Complément au cours M1 "Analyse Fonctionnelle".

1) Le théorème spectral pour un opérateur compact auto-adjoint dans un espace d'Hilbert (sur $\mathbb{C}$).

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On définit son adjoint (noté A^*) comme

$$(Ax, y) = (x, A^* y), \quad \forall x, y \in H.$$

On dit que A est auto-adjoint, si $A = A^*$.

Nous avons les propriétés suivantes:

- $\lambda \in \sigma_p(A) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

En effet, on a $Ax = \lambda x$ ($x \in H$ - le vecteur propre correspondant, $x \neq 0$) et

$$\lambda (x,x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x,x).$$

$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

- Soient $x, y \in H$ des vecteurs propres correspondants à deux valeurs propres différentes, $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$. Alors $x \perp y$ (c.à.d, $(x,y) = 0$).

On a:

$$\lambda (x,y) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) \underset{\mu \in \mathbb{R}}{=} \mu (x,y)$$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu)(x,y) = 0 \underset{\lambda \neq \mu}{\Rightarrow} (x,y) = 0.$$

<u>Terminologie</u>: $x \perp y$ se lit comme "x est orthogonal à y".

Nous passons aux propriétés des opérateurs compacts.

<u>0)</u> Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors A est compact <u>ssi</u>

$$\forall (x^n) \subset H : x^n \xrightarrow[\text{faiblement}]{} x \implies Ax^n \xrightarrow[\text{fortement (en norme)}]{} Ax.$$

(sans démonstration)

<u>1)</u> Soit $x^n \xrightarrow[\text{faib.}]{} x$. Alors, pour $A \in K(H)$:

$$Q(x^n) = (Ax^n, x^n) \longrightarrow Q(x) = (Ax, x).$$

<u>Démo</u> Nous avons

$$|(Ax^n, x^n) - (Ax, x)| \leq |(Ax^n, x^n) - (Ax, x^n)| +$$

$$+ |(Ax, x^n) - (Ax, x)| \leq \underbrace{\|Ax^n - Ax\|}_{\downarrow\, 0 \text{ (par 0))}} \cdot \underbrace{\|x^n\|}_{\leq M} +$$

(car $x^n \xrightarrow[\text{faib}]{} x \implies$ $\implies$ bornée).

$$+ \|x\| \cdot \underbrace{\|Ax^n - Ax\|}_{\downarrow 0} \longrightarrow 0.$$

Nous avons utilisé aussi l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in H$. ∎

<u>2)</u> Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, $A = A^*$ et $|Q(x)| = |(Ax, x)|$ atteint son max. sur $\overline{B}(0,1)$ sur le vecteur $x^0 \in \overline{B}(0,1)$.

Alors $(x^0, y) = 0 \implies (Ax^0, y) = (x^0, Ay) = 0$.

<u>Démo</u> Il est clair que $\|x^0\| = 1$ (sinon on pose $x^{01} = \dfrac{x^0}{\|x^0\|}$, et on a $|(Ax^{01}, x^{01})| > |(Ax^0, x^0)|$, $x^{01} \in \overline{B}(0,1)$, contradiction). Supposons que $(Ax^0, y) \neq 0$.

Soit $x = \dfrac{x^0 + ay}{\sqrt{1 + |a|^2 \|y\|^2}}$, $a \in \mathbb{C}$; $y \in H$. Il est clair que $\|x\| = 1$.

On a

$$Q(x) = \frac{1}{1+|a|^2\|y\|^2}\left(Q(x^0) + 2\operatorname{Re}\bar{a}(Ax^0,y) + |a|^2 Q(y)\right) \geq$$

$$\geq Q(x^0) + 2\bar{a}(Ax^0,y) + O(|a|^2) \geq$$

$$\uparrow$$

$\frac{1}{1+|a|^2\|y\|^2} \geq 1 - |a|^2\|y\|^2$ (car $\frac{1}{1+x} \geq 1-x$); choisissons, de plus, a t.q. $\bar{a}(Ax^0,y) > 0$. En prenant $|a|$ suffisamment petit, on peut faire en sorte que

$$|O(|a|^2)| \leq \bar{a}(Ax^0,y).$$

Alors

$$\geq Q(x^0) + \underbrace{\bar{a}(Ax^0,y)}_{>0} > Q(x^0), \quad \text{contradiction.}$$

$\blacksquare$

<u>Corollaire:</u> x^0 satisfaisant les hypothèses du 2), est un vecteur propre de A: en effet,

$$\forall y \in H: \quad (x^0,y) = 0 \implies (Ax^0,y) = 0$$

Cela veut dire que $y \in L^{\perp}_{x^0} = \{y \in H : (x^0,y) = 0\}$ et $Ax^0 \in (L^{\perp}_{x^0})^{\perp} = \operatorname{lin}\{x^0\} \implies Ax^0 = \lambda x^0$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$ quelconque.

<u>Théorème (d'Hilbert-Schmidt)</u> Soit $A \in K(H)$ et $A = A^*$. Alors, il existe un système $(\varphi^n) \subset H$ - orthonormé (fini ou infini) où (φ^n) sont des vecteurs propres de A. Notons par (λ_n) les valeurs propres correspondantes. On a:

$$\forall x \in H: \quad x = \sum_n c_n \varphi^n + \xi, \quad \xi \in \operatorname{Ker} A = \{\xi : A\xi = 0\}$$

et

$$Ax = \sum_n c_n \lambda_n \varphi^n.$$

La suite (λ_n) est finie ou bien $\boxed{\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0}$

Démonstration:

On construit (φ^n) par récurrence en sorte que les valeurs propres (les v.p.) correspondantes satisfassent : $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq \ldots$

Construisons $\varphi^1 \in H$: considérons $|Q(x)| = |(Ax, x)|$;
$\sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)| =: S$ est atteint car $A \in K(H)$ pour $z \in \overline{B}(0,1)$.
(montrez-le !)

Il est claire que $\|z\| = 1$ (sinon procédez comme dans pt. 2) et posez $z' = \frac{z}{\|z\|}$, etc.). Soit $\varphi^1 := z$

Par le Corollaire, p. 3, $A\varphi^1 = \lambda_1 \varphi^1$ (c.à.d, φ^1 est un vecteur propre) et

$$|\lambda_1| = \frac{|(A\varphi^1, \varphi^1)|}{(\varphi^1, \varphi^1)} = |(A\varphi^1, \varphi^1)| = S.$$
(ou $|(Ax, x)|$)

Pour construire φ^2; considérons A sur $M_1^\perp = H \ominus \mathrm{lin}\{\varphi^1\}$ et répétons le procédé.

Par récurrence: supposons que $(\varphi^k)_{k=1,\ldots n}$ sont construits et ce sont des vecteurs propres correspondant à $(\lambda_k)_{k=1,\ldots n}$. Comme pour φ^2, définissons

$$M_n^\perp = H \ominus \mathrm{lin}(\varphi^k)_{k=1,\ldots n}.$$

Comme $A(\mathrm{lin}(\varphi^k)_{k=1,\ldots n}) \subset \mathrm{lin}(\varphi^k)_{k=1,\ldots n}$, on a $A(M_n^\perp) \subset M_n^\perp$ et nous pouvons refaire le même raisonnement pour $A|_{M_n^\perp}$ (ou bien $|(Ax, x)|$, $x \in \overline{B}(0,1) \cap M_n^\perp$) pour obtenir φ^{n+1}, λ_{n+1}, etc.

Deux cas sont possibles:

1°) $\exists n_0 : \forall y \in M^+_{n_0}$ on a $(Ay, y) = 0$.

Alors, à l'aide de 2), $\forall y \in M^+_{n_0}$, $Q(y) = (Ay, y)$ atteint son max sur $y \Rightarrow y$ est un vecteur propre, $Ay = \lambda y$ et $\underbrace{(Ay, y)}_{=0} = \lambda (y, y) \Rightarrow \lambda = 0$.

Donc $\forall y \in M^+_{n_0} : Ay = 0$ et $M^+_{n_0} \subset \operatorname{Ker} A$ (= le sous-espace propre correspondant à $\lambda = 0$).

Ce cas correspond à $\{\lambda_n : \lambda_n \neq 0\}$ est fini.

2°) $\exists (\varphi^n)$ - une suite infinie correspondante à (λ_n) différents. __Alors__: on a $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$.

Pour le montrer, on peut utiliser le résultat général pour les espaces de Banach qui dit que pour $A \in K(X)$: $\#\{\lambda \in \sigma_p(A) : |\lambda| \geq \delta\} < \infty$ (pour $\delta > 0$). Sinon on a: (φ^n) est un système orthonormé, donc $\varphi^n \xrightarrow[\text{faib.}]{} 0 \Rightarrow A\varphi^n = \lambda^n \varphi^n \xrightarrow[\text{fort.}]{} 0$

$\Rightarrow |\lambda_n| = \|A\varphi^n\| \to 0$.

Soit $M^+ = H \ominus \operatorname{lin}\{\varphi^n\} = \bigcap\limits_n M^+_n \neq \{0\}$.

Si $z \in M^+$, $z \neq 0$ on a $|(Az, z)| \leq |\lambda_n| \, \|z\|^2$ $(\forall n)$.

$\Rightarrow (Az, z) = 0 \;\; \forall z \in M^+$. On raisonne donc comme dans 1°) pour montrer que $M^+ \subset \operatorname{Ker} A$. ∎

__Rq__: on a montrer que $\forall A \in K(H)$ il existe une base orthonormale (φ^n) de H, composée de vecteurs propres de A, c.à.d.

$\forall x \in H$: $x = \sum\limits_n c_n \varphi^n$ et $Ax = \sum\limits_n c_n \lambda_n \varphi^n$.
↳ certains $\lambda_n = 0$.

__Démo__: Prenez (φ^n) construits là-dessus et complétez-les par une base orthonormale (ξ^n) de $\operatorname{Ker} A$.