Semestre 4, Année 2012-2013 SESSION 1

UE MA4021 : Intégration et équations différentielles

Date : 13 Mai 2013, 14h00-17h00 Durée : 3h00

Polycopié de cours autorisé, à l'exclusion de tout autre document.

Exercice 1

1. Soit $a > 0$. Dessiner le domaine D_a du plan défini par :

$$D_a := \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \,;\, \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{a},\ x + y \leq a\}.$$

2. Calculer la surface du domaine D_a.

Exercice 2

1. Dessinez le domaine D du plan défini par :

$$D := \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \,;\, 1 \leq x + y \leq 2,\ 3y - x \geq 0,\ x - 2y \leq 0\}.$$

2. Soit a un nombre réel. Vérifier que [1]

$$\iint_D e^{-x}\, e^{-y}\, x^{a-1} y^{-a}\, dxdy = \frac{e-1}{e^2} \int_{1/3}^{1/2} \frac{u^{-a}}{u+1}\, du.$$

3. Vérifier que la fonction

$$a \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{1/3}^{1/2} \frac{u^{a-1}}{u+1}\, du$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa fonction dérivée sous la forme d'une intégrale fonction du paramètre a.

Exercice 3

1. Soit a un nombre réel positif. On note Σ_a la surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0,1] \longmapsto \begin{pmatrix} a\cosh(z/a)\, \cos\theta \\ a\cosh(z/a)\, \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

1. Il y avait ici une erreur dans la formule (rectifiée trop tard à l'examen) : c'est u^{-a} et non u^{a-1} sous l'intégrale. Je prendrai juste en compte en corrigeant l'idée du changement de variables $u = y/x$, $v = x + y$.

où la fonction cosh est définie par $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$. Pourquoi cette surface est-elle une surface de révolution autour de l'axe $z'Oz$? On complète la surface Σ_a en lui adjoignant les deux disques horizontaux

$$\begin{aligned} D_0 &:= \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 \leq a^2,\ z = 0\} \\ D_1 &:= \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 \leq a^2 \cosh^2(1/a),\ z = 1\}\,. \end{aligned}$$

Représenter le domaine borné U_a de $\mathbb{R}^3$ limité par la surface Σ_a ainsi complétée par les deux disques horizontaux D_0 et D_1.

2. Calculer, en un point (x, y, z) du bord de U_a (on distinguera le cas où ce point est dans Σ_a du cas où ce point est dans l'union des deux disques horizontaux) le vecteur unitaire normal au bord de U_a en ce point, dirigé vers l'extérieur de U_a (lorsque $(x, y, z) \in \Sigma_a$, on exprimera ce vecteur normal en fonction des valeurs des paramètres (θ, z) spécifiant la position du point (x, y, z)).
3. Calculer le flux sortant du champ de vecteurs

$$\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

au travers du bord de U_a.

4. Rappeler l'énoncé de la formule de Stokes pour un domaine borné de l'espace (formulation de Green-Ostrogradski ou encore de la divergence) et déduire du calcul de flux effectué à la question **3** la valeur du volume du domaine U_a.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle du premier ordre (du type *équation de Bernoulli*)

$$t\,y'(t) + 2\,y(t) = -(t^3 \cos t)\,y^2(t) \qquad (*)$$

Soit $t_0 > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de déterminer, avec son intervalle ouvert de définition $I \subset]0, +\infty[$, l'unique solution maximale

$$y\ : t \in I \subset]0, +\infty[\mapsto y(t)$$

de l'EDO $(*)$, de classe C^1 sur son intervalle ouvert de définition I (contenant t_0), telle que de plus $y(t_0) = y_0$.

1. L'équation $(*)$ est-elle une équation différentielle linéaire du premier ordre ?

2. Déterminer un changement de fonction inconnue $y \to z$ qui permette de ramener la résolution de $(*)$ à celle d'une EDO de la forme :

$$z'(t) = A(t)\, z(t) + B(t) \qquad (**)$$

(où A et B sont des fonctions que l'on précisera).

3. Soit $z_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de $(**)$ telle que $z(t_0) = z_0$.
4. Déduire de la question **3** l'expression exacte de la solution maximale $y : I \subset]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de $(*)$ telle que $y(t_0) = y_0$ (on distinguera les cas $y_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$). Quel est l'intervalle de définition de cette fonction y ?

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle du second ordre sur $\mathbb{R}$ (à coefficients constants, mais avec second membre) :

$$y''(t) + 2\, y'(t) + 2\, y(t) = \sin(at)\, e^{-t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \qquad (\dagger)$$

1. Déterminer toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'équation différentielle homogène :

$$y''(t) + 2\, y'(t) + 2\, y(t) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \qquad (\dagger\dagger)$$

(on cherchera à déterminer une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de l'EDO $(\dagger\dagger)$ après avoir précisé quelle est la dimension de ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

2. Soit λ un nombre complexe différent de $-1 \pm i$. Déterminer (en la cherchant sous la forme $t \mapsto c_\lambda\, e^{\lambda t}$, avec $c_\lambda \in \mathbb{C}$ constante convenable) une solution particulière à valeurs complexes de l'EDO

$$y''(t) + 2\, y'(t) + 2\, y(t) = e^{\lambda t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

En déduire, dans le cas où $a \neq \pm 1$, une solution particulière

$$y_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

de l'équation $(\dagger)$ (*remarquer pour cela que* $\sin(at)\, e^{-t} = \mathrm{Im}\,(e^{(-1+ai)t})$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$).

3. Soit $\lambda = -1 \pm i$ et $u_\lambda : t \in \mathbb{R} \longmapsto t\, e^{\lambda t}$. Calculer la fonction

$$t \mapsto u_\lambda''(t) + 2\, u_\lambda'(t) + 2\, u_\lambda(t)\,.$$

En déduire une solution particulière y_1 de l'EDO $(\dagger)$ lorsque $a = 1$ ainsi qu'une solution particulière y_{-1} de l'EDO $(\dagger)$ lorsque $a = -1$.

4. Soit $a = 1$. Déterminer la solution y de l'équation $(\dagger)$ telle que $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$.