ( $t \mapsto t^{1/3}$  prend un sens si  $t \in \mathbb{R}^*$ , alors que  $t \mapsto \sqrt{t}$  nous oblige à nous limiter à  $I \times ]0, +\infty[$ ).

Ce modèle d'équation, classique en physique ou en mécanique, est dit *équation de Bernoulli*<sup>4</sup> ; cette équation (lorsque  $\alpha = n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ) apparaît par exemple dans la recherche des courbes de « descente en temps constant », c'est-à-dire des courbes dites « isochrones » (par exemple celles dites de Leibniz, le long desquelles un objet descendant sous les lois de la gravité descendra avec une composante de vitesse verticale constante, ou les courbes isochrones de Huygens) ; de telles courbes jouent par exemple un rôle important en horlogerie de précision (d'où l'influence de l'école suisse au travers de la dynastie des Bernoulli !).

Supposons  $y_0 > 0$ , et cherchons à calculer (au moins localement) la solution du problème de Cauchy (posé dans  $I \times ]0, +\infty[$ ). La solution maximale  $(J, y)$  (qui existe) est telle que  $y > 0$ , et l'on a, dans l'intervalle ouvert  $J$ ,

$$(2.25) \quad \frac{y'(t)}{(y(t))^\alpha} = a(t)(y(t))^{1-\alpha} + b(t), \quad \forall t \in J.$$

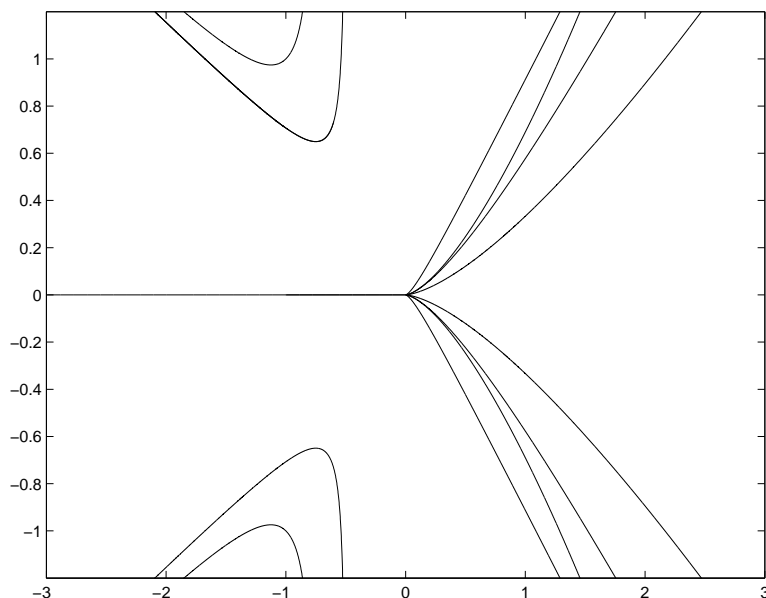
En posant, pour tout  $t \in J$ ,  $z(t) := (y(t))^{1-\alpha}$ , on voit que (2.25) équivaut à

$$z'(t) = (1 - \alpha)a(t)z(t) + (1 - \alpha)b(t),$$

3. Voir le cours d'Algèbre 3 (théorème de Cayley-Hamilton).

4. Ce, en relation avec les contributions du mathématicien et physicien suisse Jacob Bernoulli (1654-1705).



FIGURE 2.3. Courbes intégrales de  $t^4 y' = t^3 y + y^3$ 

avec condition initiale  $z(t_0) = y_0^{1-\alpha}$ . Mais il s'agit ici d'une équation linéaire que l'on sait donc résoudre. L'intervalle de vie  $J$  de la solution maximale  $(J, y)$  est le plus grand intervalle ouvert sur lequel la solution  $z(t)$  donnée par la formule de Lagrange (2.22),

$$z(t) = \left( z_0 + \int_{t_0}^t (1-\alpha)b(\tau) \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} (1-\alpha)a(v) dv\right) d\tau \right) \exp\left(\int_{t_0}^t (1-\alpha)a(\tau) d\tau\right),$$

reste strictement positive; on obtient  $y$  en posant, sur cet intervalle  $J$ ,  $y = z^{1-\alpha}$ .

EXEMPLE 2.4. L'équation différentielle  $t^4 y' = t^3 y + y^3$  sur  $] -\infty, 0[ \times \mathbb{R}$  ou  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  est une équation de Bernoulli avec  $\alpha = 3$ . L'équation linéaire correspondante (si l'on pose  $z = y^{-2}$  en ayant pris soin de supposer  $y_0 \neq 0$ ) est

$$z' = -\frac{2z}{t} - \frac{2}{t^4},$$

dont la solution générale est

$$z(t) = \frac{2 + ct}{t^3}.$$

Les courbes intégrales de l'équation de Bernoulli  $t^4 y' = t^3 y + y^3$  (c'est-à-dire les graphes des solutions maximales, représentées sur la figure 2.3) suivent le tracé de cubiques réelles planes : une *cubique* réelle plane est l'ensemble des zéros d'un polynôme en deux variables de degré total trois, tandis qu'une *conique* réelle plane est, quant à elle, définie dans  $\mathbb{R}^2$  comme l'ensemble des zéros d'un polynôme en deux variables de degré total deux, ce qui correspond aux sections planes d'un cône de révolution (ellipse, hyperbole, parabole). Ces cubiques constituent la famille (à un paramètre)  $\{\Gamma_c\}_c$ , où  $\Gamma_c : \{(2 + ct)y^2 - t^3 = 0\}$  dans le plan  $\mathbb{R}_{t,y}^2$ .

**2.4.4. Les équations de Riccati.** Introduites et étudiées par le mathématicien italien Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), ces équations (qui se ramènent aussi au cadre des équations linéaires, ce que réalisa Daniel Bernoulli en 1724) sont de la forme (on est toujours dans le cadre  $p = 1$ ) :

$$(2.26) \quad y' = c(t) + b(t)y + a(t)y^2$$

et le problème est posé dans  $I \times \mathbb{R}$ ,  $I$  désignant l'intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  sur lequel les trois fonctions  $a, b, c$  sont continues. Il n'existe pas de méthode de résolution par quadrature pour un problème de Cauchy relatif à cette équation non linéaire mais on sait en achever la résolution pourvu que l'on dispose d'une solution particulière  $(I, \varphi)$  (ne vérifiant pas *a priori* la condition initiale  $y(t_0) = y_0$  exigée). Le domaine  $U$  sur lequel nous posons alors le problème est

$$U := \{(t, y) \in I \times \mathbb{R}; y - \varphi(t) \neq 0\}.$$

Notons que, du fait du théorème de Cauchy-Lipschitz, aucune autre courbe intégrale de l'EDO (2.26) ne peut rencontrer le graphe qui a été exclu de  $I \times \mathbb{R}$  pour produire le nouvel espace des états  $U$ . Si  $(t_0, y_0) \in U$ , on cherche la solution maximale  $(J, y)$  du problème de Cauchy pour l'équation (2.26) avec donnée initiale  $y(t_0) = y_0$  en prenant la fonction

$$z : t \in J \mapsto \frac{1}{y(t) - \varphi(t)},$$

soit  $y = 1/z + \varphi(t)$ . Ce changement de fonction nous ramène à la relation

$$\begin{aligned} y' = \frac{-z'}{z^2} + \varphi'(t) &= c(t) + b(t)\left(\frac{1}{z} + \varphi(t)\right) + a(t)\left(\frac{1}{z^2} + \frac{2\varphi(t)}{z} + \varphi^2(t)\right) \\ &= \frac{b(t) + 2a(t)\varphi(t)}{z} + \frac{a(t)}{z^2} + (c(t) + b(t)\varphi(t) + a(t)\varphi^2(t)). \end{aligned}$$

Comme  $(I, \varphi)$  est solution de (2.26),  $(J, z)$  est solution de

$$z' = -a(t) - (b(t) + 2a(t)\varphi(t))z$$

dans  $J$ . On est ramené à la résolution d'une équation linéaire d'ordre un, que l'on résout (grâce à la formule de Lagrange (2.22)), en  $z = (h(t) + c) \exp(-g(t))$  où  $g$  est une primitive sur  $J$  de  $b + 2a\varphi$  et  $h$  une primitive de  $-a \exp(g)$ ; la constante  $c$  est ajustée à la condition initiale  $z(t_0) = (y_0 - \varphi(t_0))^{-1}$ . On a finalement

$$y(t) = \frac{\exp(g(t))}{h(t) + c} + \varphi(t).$$

On rencontre l'équation de Riccati en physique quantique, en relation avec l'équation de Schrödinger, dans les équations des ondes ou de la chaleur, en commande optimale et même en mathématiques financières à propos de modélisation des taux d'intérêt (*cf.* le célèbre *modèle de Black-Sholes*). De nombreux problèmes de géométrie différentielle font surgir des équations du type Riccati.

**EXEMPLE 2.5.** L'équation  $(1 - t^3)y' = 1 + t^2y - 2ty^2$ , posée dans  $] - \infty, 1[ \times \mathbb{R}$  ou  $]1, +\infty[ \times \mathbb{R}$  est bien de Riccati, et l'on constate que  $\varphi(t) = t$  est une solution particulière. En posant le problème dans

$$U = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2; t \neq 1, t - y \neq 0\}$$

on voit que  $z = 1/y - t$  est solution de

$$z' = \frac{2t}{1 - t^3} + \frac{3t^2}{1 - t^3}z,$$

qui s'intègre en  $z = \frac{t^2+c}{1-t^3}$  où  $c$  est ajustée à la condition initiale  $z(t_0) = (y_0 - t_0)^{-1}$ . On trouve

$$y = t + \frac{1-t^3}{t^2+c} = \frac{1+ct}{t^2+c},$$

la solution vivant tant que  $1+ct \neq 0$ . Les courbes intégrales suivent encore le tracé de cubiques, prises cette fois dans la famille (toujours à un paramètre) des cubiques réelles planes du type  $\tilde{\Gamma}_c := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 ; (t^2+c)y = 1+ct\}$ . On vérifie cette fois que chacune de ces courbes (si  $c \neq -1$ ) est une cubique régulière du plan, car les deux dérivées partielles (par rapport à  $t$  et  $y$ ) de  $(t, y) \mapsto (t^2+c)y - 1 - ct$  ne peuvent s'annuler simultanément en un point de la courbe  $\tilde{\Gamma}_c$ ; dans le cas  $c = -1$ , la courbe est union de la droite  $x = 1$  et de l'hyperbole  $y(x+1) = -1$ , mais seule l'hyperbole est à prendre en compte comme courbe intégrale.

### 2.5. Résolubilité d'une EDO par recherche d'une intégrale première

Supposons toujours que l'on soit dans le cadre  $p = 1$ . Transformer l'EDO

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y)$$

en la relation (formelle)  $dy - F(t, y)dt$  n'a rien d'anodin, et l'on y voit surgir la notion de 1-forme différentielle entrevue lorsque nous avons introduit le concept de circulation d'un champ de vecteur (cf. la Définition 1.8), envisagé comme le calcul de l'intégrale (dite *curviligne*)

$$\int_{\gamma} (P(t, y)dt + Q(t, y)dy)$$

lorsque  $\gamma$  est un chemin paramétré du plan. Résolution des équations différentielles et étude des 1-formes différentielles sont, depuis le développement du calcul des variations (et de l'analyse complexe) au XVIII<sup>e</sup> siècle, étroitement imbriquées. C'est par le biais des formes différentielles que les équations différentielles quittent le territoire de l'analyse pour pénétrer dans celui de la géométrie : *feuilletages, tissus, etc.*, sont autant de notions régies par une (ou plusieurs) équations différentielles sous jacentes. Les noms de Nils Henryk Abel, Henri Poincaré, Gaston Darboux, Sophus Lie, Paul Painlevé *etc.* sont profondément liés à cette relation intime entre équations différentielles et formes différentielles. Nous nous contenterons ici d'effleurer ce point, car nous passons sous silence l'introduction à la notion de forme différentielle.

**2.5.1. Différentielles « totales ».** Voici un résultat utile pour résoudre certaines EDO du type

$$y' = \frac{P(t, y)}{Q(t, y)},$$

une fois qu'on les a interprété formellement sous la forme :

$$P(t, y) dt - Q(t, y) dy = 0.$$

PROPOSITION 2.3. Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$(t, y) \longrightarrow P(t, y), \quad (t, y) \longrightarrow Q(t, y)$$

deux fonctions continues de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  telles qu'il existe une fonction  $V$  de classe  $C^1$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, y) = P(t, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -Q(t, y) \quad \forall (t, y) \in U.$$

Soit  $(t_0, y_0)$  un point de  $U$  tel que  $Q(t_0, y_0) \neq 0$ . Le graphe

$$\Gamma := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2; t \in I, y = y(t)\}$$

de la solution maximale  $(I, y)$  du problème de Cauchy

$$(2.27) \quad y'(t) = \frac{P(t, y(t))}{Q(t, y(t))} \quad ; \quad y(x_0) = y_0$$

(posé dans l'ouvert  $U \setminus \{Q = 0\}$ ) est inclus dans la courbe définie par l'équation cartésienne :

$$\{(t, y) \in U \setminus \{Q = 0\}; V(t, y) = V(t_0, y_0)\}.$$

Plus précisément, ce graphe est exactement toute la composante connexe contenant  $(t_0, y_0)$  de cette courbe.

DÉMONSTRATION. Soit  $t \mapsto y(t)$  cette solution maximale. On a

$$\forall t \in I, \quad y'(t) \frac{\partial V}{\partial y}(t, y(t)) + \frac{\partial V}{\partial t}(t, y(t)) = \frac{d}{dt}[V(t, y(t))] = 0,$$

ce qui implique (de par le Théorème fondamental de l'analyse, à savoir le Théorème 1.6)

$$\forall x \in I, \quad V(x, y(x)) = V(x_0, y_0).$$

Le graphe  $\Gamma$  de  $y$  est donc bien inclus dans l'ensemble

$$\{(t, y) \in U; V(t, y) = V(t_0, y_0)\}.$$

□

**2.5.2. Le cas particulier des EDO à variables séparées.** Le cas des équations différentielles dites à *variables séparées* est un cas important illustrant la Proposition 2.3. Il correspond à la situation particulière suivante.

PROPOSITION 2.4. Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $w : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement lipschizienne (donc continue). Soit  $(t_0, y_0)$  un point de  $I \times J$ . Si  $w(y_0) = 0$ , la solution maximale  $(I, y)$  du problème de Cauchy

$$(2.28) \quad y'(t) = v(t)w(y) \quad ; \quad y(x_0) = y_0$$

est la fonction constante  $x \in I \rightarrow y_0$ . Si  $w(y_0) \neq 0$  et si  $J_{y_0}$  désigne le plus grand intervalle ouvert contenant  $y_0$  sur lequel  $w$  ne s'annule pas, le graphe de la solution maximale  $(] \alpha, \beta[, y)$  du problème de Cauchy (2.28) est la composante connexe contenant  $(x_0, y_0)$  de la courbe

$$\left\{ (t, y) \in I \times J_{y_0}; \int_{t_0}^y \frac{du}{w(u)} = \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right\}.$$

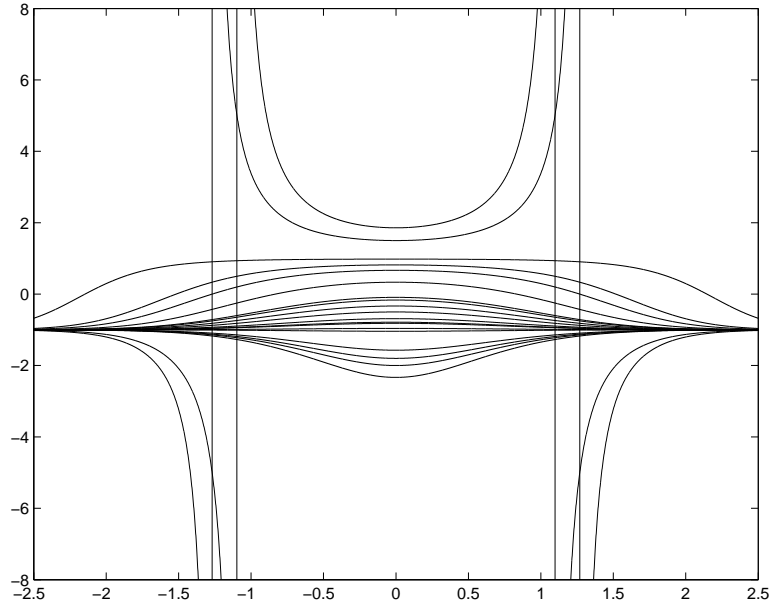


FIGURE 2.4. Graphes des solutions maximales de l'équation  $y'(t) = t(y^2(t) - 1)$

DÉMONSTRATION. En ce qui concerne le premier cas ( $w(y_0) = 0$ ), on constate que  $t \in I \rightarrow y_0$  est solution du problème de Cauchy (2.28); c'est donc la solution maximale de ce problème. Concernant le second cas, on constate que le graphe de la solution maximale  $(] \alpha, \beta[, y)$  se doit de rester « piégé » dans la bande horizontale  $I \times J_{y_0}$ , toujours à cause de la clause d'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet, si un tel graphe tentait en un point  $(t_1, u)$  de s'échapper de cette bande, on aurait  $w(u) = 0$  et, par conséquent, se présenteraient au point  $(t_1, u)$  deux graphes de solutions maximales (celui de la fonction  $t \in I \rightarrow u$  et celui de notre solution), ce qui contredirait la clause d'unicité. Dans  $I \times J_{y_0}$ , on observe que

$$\frac{dy}{w(y)} - v(t) dt = d_{t,y} \left[ \int_{y_0}^y \frac{du}{w(u)} - \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right].$$

L'assertion de la proposition résulte d'une simple application de la Proposition 2.3.  $\square$

EXEMPLE 2.6. Considérons l'équation différentielle  $y' = t(y^2 - 1)$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Si  $y_0 \neq \pm 1$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ , la solution maximale  $(] \alpha, \beta[, y)$  est la composante connexe (contenant  $(t_0, y_0)$ ) de la courbe d'équation

$$(y - 1)(y_0 + 1) = (y + 1)(y_0 - 1) \exp(t^2 - t_0^2),$$

car la forme à variables séparées que fait apparaître cette équation est

$$\frac{dy}{y^2 - 1} - t dt = \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{y - 1} - \frac{dy}{y + 1} \right) - t dt.$$

Si  $c = \frac{y_0-1}{y_0+1}e^{-x_0^2}$ , cette courbe est le graphe de la fonction

$$f_c : t \mapsto \frac{1 + ce^{t^2}}{1 - ce^{t^2}},$$

au-dessus du plus grand intervalle  $]\alpha, \beta[$  contenant  $t_0$  sur lequel cette fonction  $f_c$  est définie. Si  $c \notin ]0, 1[$ , on a  $]\alpha, \beta[ = \mathbb{R}$ ; si  $c \in ]0, 1[$ , c'est-à-dire

$$0 < \frac{y_0 - 1}{y_0 + 1} < e^{t_0^2},$$

$]\alpha, \beta[$  est celui des trois intervalles

$$\left] -\infty, -\sqrt{-\log c} \right[, \left] -\sqrt{-\log c}, \sqrt{-\log c} \right[, \left] \sqrt{-\log c}, +\infty \right[$$

qui contient  $t_0$ . Les divers graphes de solutions maximales possibles sont représentés sur la figure 2.4.

## 2.6. Systèmes autonomes ; le concept d'équilibre stable ou instable

Une EDO  $Y' = F(t, Y)$  (avec  $F : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  localement lipschitzienne par rapport à  $Y$ ) est qualifiée d'*autonome* lorsque  $U$  est de la forme  $\mathbb{R} \times V$ , où  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ , et  $F : \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R}^p$  est une fonction ne dépendant que de  $V$ , i.e. de la forme  $(t, Y) \in \mathbb{R} \times V \rightarrow F(Y)$ . Un tel système se présente alors sous la forme  $Y' = F(Y)$ .

EXEMPLE 2.7 (les modèles « proie-prédateur »). Un modèle classique de système autonome (dit de Lotka-Volterra<sup>5</sup>) est le modèle de système d'évolution suivant :  $a, b, c, d$  désignant 4 paramètres réels strictement positifs, on considère le système différentiel

$$(2.29) \quad \begin{aligned} x'(t) &= x(t)(a - by(t)) \\ y'(t) &= y(t)(-c + dx(t)). \end{aligned}$$

L'interprétation correspondant à ce modèle est la suivante : deux types de population cohabitent. La première (dont l'évolution est matérialisée en termes de proportion par  $x$  est l'effectif des *proies*) se développe exponentiellement en  $\exp(at)$ ; la seconde (effectif des *prédateurs*, matérialisée en termes de proportion par  $y$ ) s'éteint exponentiellement en  $\exp(-ct)$ ; le facteur  $b$  s'interprète comme la *pression de prédation*, le facteur  $d$  comme l'*accessibilité des proies*.

Les modèles plus réalistes sont les modèles perturbés<sup>6</sup>, où l'on suppose que le taux de croissance  $x$  des proies diminue lorsque la population augmente (du fait de contraintes environnementales ou de subsistance par exemple). Le modèle du système d'évolution est alors

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)(a - \epsilon x(t) - by(t)) \\ y'(t) &= y(t)(-c + dx(t)), \end{aligned}$$

où  $\epsilon$  est un cinquième paramètre (voir [Vial] pour plus de détails).

5. Le mathématicien et statisticien autrichien Alfred James Lotka (1880-1949) et le mathématicien et physicien italien Vito Volterra (1860-1940) l'introduisirent vers 1925, ouvrant la voie à la dynamique des populations.

6. Ce sont les modèles auxquels renvoient le plus fréquemment les mathématiciens du vivant.

Lorsque l'on a affaire à un système autonome  $Y' = F(t, Y)$  avec comme espace des états  $\mathbb{R} \times V$ ,  $V \subset \mathbb{R}^p$ ,  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ , l'étude et le tracé des trajectoires (qui se fait plutôt cette fois dans l'espace des  $\mathbb{R}_Y^p$  plutôt que dans l'espace  $\mathbb{R}_{t,Y}^{p+1}$ ) se trouve éclairé par l'étude préliminaire des trajectoires dites *stationnaires*, à savoir la recherche des points  $Y_0$  de  $V$  tels que  $F(Y_0) = 0$ . La solution  $t \mapsto Y(t)$  de l'EDO  $Y' = F(t, Y)$  assujettie à la condition initiale  $Y(t_0) = Y_0$  reste alors « stationner » sur le point  $Y_0$ .

EXEMPLE 2.8 (l'exemple proie-prédateur). Pour le système autonome (2.30), il est aisé de trouver les trajectoires stationnaires. Ce sont les points  $(0, 0)$  et  $(c/d, a/b)$ . Ces deux points (dits aussi d'équilibre) sont de nature différente :

- si l'on perturbe l'origine en initiant la trajectoire en un point voisin  $(x_0, y_0)$ , on constate que la nouvelle trajectoire initiée en  $(x_0, y_0)$  s'éloigne de l'origine (on dit que l'origine est un point d'équilibre *instable*); cela tient au fait que le système dit linéarisé (on laisse tomber les termes du second ordre), qui est dans le cas

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax(t) \\y'(t) &= -cy(t)\end{aligned}$$

présente deux valeurs propres de signe opposé.

- par contre, au voisinage de l'autre point stationnaire, le système linéarisé se présente sous la forme

$$\begin{aligned}\tilde{x}'(t) &= -\frac{bc}{d}\tilde{y}(t) \\ \tilde{y}'(t) &= \frac{ad}{b}\tilde{x}(t),\end{aligned}$$

où  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y) - (c/d, a/b)$ ; si l'on perturbe le point  $(c/d, a/b)$  en initiant la trajectoire en un point voisin, la nouvelle trajectoire reste une orbite autour du point  $(c/d, a/b)$ ; on dit que  $(c/d, a/b)$  est un point d'équilibre *stable*.

Les notions d'*instabilité* et de *stabilité* pour les équilibres (que nous effleurons à l'occasion de cet exemple) sont fondamentales dans les questions relevant de l'analyse qualitative des systèmes différentiels autonomes (plus généralement des équations différentielles  $Y'(t) = F(t, Y(t))$ , autonomes ou non). Au voisinage d'un point d'équilibre stable, l'étude d'un système autonome de type (2.29) peut être approchée par celle du système linéaire autonome obtenu en remplaçant  $F$  par son polynôme de Taylor à l'ordre 1 en  $Y$  au point d'équilibre  $(\alpha, \beta)$ . Ceci résulte d'un théorème majeur dans l'étude des systèmes dynamiques, le théorème de Lyapunov. C'est aussi par ce biais que l'on peut constater qu'un point d'équilibre (tel  $(0, 0)$  pour le système (2.29)) est instable : les valeurs propres de la matrice (2, 2) du système linéarisé sont ici deux nombres réels non nuls de signe opposés, ce qui correspond à une configuration de *point-selle* et donc à une situation d'équilibre instable (certaines trajectoires sont attirées, d'autres sont repoussées). Sur la figure 2.5, on a illustré ces diverses remarques avec le tracé de quelques trajectoires.

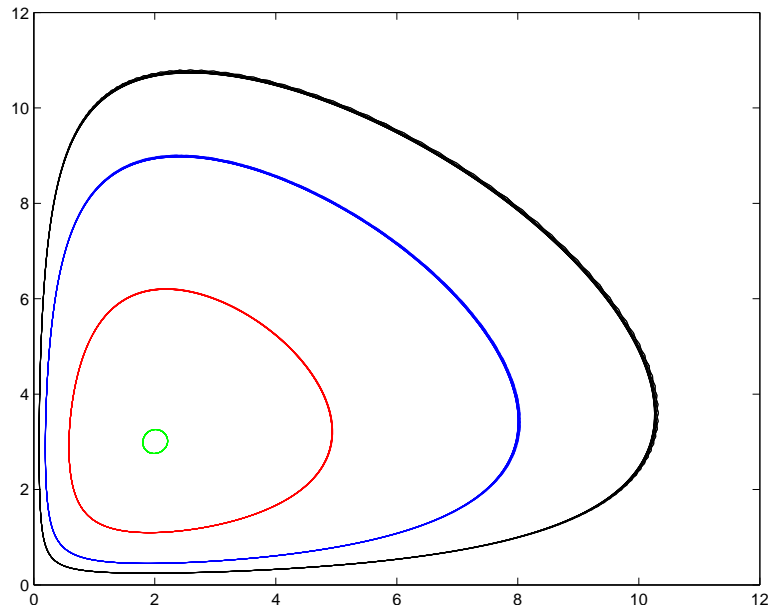


FIGURE 2.5. Trajectoires pour l'équation proie-prédateur



## Bibliographie

- [anal1] A. Yger, polycopié du cours d'Analyse 1, 2012-2013  
<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/analyse1.pdf>
- [L3An] J.P. Marco (ed.) *Mathématiques L3*, Analyse, Pearson Education, Paris, 2009.
- [MathL2] J.P. Marco, P. Thieullen & J.A. Weil (ed.), *Mathématiques L2*, Pearson Education, Paris, 2007.
- [Mismi] A. Yger, Mathématiques de base, Cours de MISMI, 2007-2008,  
<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursmismi.pdf>
- [Vial] G. Vial, Le système proie-prédateur de Volterra-Lotka, Mars 2011, disponible en ligne sur :  
[http://lama.univ-savoie.fr/~labart/generated/fichiers/MATH705/gvial\\_volterra.pdf](http://lama.univ-savoie.fr/~labart/generated/fichiers/MATH705/gvial_volterra.pdf)
- [Ycalc] A. Yger, Calcul Scientifique et Symbolique, polycopié de l'UE N1MA3003, 2011-2012,  
<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/CSSL.pdf>
- [Yint] A. Yger, Théorie de l'intégration, polycopié de l'UE MHT512, 2010-2011,  
<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht512.pdf>



# Index

- Ascoli-Peano
  - théorème de, 62
- autonome
  - système, 73
- boule unité de  $\mathbb{R}^n$ 
  - volume de la, 36
- bout (de solution maximale), 65
- bouts
  - de solution maximale d'une EDO avec solution initiale, 65
  - lemme des, 65
- Cauchy
  - problème de, pour une EDO, avec condition initiale, 60
- Cauchy-Lipschitz, version globale, 64
- champ
  - de forces, 42
  - de vecteurs, 42
- changement de variables
  - dans les intégrales, 31
  - dans les primitives, 31
- circulation
  - d'un champ de vecteurs le long d'un chemin, 51
- compact
  - de  $\mathbb{R}^n$ , 1
- continuité
  - des intégrales fonction de paramètres réels ou complexes, 22
- convergence dominée, théorème de, 18
- convergence monotone, théorème de, 13
- cylindriques
  - intégration dans l'espace en coordonnées, 34
- différentiabilité
  - des intégrales fonction d'un paramètre complexe, 28
  - des intégrales fonction de paramètres réels, 23
- différentielle ordinaire
  - équation, résoluble en  $Y'$ , 59
- dipôle, 40
- Dirichlet
  - formule de, 26
  - problème de, 28
- divergence
  - d'un champ, 42
- EDO
  - d'ordre supérieur, résoluble en  $Y^{(k)}$ , 58, 60
  - résoluble en  $Y'$ , 59
- EDO résoluble en  $Y'$ 
  - solution d'une, 59
  - solution maximale d'une, 59
- états
  - espace des, 57
- Euler
  - angles d', 33
  - formule d', 15
- flux sortant
  - au travers du bord d'un domaine, 43
- fonction indicatrice, 9
- forces
  - champ de, 42
- Fourier
  - transformation de, 20, 26
- Fubini
  - théorème de, 38
- Fubini-Tonelli
  - théorème de, 36
- Gamma, fonction, 15
- Gauß
  - formule de, 33
- gaussienne, 33
- Grönwall
  - critère d'existence de, 65
  - Thomas, 65
- Green
  - formule de, dans l'espace, 51
- Green-Ostrogradski
  - formule de, en dimension 2, 45
  - formule de, en dimension 3, 50

- Green-Riemann
  - formule de, 52
- initiales, conditions
  - dans un problème de Cauchy pour une EDO, 60
- instabilité
  - d'un point d'équilibre, 75
- intégrable
  - fonction positive, 10
  - sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , 6
- intégrale
  - d'une fonction positive sur  $\mathbb{R}^n$ , 10
  - d'une fonction positive sur un ensemble mesurable, 10
- intégration
  - sur un arc de courbe, relativement à la mesure de longueur, 44
  - sur un morceau de surface, relativement à la mesure de surface, 47
- Lagrange
  - formule de, 66, 67
- Laplace
  - transformation de, 21, 30
- laplacien, 51
- Lebesgue
  - mesure de, 8
  - théorème de, 18
  - tribu de, 8
- linéaire
  - EDO, 64, 66
- lipschitzienne
  - localement, par rapport à  $Y$ , fonction, 64
- longueur
  - mesure de, sur un arc de courbe paramétré de  $\mathbb{R}^n$ , 43
- Lotka
  - Alfred James, 74
- Lotka-Volterra
  - modèle de, 74
- Lyapunov
  - théorème de, 75
- maillage
  - d'un domaine plan, 41
  - d'un domaine volumique de  $\mathbb{R}^3$ , 50
  - d'un segment de  $\mathbb{R}$ , 39
- maximale
  - solution d'une EDO, 59
- Mellin
  - transformation de, 21, 30
- mesurable
  - sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , 6
- moindre action, principe de, 28
- Monte-Carlo, méthode de, 7
- négligeable
  - sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , 6
- normale, loi reduite centrée, 33
- orientation
  - respect de l', dans le plan, 40
- ouvert
  - de  $\mathbb{R}^n$ , 1
- phases
  - espace des, 57
- point fixe
  - théorème du, en dimension finie, 61
- polaires
  - intégration dans le plan en coordonnées, 32
- problème de Cauchy avec condition initiale
  - solution d'un, 60
  - solution maximale d'un, 61
- produit extérieur
  - de deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , 4
- produit mixte
  - de trois vecteurs de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , 5
- résoluble en  $Y'$ 
  - équation différentielle, 57
- Riemann
  - critère de, 13
  - méthode de, 11
- sphériques
  - intégration dans l'espace en coordonnées, 33
- stabilité
  - d'un point d'équilibre, 75
- stationnaire
  - trajectoire, pour un système autonome, 74
- Stokes
  - formule de, dans le plan, 52
  - formule de, sur un graphe dans l'espace, 53
- surface
  - mesure de, sur un morceau de nappe paramétrée de  $\mathbb{R}^3$ , 47
- tesselisation
  - d'un domaine volumique de  $\mathbb{R}^3$ , 50
- théorème fondamental
  - en dimension 1, 40
  - en dimension 2, 44
  - en dimension 3, 48
  - pour le simplexe  $\Delta_2$  du plan, 41
  - pour le simplexe  $\Delta_3$  de l'espace, 47
- travail
  - d'un champ de vecteurs le long d'un chemin, 51
- triangulation
  - d'un domaine plan, 41
- tribu, 8
- valeurs singulières

- décomposition en, 6
- variables
  - changement de, dans les intégrales, 31
- variables séparées, équation à, 72
- variation des constantes
  - méthode de, 66
- vie
  - intervalle de, d'une solution d'EDO, 59
- Volterra
  - Vito, 74
- volume 1-dimensionnel
  - sur un arc de courbe paramétré de  $\mathbb{R}^n$ , 43
- volume 2-dimensionnel
  - sur un morceau de nappe paramétrée de  $\mathbb{R}^3$ , 47
- volume  $n$ -dimensionnel
  - d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , 2
  - d'un pavé ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , 2