Semestre 4, Année 2012-2013 SESSION 1

UE MA4021 : Intégration et équations différentielles

Date : 13 Mai 2013, 14h00-17h00 Durée : 3h00

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Exercice 1

1. *Soit $a > 0$. Dessiner le domaine D_a du plan défini par :*

$$D_a := \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2\,;\, \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{a},\ x + y \leq a\}.$$

Pour représenter le domaine D_a, il est commode de poser $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$, et de représenter d'abord le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par les conditions :

$$u \geq 0,\ v \geq 0,\ u + v \geq a,\ u^2 + v^2 \leq a. \qquad (*)$$

Le domaine $\{u \geq 0,\ v \geq 0,\ u^2 + v^2 \leq a\}$ est l'intersection du disque $D(0, \sqrt{a})$ avec le premier quadrant. Le domaine $\{u + v \geq a\}$ est le demi-plan situé au dessus de la droite passant par les points $(\sqrt{a}, 0)$ et $(0, \sqrt{a})$. Le domaine Δ de $\mathbb{R}^2$ défini par les conditions $(*)$ est donc le sous-ensemble du quart de disque $\{u \geq 0,\ v \geq 0,\ u^2 + v^2 \leq a\}$ situé au dessus de la corde joignant les points $(\sqrt{a}, 0)$ et $(0, \sqrt{a})$. Le domaine D_a s'obtient en prenant l'image de Δ par l'application $(u, v) \mapsto (u^2, v^2)$: l'arc de cercle joignant les points $(\sqrt{a}, 0)$ et $(0, \sqrt{a})$ est transformé en le segment joignant les points $(a, 0)$ et $(0, a)$, tandis que la corde joignant les deux points $(\sqrt{a}, 0)$ et $(0, \sqrt{a})$ est transformée en un arc de conique [1] joignant les points $(a, 0)$ et $(0, a)$ et situé (dans le premier quadrant) sous le segment joignant $(a, 0)$ à $(0, a)$ (d'équation $y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$, où $x \in [0, a]$). Voir le figure ci-dessous.

1. Une conique est une courbe définie par une équation cartésienne polynomiale en (x, y) de degré total égal à 2 ; les coniques sont les paires de droites sécantes, les paraboles, les ellipses ou les hyperboles (ce sont en fait les quatre types de sections planes d'un cône de révolution) ; il s'agit ici d'un arc d'une branche d'hyperbole (d'équation globale $(y - a - x)^2 = 4ax$), comme le tracé sous `Maple` avec `implicitplot` le confirme.

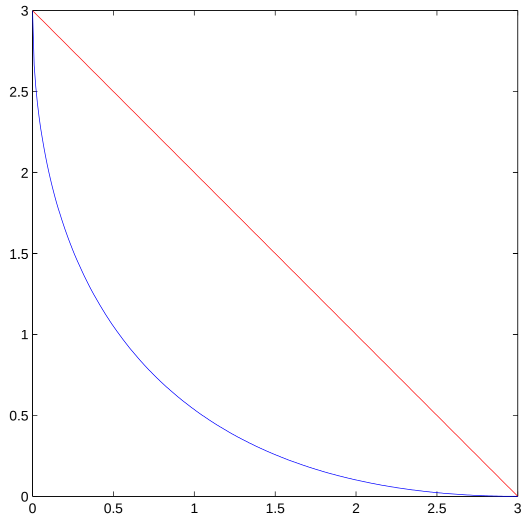

FIGURE 1 – Le domaine D_a (avec ici $a = 3$)

2. *Calculer la surface du domaine D_a.* On a, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli :

$$
\begin{aligned}
\text{Aire}(D_a) &= \iint_{D_a} dxdy = \int_0^a \Big(\int_{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}^{a-x} dy \Big)\, dx \\
&= \int_0^a \Big(a - x - (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 \Big)\, dx \\
&= 2 \int_0^a (\sqrt{a}\sqrt{x} - x)\, dx = 2\Big(\sqrt{a} \times \frac{a^{3/2}}{3/2} - a^2/2 \Big) = a^2/3.
\end{aligned}
$$

Exercice 2

1. *Dessinez le domaine D du plan défini par :*

$$D := \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \,;\, 1 \leq x + y \leq 2,\ 3y - x \geq 0,\ x - 2y \leq 0\}.$$

Le domaine D est le polygone borné délimité par les quatre droites représentées sur la figure ci dessous.

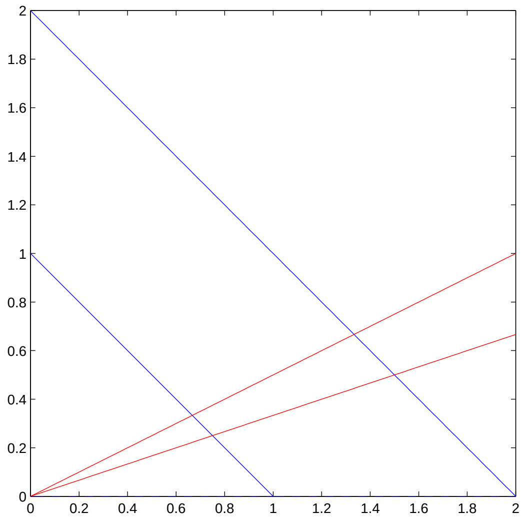

FIGURE 2 – Le domaine D

2. *Soit a un nombre réel. Vérifier que*

$$\iint_D e^{-x}\, e^{-y}\, x^{a-1} y^{-a}\, dxdy = \frac{e-1}{e^2} \int_{1/3}^{1/2} \frac{u^{-a}}{u+1}\, du.$$

On effectue le changement de variables consistant à poser $u = y/x$ et $v = x + y$. L'application $(u, v) \to (x, y)$ est en effet un C^1-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans lui-même : en effet, les conditions

$$u > 0,\ v > 0,\ y/x = u,\ x + y = v$$

sont équivalentes aux conditions :

$$x > 0,\ y > 0,\ x = \frac{x+y}{1+u} = \frac{v}{1+u},\ y = ux = \frac{uv}{1+u}.$$

Le jacobien de la transformation

$$(u, v) \mapsto (x, y)$$

vaut :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} (u, v) &= \frac{1}{\begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} (x(u, v), y(u, v))} \\
&= \frac{x^2(u, v)}{x(u, v) + y(u, v)} = \frac{x(u, v)}{1+u}.
\end{aligned}$$

Il faut donc remplacer $dx\,dy/x$ par $du\,dv/(1+u)$ dans le changement de variables. On a donc, en utilisant la formule de changement de variables (Théorème 1.3 du cours), puis le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{-x}\,e^{-y}\,x^{a-1}y^{-a}\,dxdy &= \iint_D e^{-x}\,e^{-y}\,(y/x)^{-a}\,\frac{dxdy}{x} \\
&= \int\int_{\substack{1/3\le u\le 1/2 \\ 1\le v\le 2}} e^{-v}u^{-a}\,\frac{dudv}{1+u} \\
&= \int_1^2 e^{-v}\,dv \times \int_{1/3}^{1/2} \frac{u^{-a}}{1+u}\,du \\
&= \Big[-e^{-v}\Big]_1^2 \times \int_{1/3}^{1/2} \frac{u^{-a}}{1+u}\,du \\
&= \frac{e-1}{e^2}\int_{1/3}^{1/2} \frac{u^{-a}}{u+1}\,du.
\end{aligned}$$

3. *Vérifier*[2] *que la fonction*

$$a\in\mathbb{R}\longmapsto \int_{1/3}^{1/2} \frac{u^{a-1}}{u+1}\,du$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa fonction dérivée sous la forme d'une intégrale fonction du paramètre a.

On peut ici appliquer le théorème de dérivation des intégrales fonction d'un paramètre (ici a) (section 1.4.2 du cours). En effet, pour tout $u\in[1/3,1/2]$, la fonction

$$a\in\mathbb{R}\mapsto \frac{u^{a-1}}{1+u} = \exp((a-1)\log u))\times\frac{1}{1+u}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$a\in\mathbb{R}\mapsto \log u\,\exp((a-1)\log u))\times\frac{1}{1+u} = \log u\,\frac{u^{a-1}}{1+u}\,.$$

Pour tout $R>0$, la fonction continue

$$(u,a)\in[1/3,1/2]\times[-R,R]\longmapsto \log u\times\frac{u^{a-1}}{1+u}$$

2. J'ai laissé ici u^{a-1} comme dans l'énoncé ; il aurait été plus cohérent de prendre u^{-a} une fois l'erreur rectifiée à la question précédente. Rien ne change toutefois au niveau de l'argument.

est dominée en valeur absolue sur $[1/3, 1/2] \times [-R, R]$ par une constante $M(R)$. La clause (1.40) du cours est donc ici remplie et la fonction

$$a \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{1/3}^{1/2} \frac{u^{a-1}}{u+1}\, du$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sa fonction dérivée étant la fonction

$$a \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{1/3}^{1/2} \log u \times \frac{u^{a-1}}{u+1}\, du$$

Exercice 3

1. *Soit a un nombre réel positif. On note Σ_a la surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par*

$$(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1] \longmapsto \begin{pmatrix} a\cosh(z/a)\, \cos\theta \\ a\cosh(z/a)\, \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

où la fonction cosh est définie par $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$. Pourquoi cette surface est-elle une surface de révolution autour de l'axe $z'Oz$? On complète la surface Σ_a en lui adjoignant les deux disques horizontaux

$$\begin{aligned} D_0 &:= \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 \leq a^2,\ z = 0\} \\ D_1 &:= \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 \leq a^2 \cosh^2(1/a),\ z = 1\}. \end{aligned}$$

Représenter le domaine borné U_a de $\mathbb{R}^3$ limité par la surface Σ_a ainsi complétée par les deux disques horizontaux D_0 et D_1.

En coordonnées cylindriques (r, θ, z) (*cf.* l'exemple 1.15 des notes, l'axe étant l'axe $z'Oz$, r désignant la distance à cet axe, θ la longitude mesurée depuis le plan xOz et z l'altitude), la surface est donnée comme

$$\Sigma_a := \{(r, \theta, z)\,;\, r = a\cosh(z/a),\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [0, 1]\}.$$

Comme l'équation cartésienne s'exprime sous la forme $r = f_a(z)$, où f_a désigne une fonction positive, il s'agit bien d'une surface de révolution autour de l'axe par rapport auquel est effectué le repérage cylindrique, en l'occurrence ici l'axe $z'Oz$ [3]. Pour représenter Σ_a, il suffit de tracer dans le plan yOz (par exemple), la courbe d'équation

$$y = f_a(z) = a\cosh(z/a), \quad z \in [0, 1],$$

3. La surface d'équation $r = a\cosh(z/a)$, où $z \in \mathbb{R}$ (en coordonnées cylindriques) est appelée *caténoïde* (ici de révolution autour de l'axe $z'Oz$), $a > 0$ désignant ici un paramètre. La portion de surface Σ_a proposée ici ($z \in [0, 1]$) est donc une « tranche » d'un tel caténoïde. La courbe qui engendre cette surface par rotation est une *chainette* du plan

(c'est donc une portion de *chainette*, la courbe que modélise par exemple les caténaires d'une ligne ferroviaire, car il s'agit de la forme qu'épouse un fil pesant suspendu entre deux extrémités fixes de même cote) puis de faire tourner la courbe (ainsi tracée dans le plan yOz) en faisant tourner ce plan autour de l'axe de révolution $z'Oz$. Les deux disques D_0 (dans le plan $z = 0$) et D_1 (dans le plan $z = 1$) ferment bien la surface respectivement aux altitudes $z = 0$ et $z = 1$ puisque les rayons de ces disques sont respectivement $r_0 = a = a\cosh(0) = f_a(0)$ et $r_1 = a\cosh(1/a) = f_a(1)$. On a représenté la chainette sur la figure 3 ci-dessous (pour $a = .5$). La surface de révolution Σ_a est obtenue en faisant tourner le plan yOz autour de son axe vertical ; c'est la nappe de révolution générée par la courbe ainsi en rotation autour de l'axe vertical.

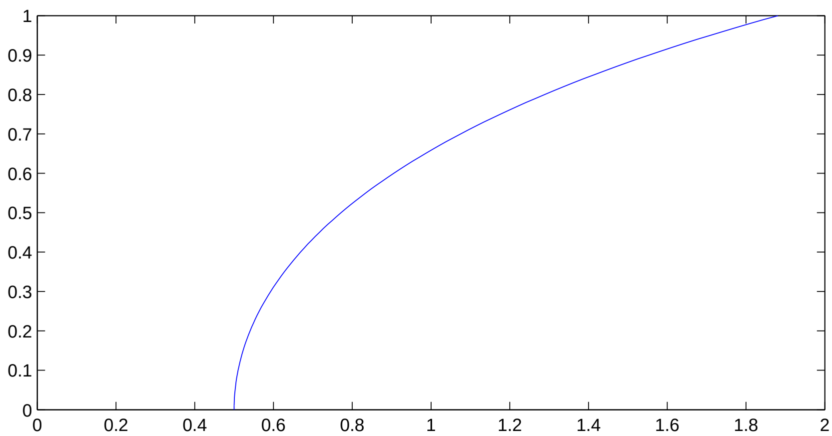

FIGURE 3 – Le tracé de la chainette $y = f_{1/2}(z)$ dans le plan yOz, $0 \leq z \leq 1$

Le domaine U_a (pour $a = .5$) a été représenté (de manière « transparente [4] ») sur la figure 4 ci-dessous (on a figuré en blanc sa projection sur le plan $x0y$, à savoir le disque $D(0, f_{1/2}(1))$, projection du disque D_1) :

---

yOz. Pour réaliser cette portion de caténoïde Σ_a, il suffit d'immerger deux cercles (l'un de rayon $a = f_a(0) = a\cosh(0/a)$, l'autre de rayon $f_a(1) = a\cosh(1/a)$, dans un bain d'eau savonneuse (en les gardant centrés au même point, disons l'origine de $\mathbb{R}^3$), puis de percer la bulle centrale afin de décoller les deux cercles. La surface (dite « minimale ») alors matérialisée par le film de savon est la surface Σ_a dès que les cercles se trouvent séparés d'une distance verticale égale à 1.

4. La figure a été pour ce corrigé réalisée avec le logiciel de calcul scientifique `MATLAB`, mais bien sûr, on n'exigeait dans le problème qu'un tracé grossier à la main.

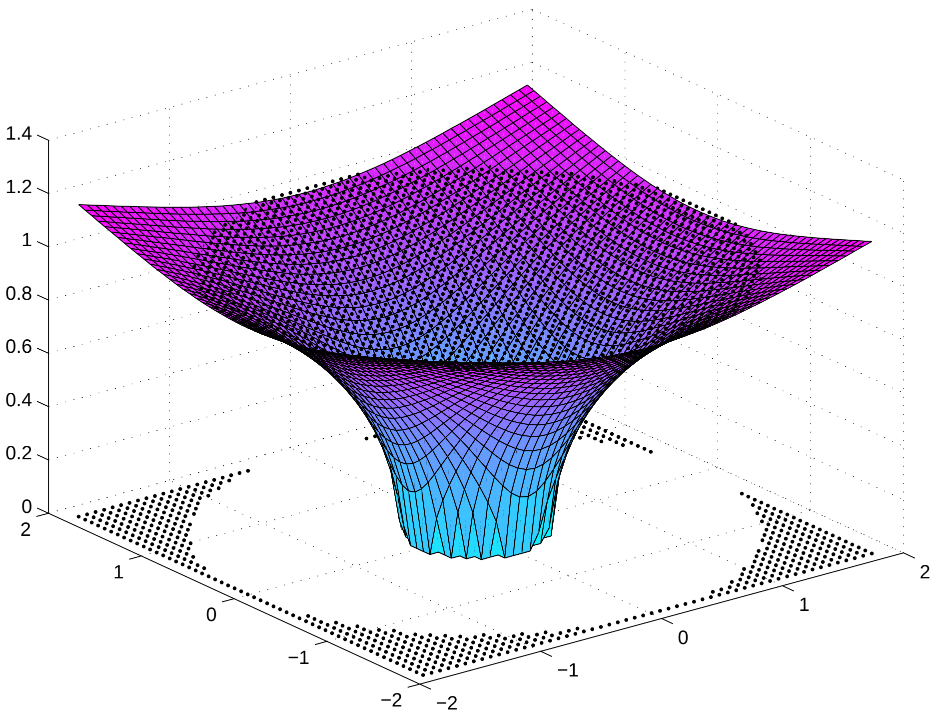

FIGURE 4 – Le domaine $U_{1/2}$ (section de caténoïde plein)

2. *Calculer, en un point (x, y, z) du bord de U_a (on distinguera le cas où ce point est dans Σ_a du cas où ce point est dans l'union des deux disques horizontaux) le vecteur unitaire normal au bord de U_a en ce point, dirigé vers l'extérieur de U_a (lorsque $(x, y, z) \in \Sigma_a$, on exprimera ce vecteur normal en fonction des valeurs des paramètres (θ, z) spécifiant la position du point (x, y, z)).*

   On a, pour tout $(\theta, z) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} a\cosh(z/a)\,\cos\theta \\ a\cosh(z/a)\,\sin\theta \\ z \end{pmatrix} = a\cosh(z/a) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

   D'autre part :

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} a\cosh(z/a)\,\cos\theta \\ a\cosh(z/a)\,\sin\theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(z/a)\,\cos\theta \\ \sinh(z/a)\,\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix},$$

   où

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Le produit extérieur de ces deux vecteurs (dans cet ordre, la dérivée par rapport à θ, suivie de la dérivée par rapport à z) est égal à

$$a\cosh(z/a)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ -\sinh(z/a)\end{pmatrix}$$

Ce vecteur est un vecteur de norme $a\cosh^2(z/a)$ puisque

$$1+\sinh^2(z/a)=\cosh^2(z/a).$$

Comme la dernière composante à une coordonnée strictement négative et que la courbe d'équation $y=f_a(z)$ présente une branche parabolique dans la direction du demi-axe $0y$ (la concavité est tournée « vers le bas »), le vecteur

$$a\cosh(z/a)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ -\sinh(z/a)\end{pmatrix}$$

(lorque $(x,y,z)=(a\cosh(z/a)\cos\theta, a\cosh(z/a)\sin\theta, z)$ est le point de Σ_a repéré par les paramètres (θ,z)) pointe bien vers l'extérieur du domaine U_a. Le vecteur normal extérieur unitaire à U_a en ce point est donc le vecteur :

$$\frac{1}{\cosh(z/a)}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ -\sinh(z/a)\end{pmatrix}.$$

Lorsque le point (x,y,z) est un point de D_0, le vecteur normal extérieur unitaire à U_a est $-\vec{k}$, tandis que c'est $\vec{k}$ lorsque (x,y,z) est un point de D_1.

3. *Calculer le flux sortant du champ de vecteurs*

$$\vec{F}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

au travers du bord de U_a.

Le flux sortant (de U_a) du champ de vecteurs au travers du disque D_0 est égal à

$$-\pi a^2\times\langle\vec{F}(x,y,0),\vec{k}\rangle=0.$$

Le flux sortant (de U_a) du champ de vecteurs au travers du disque D_1 est égal à

$$\pi a^2\cosh^2(1/a)\times\langle\vec{F}(x,y,1),\vec{k}\rangle=\pi\,a^2\cosh^2(1/a).$$

Le flux sortant de U_a au travers de Σ_a est égal à l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} a\,\cosh(z/a)\,\cos\theta \\ a\cosh(z/a)\,\sin\theta \\ z \end{pmatrix}, a\cosh(z/a)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -\sinh(z/a) \end{pmatrix} \right\rangle dz\,d\theta,$$

c'est-à-dire à

$$2\pi a \int_0^1 \Big(a\cosh^2(z/a) - z\cosh(z/a)\sinh(z/a)\Big)\,dz.$$

Or on a

$$\int_0^1 a\cosh^2(z/a)\,dz = \frac{a}{4}\int_0^1 (e^{2z/a} + e^{-2z/a} + 2)\,dz$$

et (en utilisant une intégration par parties) :

$$\begin{aligned} \int_0^1 z\cosh(z/a)\sinh(z/a)\,dz &= \frac{1}{4}\int_0^1 z\,(e^{2z/a} - e^{-2z/a})\,dz \\ &= \frac{a}{8}(e^{2/a}+e^{-2/a}) - \frac{a}{8}\int_0^1 (e^{2z/a}+e^{-2z/a})\,dz. \end{aligned}$$

Le calcul du flux sortant de U_a au travers de la portion de surface Σ_a vaut donc :

$$\begin{aligned} &\frac{3\pi a^2}{4}\int_0^1 (e^{2z/a}+e^{-2z/a})\,dz + \pi\,a^2 - \frac{\pi a^2}{4}(e^{2/a}+e^{-2/a}) \\ = \;& \pi\,a^2\Big(\frac{3a-2}{8}\,e^{2/a} - \frac{3a+2}{8}\,e^{-2/a} + 1\Big). \end{aligned}$$

En atteste la vérification de ce calcul effectuée avec l'aide du logiciel `MAPLE` :

```
> f:= x -> 2*Pi*a*(a*(cosh(x/a))^2 - x*sinh(x/a)*cosh(x/a));
> int(f(x),x=0..1);

(1/8)*Pi*a^2*(3*a*exp(4/a)+8*exp(2/a)-3*a-2*exp(4/a)-2)
       *exp(-2/a)
```

Le calcul du flux demandé s'obtient donc en ajoutant à cette contribution (celle correspondant à la portion de surface Σ_a) celle correspondant au disque D_1, soit $\pi\,a^2(e^{2/a}+e^{-2/a}+2)/4$. Au final, le flux demandé vaut :

$$\Phi = \pi\,a^2\Big(\frac{3a}{8}\,(e^{2/a}+e^{-2/a}) + \frac{3}{2}\Big) = \frac{3\pi\,a^2}{4}(a\cosh(2/a)+2).$$

Notons qu'il s'agit d'un nombre positif.

4. *Rappeler l'énoncé de la formule de Stokes pour un domaine borné de l'espace (formulation de Green-Ostrogradski ou encore de la divergence) et déduire du calcul de flux effectué à la question* **3** *la valeur du volume du domaine U_a.*
   C'est le Théorème 1.9 du cours que l'on demande de rappeler ici : ≪ *le flux sortant d'un champ de vecteurs $\vec{F}$ au travers de la frontière d'un domaine volumique borné U est égal à l'intégrale de volume sur U de la divergence de ce champ de vecteurs* ≫. Dans notre cas, la divergence du champ de vecteurs est constante et égale à 3. Le flux Φ est donc, d'après la formule de Green-Ostrogradski, égal à trois fois le volume de U_a. On a donc
$$\mathrm{vol}(U_a) = \frac{\pi\, a^2}{4}(a \cosh(2/a) + 2)\,.$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle du premier ordre (du type équation de Bernoulli)
$$t\, y'(t) + 2\, y(t) = -(t^3\, \cos t)\, y^2(t). \qquad (*)$$
Soit $t_0 > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de déterminer, avec son intervalle ouvert de définition $I \subset]0, +\infty[$, l'unique solution maximale
$$y\ : t \in I \subset]0, +\infty[\mapsto y(t)$$
de l'EDO $(*)$, de classe C^1 sur son intervalle ouvert de définition I (contenant t_0), telle que de plus $y(t_0) = y_0$.

1. *L'équation $(*)$ est-elle une équation différentielle linéaire du premier ordre ?* Non, car elle s'exprime sous forme résoluble en y' sous la forme
$$y'(t) = -\frac{2}{t}\, y(t) - (t^2 \cos t)\, y^2(t)$$
   et que la fonction
$$(t, Y) \mapsto F(t, Y) = -\frac{2}{t}\, Y - (t^2 \cos t)\, Y^2$$
   figurant au membre de droite est quadratique en Y, et non affine en cette variable.
2. *Déterminer un changement de fonction inconnue $y \to z$ qui permette de ramener la résolution de $(*)$ à celle d'une EDO de la forme :*
$$z'(t) = A(t)\, z(t) + B(t) \qquad (**)$$

(où A et B sont des fonctions que l'on précisera).

Comme il s'agit (on l'a d'ailleurs rappelé dans l'énoncé) d'une équation de Bernoulli (avec d'ailleurs ici $\alpha = 2$, si l'on reprend les notations de la section 2.4.3 du cours), le changement de fonction inconnue $y \to z$ à opérer ici est $y \to z = y^{1-2} = y^{-1}$ (pourvu que $y_0 \neq 0$). Tant que $y(t)$ reste non nul, on a $y'(t) = -z'(t)/z^2(t)$ et l'EDO $(*)$ devient

$$-\frac{z'(t)}{z^2(t)} = -\frac{2}{t}\,\frac{1}{z(t)} - t^2\,\cos t\,\frac{1}{z^2(t)},$$

soit :

$$z'(t) = \frac{2}{t}\,z(t) + t^2\,\cos t = A(t)z(t) + B(t)$$

avec $A(t) = 2/t$ et $B(t) = t^2\,\cos t$.

3. *Soit $z_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de $(**)$ telle que $z(t_0) = z_0$.*

   L'équation linéaire homogène est $z' = A(t)\,z(t) = (2/t) \times z(t)$ et a pour solution générale
   $$t \in]0, +\infty[\longmapsto z(t) = C\,t^2$$
   lorsque l'espace des états est $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ (contenant le point (t_0, z_0) correspondant aux conditions initiales). La méthode de variation des constantes (pour la résolution de l'EDO non homogène) conduit à
   $$C'(t)\,t^2 = B(t) = t^2\,\cos t$$
   soit $C(t) = \sin t + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'EDO $(**)$ (lorsque l'espace des états est $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$) est donc :
   $$t \in]0, +\infty[\longmapsto (\sin t + c)\,t^2, \ \ c \in \mathbb{R}.$$
   Pour que $z(t_0) = z_0$, il faut ajuster la constante réelle c de manière à ce que
   $$(\sin t_0 + c)\,t_0^2 = z_0,$$
   soit
   $$c = c(t_0, z_0) = \frac{z_0 - t_0^2\,\sin t_0}{t_0^2} = -\sin t_0 + \frac{z_0}{t_0^2}.$$

4. *Déduire de la question **3** l'expression de la solution maximale $y : I \to \mathbb{R}$ de $(*)$ (avec $I \subset]0, +\infty[$) telle que $y(t_0) = y_0$ (on distinguera les cas $y_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$). Quel est l'intervalle de définition de cette fonction y ?*

Si $y_0 = 0$, la fonction identiquement nulle sur $]0,+\infty[$ est l'unique solution maximale de l'EDO

$$y'(t) = -\frac{2}{t}\, y(t) - t^2 \, \cos t \, y^2(t).$$

Si $y_0 \neq 0$, la solution de l'EDO $(*)$ telle que $y(t_0) = y_0$ est donnée au voisinage de t_0 par

$$y(t) = \frac{1}{(\sin t + c(t_0, z_0))\, t^2}$$

avec

$$c(t_0, z_0) = -\sin t_0 + \frac{z_0}{t_0^2} = -\sin t_0 + \frac{1}{y_0\, t_0^2}.$$

Son intervalle de vie est le plus petit intervalle ouvert contenant t_0 et sur lequel la fonction

$$t \mapsto \sin t - \sin t_0 + \frac{1}{y_0\, t_0^2}$$

ne s'annule pas. Cet intervalle de vie est donc $]\alpha, \beta[$, où α et β sont les deux points les plus proches de t_0 tels que

$$\sin\alpha = \sin\beta = \sin t_0 - \frac{1}{y_0\, t_0^2}.$$

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle du second ordre sur $\mathbb{R}$ (à coefficients constants, mais avec second membre) :

$$y''(t) + 2\, y'(t) + 2\, y(t) = \sin(at)\, e^{-t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \qquad (\dagger)$$

1. *Déterminer toutes les fonctions $y\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'équation différentielle homogène :*

$$y''(t) + 2\, y'(t) + 2\, y(t) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \qquad (\dagger\dagger)$$

(on cherchera à déterminer une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de l'EDO $(\dagger\dagger)$ *après avoir précisé quelle est la dimension de ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel).*

D'après l'étude des EDO linéaires (section 2.4.2 du polycopié, voir aussi le cours de MISMI [5], section 3.9.3), le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions

5. `http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursmismi.pdf`

de l'EDO homogène (††) est de dimension 2 : en effet, étant donné un point $t_0 \in \mathbb{R}$ (arbitraire) et un couple (y_0, y_0') de nombres réels, il existe une et une seule solution $y\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, solution de (††), et telle que de plus $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$. Pour trouver une base de solutions, on cherche les racines de l'équation caractéristique :

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

Les deux racines (complexes conjuguées) sont ici $z = -1 \pm i$ (le discriminant réduit du trinôme valant $-1 = i^2$). Les deux fonctions

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-t}\, e^{\pm it}$$

sont des fonctions $\mathbb{R}$-linéairement indépendantes, solutions de l'EDO (††), mais malheureusement à valeurs complexes ; une base de solutions (à valeurs réelles cette fois) est fournie en prenant leur partie réelle commune $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-t} \cos t$ et leur partie imaginaire (commune au signe près) $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-t} \sin t$.

2. *Soit λ un nombre complexe différent de $-1 \pm i$. Déterminer (en la cherchant sous la forme $t \mapsto c_\lambda\, e^{\lambda t}$, avec $c_\lambda \in \mathbb{C}$ constante convenable) une solution particulière à valeurs complexes de l'EDO*

$$y''(t) + 2\, y'(t) + 2\, y(t) = e^{\lambda t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

En déduire, dans le cas où $a \neq \pm 1$, une solution particulière

$$y_a\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

de l'équation (†) (remarquer pour cela que $\sin(at)\, e^{-t} = \mathrm{Im}\,(e^{(-1+ai)t})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).

L'action de l'opérateur différentiel $d^2/dt^2 + 2\, d/dt + 2\,\mathrm{Id}$ sur $t \mapsto e^{\lambda t}$ donne

$$\Big(d^2/dt^2 + 2\, d/dt + 2\,\mathrm{Id}\Big)[e^{\lambda t}] = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)\, e^{\lambda t}.$$

Si l'on choisit

$$c_\lambda = \frac{1}{\lambda^2 + 2\lambda + 2},$$

la fonction $t \mapsto c_\lambda\, e^{\lambda t}$ est solution de l'EDO

$$y''(t) + 2\, y'(t) + 2\, y(t) = e^{\lambda t}.$$

En particulier, si $\lambda = -1 + ia$ avec $a \neq \pm 1$, on a

$$\lambda^2 + 2\,\lambda + 2 = (1 - a^2 - 2ia) + 2(-1 + ia) + 2 = 1 - a^2 \neq 0\,.$$

La fonction
$$w_{-1+ia}\ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{e^{-t}\, e^{iat}}{1-a^2}$$
est donc solution de l'EDO :
$$y''(t) + 2\, y'(t) + 2\, y(t) = e^{-t}\, e^{iat}.$$
En prenant la partie imaginaire des deux membres de cette identité, on constate que la partie imaginaire de w_{-1+ia}, soit
$$y_a\ : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{e^{-t}\, \sin(at)}{1-a^2}$$
est une solution particulière de l'EDO (†).

3. *Soit $\lambda = -1 \pm i$ et $u_\lambda\ : t \in \mathbb{R} \longmapsto t\, e^{\lambda t}$. Calculer la fonction*
$$t \mapsto u_\lambda''(t) + 2\, u_\lambda'(t) + 2\, u_\lambda(t)\, .$$
En déduire une solution particulière y_1 de l'EDO (†) lorsque $a = 1$ ainsi qu'une solution particulière y_{-1} de l'EDO (†) lorsque $a = -1$.
Un calcul immédiat montre que, si $\lambda = -1 \pm i$ (et donc $\lambda^2 + 2\,\lambda + 2 = 0$), alors
$$u_\lambda''(t) + 2\, u_\lambda'(t) + 2\, u_\lambda(t) = 2\,(\lambda+1)\, e^{\lambda t} = \pm 2i\, e^{(-1\pm i)\, t}.$$
Si $\lambda = -1 + i$, on trouve en particulier
$$u_{-1+i}''(t) + 2\, u_{-1+i}'(t) + 2\, u_{-1+i}(t) = 2\, e^{-t}(-\sin t + i\, \cos t).$$
En prenant la partie réelle des deux membres de cette identité, on voit que la fonction
$$t \mapsto y_1(t) = -\frac{1}{2}\, \mathrm{Re}\, (u_{-1+i}(t)) = -\frac{t\, \cos t}{2}\, e^{-t}$$
est donc une solution particulière de l'EDO (†) lorsque $a = 1$. La fonction $y_{-1} = -y_1$ est une solution particulière de l'EDO (†) lorsque $a = -1$.

4. *Soit $a = 1$. Déterminer la solution y de l'équation (†) telle que $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$.*
La solution générale de l'EDO (†) lorsque $a = 1$ est la somme de la solution particulière y_1 et de la solution générale de l'EDO (††) lorsque

$a = 1$. Cette solution générale s'écrit donc (du fait des résultats établis aux questions **1** et **3**) :

$$y(t) = \Big((\alpha - t/2)\,\cos t + \beta\,\sin t\Big)\,e^{-t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

Comme $y(0) = 1$, on a $\alpha = 1$. Pour que $y(1) = 0$, il convient de choisir β tel que

$$\beta\,\sin 1 + \frac{\cos 1}{2} = 0,$$

soit

$$\beta = -\frac{\text{cotan} 1}{2}\,.$$