Il s'agit de démontrer le théorème de Peano suivant:

Théorème: Soit f une fonction continue et borné sur $[a,b]\times\mathbb{R}^n$ et soit $x_0 \in [a,b]$. Alors le problème de valeur initiale

$$(*) \qquad \begin{cases} y'(t) &= f(y(t)), \qquad t \in [a,b] \\ y(x_0) &= y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

possède au moins une solution.

Les parties cursives ne sont pas à démonter. La norme $\|\cdot\|$ désigne la norme choisi sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1 Considérer $y'(x) = 1 + y(x)^2, y(0) = 0$. Démontrer que la solution n'existe pas sur tout $[0,2]\times\mathbb{R}$. Quelle hypothèse du théorème n'est pas satisfait?

Démonstration du théorème: *Soit $\epsilon > 0$ fixé. On construit une fonction polygonale appelé y_ϵ de la manière suivante: Soit $p_1(x) = y_0 + m_0(x - x_0)$ où $m_0 = f(x_0, y_0)$. On pose*

$$x_1 = \sup\{x \in [x_0, b] \ t.q. \ \forall\xi[x_0, x] : \ \|m_0 - f(\xi, p_1(\xi))\| \le \epsilon\}.$$

Exercice 2 Démotrer que $x_1 > x_0$.

Si $x_1 = b$ la procédure de construction de y_ϵ est fini et on pose $y_\epsilon = p_1$. Sinon ajoute une fonction linéaire sur sur un certain intrevalle $[x_1, x_2]$. Pour cela on pose $m_1 = f(x_1, p_1(x_1))$ et définit la fonction $p_2(x) = p_1(x_1) + m_2(x - x_1)$ sur $[x_1, b]$. Comme dans la première étappe on obtient

$$x_2 = \sup\{x \in [x_1, b] \ t.q. \ \forall\xi[x_1, x] : \ \|m_1 - f(\xi, p_1(\xi))\| \le \epsilon\}.$$

Cette procedure est recursivement appliqué et définit des suites (x_n), (m_n) et (y_n) avec $y_n = p_n(x_n)$.

Exercice 3 Démontrer que la suite (x_n) est strictement croissant.

On va que démontrer que $x_n = b$ pour un $n \in \mathbb{N}$. On pose après $y_\epsilon(x) = p_k(x)$ sur $[x_k, x_{k+1}]$ et la fonction est bien défini et continue sur $[x_0, b]$. Pour atteindre ce but on raisonne par absurde comme suit:

Exercice 4 Démontrer que la suite (x_n) converge. *Appleons $\bar{x}$ sa limite.*

Exercice 5 Appliquez le théorème fondamental du calcul intégral à la fonction y_ϵ restreint à $[x_0, x_n]$ pour démontrer que la suite (y_n) est une suite de Cauchy. *On appelle $\bar{y}$ sa limite.*

Exercice 6 Montrer que $\epsilon = \|m_k - f(x_{k+1}, y_{k+1})\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\|f(x_k, y_k) - f(x_{k+1}, y_{k+1})\| \to 0$ quand $k \to +\infty$. En déduire une contradiction.

On sait donc que $y_\epsilon(x) = p_k(x)$ si $x \in [x_k, x_{k+1}]$ est une fonction continue sur $[x_0, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On pose

$$\mathcal{F} = \{y_\epsilon :\ \epsilon > 0\} \subset C([a, b], \mathbb{R}^n),$$

et on va démontrer que $\mathcal{F}$ est uniformément borné et uniformément équicontinue. Pour cela on remarque que $y_\epsilon(x_0) = y_0$ indépendamment de $\epsilon > 0$.

Exercice 7 Appliquez le théorème fondamental du calcul intégral à la fonction y_ϵ pour démontrer que y_ϵ est Lipschitz-continue avec constante $M = \sup_{(t,x)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n} \|f(t, x)\|$. *Cette constante étant indépendant de $\epsilon > 0$ entraîne l'équicontinuité uniforme de $\mathcal{F}$.*

Exercice 8 Utiliser la Lipschitz-contiuité de y_ϵ pour démontrer que $y_\epsilon = (y_\epsilon - y_0) + y_0$ est uniformément borné.

Exercice 9 Le choix $\epsilon_j = \frac{1}{j}$ permet de trouver une une suite de fonctions polygonales $(y_j) \subset C([x_0, b], \mathbb{R}^n)$ d'après la procédure en haut. Démontrer qu'elle possède une sous-suite extraite $y_{\varphi(j)}$ qui converge uniformément. Appelons y la limite. Démontrer que y est continue.

Exercice 10 Voir que

$$\begin{aligned}
&\left\| y(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi \right\| \\
= &\left\| y(x) - y_{\varphi(j)}(x) - \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi)) - y'_{\varphi(j)}(\xi)\, d\xi \right\| \\
\leq &\left\| y(x) - y_{\varphi(j)}(x) \right\| + \int_{x_0}^{x} \left\| f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, y_{\varphi(j)}(\xi)) \right\| d\xi + \int_{x_0}^{x} \left\| f(\xi, y_{\varphi(j)}(\xi)) - y'_{\varphi(j)}(\xi) \right\| d\xi.
\end{aligned}$$

Exercice 11 En passant $j \to +\infty$ en déduire que

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi.$$

Exercice 12 Conclure que y satisfait le problème de valeur initial $(*)$.