Semestre 4, Année 2012-2013 SESSION 2

UE MA4021 : Intégration et équations différentielles

Date : 24 Juin 2013, 14h00-17h00 Durée : 3h00

Polycopié de cours autorisé, à l'exclusion de tout autre document.

Exercice 1

1. Soit $a > 0$. Dessiner le domaine D_a du plan défini par :

$$D_a := \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2\,;\, x^{1/3} + y^{1/3} \geq a^{1/3},\ x + y \leq a\}.$$

2. Calculer la surface du domaine D_a.

Exercice 2

1. Dessinez le domaine D du plan défini par :

$$D := \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2\,;\, 1 \leq x + y \leq 3,\ x - 3y \geq 0,\ x - 5y \leq 0\}.$$

2. Soit ω un nombre réel. Vérifier que

$$\iint_D \frac{1}{x+y} \sin\Big(\omega\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big) \frac{dxdy}{x} = \ln(3) \int_{1/5}^{1/3} \frac{\sin(\omega t)}{t+1}\, dt.$$

3. Vérifier que la fonction

$$F\ : \omega \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{1/5}^{1/3} \frac{\sin(\omega t)}{t+1}\, dt$$

est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et montrer que

$$F''(\omega) = -F(\omega) + \int_{1/5}^{1/3} (1-t)\, \sin(\omega t)\, dt.$$

4. Former l'équation différentielle linéaire du second ordre dont F est solution en calculant explicitement l'intégrale figurant au membre de droite de la formule établie à la question **3**.
5. Exprimer en termes de cette fonction F et des paramètres nécessaires la solution générale (réelle) de l'EDO linéaire du second ordre obtenue à la question **4**.

Exercice 3

1. Soit $a > 0$. On note Σ_a la surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par
$$(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, a] \longmapsto \begin{pmatrix} z^2 \cos\theta \\ z^2 \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$
Pourquoi cette surface est-elle une surface de révolution autour d'un axe ? Préciser lequel. On complète la surface Σ_a en lui adjoignant le disque horizontal
$$D_a := \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 \leq a^4,\ z = a\}\,.$$
Représenter le domaine borné U_a de $\mathbb{R}^3$ limité par la surface Σ_a ainsi complétée par le disque horizontal D_a.
2. Calculer, en un point (x, y, z) du bord de U_a (on distinguera le cas où ce point est dans Σ_a du cas où ce point est dans l'union des deux disques horizontaux) le vecteur unitaire normal au bord de U_a en ce point, dirigé vers l'extérieur de U_a (lorsque $(x, y, z) \in \Sigma_a$, on exprimera ce vecteur normal en fonction des valeurs des paramètres (θ, z) spécifiant la position du point (x, y, z)).
3. Calculer le flux sortant du champ de vecteurs
$$\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
au travers du bord de U_a.
4. Rappeler l'énoncé de la formule de Stokes pour un domaine borné de l'espace (formulation de Green-Ostrogradski ou encore de la divergence) et déduire du calcul de flux effectué à la question **3** la valeur du volume du domaine U_a.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle du premier ordre
$$t\,y'(t) + y(t) = t\,y^3(t) \qquad (*)$$
Soit $t_0 > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de déterminer, avec son intervalle ouvert de définition $I \subset]0, +\infty[$, l'unique solution maximale
$$y\ : t \in I \subset]0, +\infty[\mapsto y(t)$$
de l'EDO $(*)$, de classe C^1 sur son intervalle ouvert de définition I (contenant t_0), telle que de plus $y(t_0) = y_0$.

1. L'équation $(*)$ est-elle une équation différentielle linéaire du premier ordre ? De quel type est cette équation ?
2. Déterminer un changement de fonction inconnue $y \to z$ qui permette de ramener la résolution de $(*)$ à celle d'une EDO de la forme :

$$z'(t) = A(t)\,z(t) + B(t) \tag{$**$}$$

   (où A et B sont des fonctions que l'on précisera).
3. Soit $z_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de $(**)$ telle que $z(t_0) = z_0$.
4. Déduire de la question **3** l'expression exacte de la solution maximale $y\ : I \subset]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de $(*)$ telle que $y(t_0) = y_0$ (on distinguera les cas $y_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$). Quel est l'intervalle de définition de cette fonction y ?

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle du second ordre sur $\mathbb{R}$ (à coefficients constants, mais avec second membre) :

$$y''(t) - 5\,y'(t) + 6\,y(t) = t\,e^t \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \tag{$\dagger$}$$

1. Déterminer toutes les fonctions $y\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'équation différentielle homogène :

$$y''(t) - 5\,y'(t) + 6\,y(t) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \tag{$\dagger\dagger$}$$

   (on cherchera à déterminer une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de l'EDO $(\dagger\dagger)$ après avoir précisé quelle est la dimension de ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel).
2. Déterminer une solution particulière de l'EDO $(\dagger)$ (on la cherchera sous la forme $t \mapsto z(t)\,e^t$, où z désigne une fonction inconnue).
3. Déterminer la solution y de l'équation $(\dagger)$ qui satisfasse aux contraintes $y(0) = 1$ et $y(\ln(2)) = 0$.