Le théorème de Arzelà-Ascoli

But: trouver un critère pour compacité dans $\mathcal{C}(M)$ où M est un esp. métr. compact.

Def: Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(M)$ une famille de fonctions et $f \in \mathcal{F}$.

a) f est appelé uniformément continue, si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in M : d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

(comparer avec continuité:

$$\forall x \in M \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_{x,\varepsilon} : \forall y \in M : d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

b) $\mathcal{F}$ est appelé uniformément équicontinue si en plus de l'uniformité de la continuité pour tt $f \in \mathcal{F}$, le δ ne dépend même pas du choix de $f \in \mathcal{F}$!

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall f \in \mathcal{F} \; \forall x, y \in M : d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Théorème (Arzela-Ascoli)

Soit (M, d) un espace métrique compact et $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(M)$ ($\mathcal{C}(M)$ étant muni avec la norme sup $\|\cdot\|_\infty$ comme d'hab.)

Si $\mathcal{F}$ a les propriétés
- a) $\mathcal{F}$ borné
- b) $\mathcal{F}$ fermé
- c) $\mathcal{F}$ uniformément équicontinu

Alors $\mathcal{F}$ est compact dans $\mathcal{C}(M)$.

dém : 1) remarquons que M est séparable :

Pour tout $\varepsilon > 0$, $M \subset \bigcup_{m \in M} \{x \in M : d(x,m) < \varepsilon\}$

et par compacité $\exists\ m_1^{(\varepsilon)}, \dots, m_{N(\varepsilon)}^{(\varepsilon)}$ t.q. $M \subset \bigcup_{i=1}^{N} \{x : d(x, m_i) < \varepsilon\}$

L'ensemble $\{ m_k^{(1/n)}$ t.q. $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq N_{1/n} \}$

est donc dénombrable et dense.

2) Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{F}$
et $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ une partie dense de M (voir point 1)

Puisque $\mathcal{F}$ est borné, $\big(f_n(x_1)\big)_n$ est borné dans $\mathbb{K}$
(ici, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).

Ainsi, il existe une sous-suite extraite
$\left(f_{\pi_1(n)}\right)_n$ t.q. $f_{\pi_1(n)}(x_1)$ converge.

Ensuite, $\left(f_{\pi_1(n)}(x_2)\right)_n$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$,

il existe donc une ss-suite extraite $f_{\pi_2(n)}$ t.q.
$\left(f_{\pi_2(n)}(x_2)\right)_n$ converge.

Remarquons que $f_{\pi_2(n)}(x_1)$ converge puisque
π_2 est une ss-suite de π_1 !

On procède récursivement pour trouver des ss-suites
π_k t.q.

$\left(f_{\pi_k(n)}(x_j)\right)_n$ converge pour tt $1 \leq j \leq k$.

Ainsi, $f_{\sigma(n)} \stackrel{\text{déf}}{=} f_{\pi_n(n)}$ (la suite "diagonale") a la propriété que $\left(f_{\sigma(n)}(x_i)\right)_n$ converge pour $\underline{tt}$ $i \in \mathbb{N}$.

3) On va utiliser l'équicontinuité de $\mathcal{F}$ pour montrer la convergence uniforme de $f_{\sigma(n)}$.
Pour cela, montrons que $(f_{\sigma(n)})$ est de Cauchy par rapport à la norme sup $\|\cdot\|_\infty$:

Soit $\varepsilon > 0$ et δ selon (c) de l'hypothèse.
On peut recouvrir M avec un nombre fini (disons p) δ-boules $U_j = \{x : d(x, m_j) < \frac{\delta}{2}\}$ $(j = 1, \dots, p)$.

Toute boule U_j contient un x_n de la suite dense $(x_n)_n$, disons $x_{\ell_j} \in U_j$.

Choisissons $N_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\left| f_{\sigma(n)}(x_{\ell_j}) - f_{\sigma(m)}(x_{\ell_j}) \right| \leq \varepsilon \qquad \forall\, n, m \geq N_0$$

et pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$. Ceci est possible puisque $\left(f_{\sigma(n)}(x_i)\right)_n$ converge pour tt $i \in \mathbb{N}$. (voir 2).

Soit $x \in M$. Forcément, il y a un k t.q. $x \in U_k$, donc $d(x, x_{\ell_k}) < \delta$, par l'inégalité triangulaire :

$$d(x, x_{\ell_k}) \leq d(x, m_k) + d(m_k, x_{\ell_k}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Ainsi, par (c) : $\left| f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(x_{\ell_k}) \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

On obtient

$$\begin{aligned}
\left| f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(m)}(x) \right| \leq\ & \left| f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(x_{\ell_k}) \right| \\
& + \left| f_{\sigma(n)}(x_{\ell_k}) - f_{\sigma(m)}(x_{\ell_k}) \right| \\
& + \left| f_{\sigma(m)}(x_{\ell_k}) - f_{\sigma(m)}(x) \right| \leq 3\varepsilon \ !
\end{aligned}$$

Donc $\| f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(m)} \|_\infty \leq 3\varepsilon$ pour $n, m \geq N_0$.

$(f_{\sigma(n)})$ est donc suite de Cauchy, $(\mathcal{C}(K))$ étant complet elle converge. Par (b), $\mathcal{F}$ est fermé, la limite appartient donc à $\mathcal{F}$.

Puisque tte suite de $\mathcal{F}$ admet une ss-suite extraite convergente, $\mathcal{F}$ est compact

$\blacksquare$

<u>Rem</u> : Comment vérifier (c) ?

Le plus simple (de loin) est de montrer que $\mathcal{F}$ est unif. Lipschitz !
Ceci est plus fort que unif. équicontinue, mais en pratique la différence est négligeable.

(c') $\exists\, C > 0 : \forall f \in \mathcal{F} : \| f' \|_\infty \leq C$

implique (c) par

$$| f(x) - f(y) | \leq \| f' \|_\infty \, | x - y |$$

et donc $\delta = \cancel{\dfrac{\varepsilon}{\| f' \|_\infty}} \; \dfrac{\varepsilon}{C}$ convient !