SCOLARITÉ ET DE LA VIE ÉTUDIANTE — DIRECTION DE LA — UNIVERSITÉ BORDEAUX I Sciences Technologies — LICENCE

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2007 /2008
PREMIÈRE SESSION D'AUTOMNE

ETAPE : L2 **UE MHT302**
Épreuve Analyse 2
Date : 4 Janvier 2008
Heure : .. Heures *Durée :* 3 Heures
Épreuve de Monsieur : Charpentier Philippe
Tous Documents Interdits

Département Licence

Barême indicatif :

Exercice I

1. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=\frac{x^2+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.
   (a) Montrer que f est continue.
   (b) f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$? Est-elle différentiable en $(0,0)$?
2. Soit $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y)=\frac{x^3+\sin(y^3)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $g(0,0)=0$.
   (a) Montrer que g est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et déterminer sa différentielle $dg(x,y)$ en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   (b) Montrer que g est différentiable en $(0,0)$ et déterminer $dg(0,0)$.
   (c) g est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (d) Soit $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $h(x,y)=g(x,y)+\sin x+\sin y$.
      i. Montrer que h est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
      ii. Exprimer $dh(0,0)$.
      iii. Calculer $\|dh(0,0)\|$ (norme opérateur, $\mathbb{R}^2$ étant muni de la norme euclidienne).

Exercice II

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soient $u:\Omega\to]0,+\infty[$ et $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

1. Justifier que $F=f\circ u$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ puis $\Delta F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, le laplacien de F, en fonction des dérivées de f et des dérivées partielles de u.
3. On suppose, dans cette question que Ω est convexe, que $f''(t)\neq 0$, $\forall t\in]0,+\infty[$ et que Δu est identiquement nulle. Montrer que ΔF est identiquement nulle si et seulement si u est une fonction constante.
4. On suppose dans cette question que $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et que $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=\|(x,y)\|$ (norme euclidienne).
   (a) Exprimer la différentielle de u en tout point de Ω et vérifier que u est de classe $\mathscr{C}^2$.
   (b) Montrer que, pour tout $(x,y)\in\Omega$, $\Delta F(x,y)=f''(\|(x,y)\|)+\frac{1}{\|(x,y)\|}f'(\|(x,y)\|)$.
   (c) On suppose ΔF identiquement nulle. Déduire de la question précédente une expression simple de F (*indication* : on rappelle que si $g:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ est dérivable et vérifie, $\forall t>0$, $g'(t)+\frac{1}{t}g(t)=0$ alors il existe une constante C telle que $g(t)=\frac{C}{t}$).

Exercice III

Soit $\varphi :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ définie par $\varphi(u,v)=\left(\frac{u}{v},u+v\right)$.

1. Montrer que φ est bijective, déterminer φ^{-1} et montrer que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$.
2. Soit $f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On pose $F=f\circ\varphi$.
   (a) Exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$ de F en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f.
   (b) On suppose que $(1+x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Déduire de la question précédente qu'il existe une fonction $\psi :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ telle que $f(x,y)=\psi\left(\frac{y}{1+x}\right)$, $(x,y)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Exercice IV

Pour $x=(x_1,\ldots,x_n)$ et $y=(y_1,\ldots,y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on note $B(x,y)=\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_i y_i$ le produit scalaire euclidien des vecteurs x et y et $\|x\|$ la norme euclidienne de x.

1. Montrer que B est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ et exprimer sa différentielle au point (x,y).
2. Soient u et v deux fonctions différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $f : x\to\langle u(x),v(x)\rangle$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et exprimer sa différentielle au point (x,y).
3. Soit u une fonction différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $g : x\to\|u(x)\|^2$.
   (a) Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et que $dg(x)\bullet h=2\langle u(x),du(x)\bullet h\rangle$.
   (b) On suppose de plus maintenant que g admet un extremum local en un point x_0.
      i. Que peut-on dire de $dg(x_0)$?
      ii. Montrer que si $du(x_0)$ est injective alors $u(x_0)=0$.

FIN