Semestre 4, Année 2012-2013 SESSION 2

UE MA4021 : Intégration et équations différentielles

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Exercice 1

1. *Soit $a > 0$. Dessiner le domaine D_a du plan défini par :*

$$D_a := \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2\,;\, x^{1/3} + y^{1/3} \geq a^{1/3},\ x + y \leq a\}.$$

Lorsque $x \geq 0$ et $y \geq 0$, la condition $x^{1/3} + y^{1/3} \geq a^{1/3}$ équivaut à $y^{1/3} \geq a^{1/3} - x^{1/3}$. Lorsque de plus on impose $x + y \leq a$, le nombre $a^{1/3} - x^{1/3}$ est positif ou nul et la paire de conditions imposées pour définir D_a équivaut aux conditions :

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ (a^{1/3} - x^{1/3})^3 \leq y \leq a - x.$$

Pour représenter ce domaine D_a, il convient donc de représenter le graphe des deux fonctions $x \mapsto (a^{1/3} - x^{1/3})^3$ et $x \mapsto a - x$ au dessus du segment $[0, a]$, ce qui est fait sur la figure 1 ci-dessous lorsque $a = 3$.

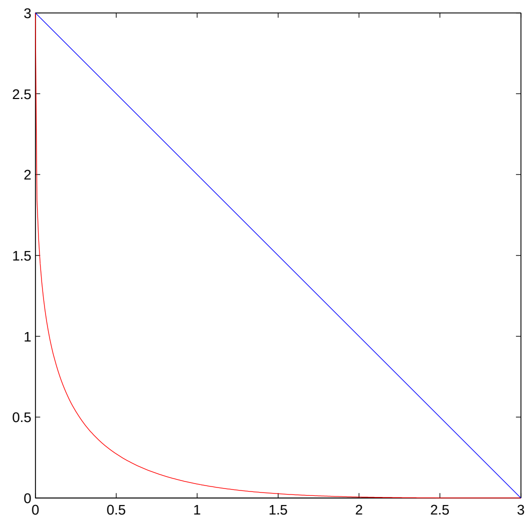

FIGURE 1 – Le domaine D_a de l'exercice **1** (avec ici $a = 3$)

2. *Calculer la surface du domaine D_a.* L'aire de D_a vaut, compte tenu de

la figure et du théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\text{aire}(D_a) &= \int_0^a \Big(\int_{(a^{1/3}-x^{1/3})^3}^{a-x} dy \Big)\, dx \\
&= \int_0^a \Big((a-x) - (a^{1/3}-x^{1/3})^3 \Big)\, dx \\
&= \Big[\frac{(a-x)^2}{2} \Big]_a^0 - \int_0^{a^{1/3}} (a^{1/3}-u)^3 \, d(u^3) \\
&= \frac{a^2}{2} - 3 \int_0^{a^{1/3}} (a^{1/3}-u)^3 \, u^2 \, du = \frac{9a^2}{20}
\end{aligned}$$

(on a utilisé la formule du changement de variables avec $x \leftrightarrow u^3$ pour passer de la ligne 2 à la ligne 3).

Exercice 2

1. *Dessinez le domaine D du plan défini par :*

$$D := \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \,;\, 1 \leq x+y \leq 3,\ x-3y \geq 0,\ x-5y \leq 0\}.$$

Il suffit de tracer les quatre droites limitant le domaine D, c'est-à-dire les droites d'équation $y = 1-x$, $y = 3-x$, $y = x/3$, $y = x/5$. Le domaine D est alors l'intérieur du polygone borné dont la frontière est incluse dans l'union de ces quatre droites, voir la figure 2.

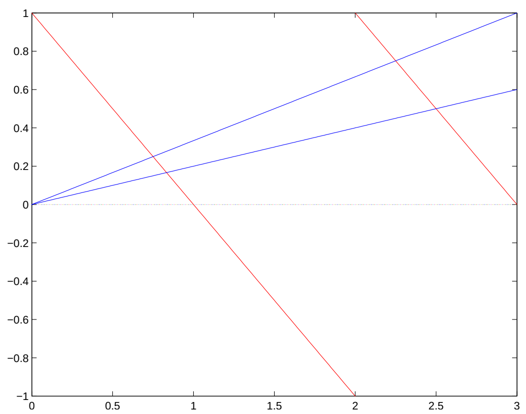

FIGURE 2 – Le domaine D de l'exercice **2**

2. *Soit ω un nombre réel. Vérifier que*

$$\iint_D \frac{1}{x+y} \sin\Big(\omega\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big) \frac{dxdy}{x} = \ln(3) \int_{1/5}^{1/3} \frac{\sin(\omega t)}{t+1}\, dt.$$

On effectue le changement de variables consistant à poser $t = y/x$ et $v = x + y$. L'application $(t, v) \to (x, y)$ est en effet un C^1-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans lui-même : en effet, les conditions

$$t > 0,\ v > 0,\ y/x = t,\ x + y = v$$

sont équivalentes aux conditions :

$$x > 0,\ y > 0,\ x = \frac{x+y}{1+t} = \frac{v}{1+t},\ y = tx = \frac{tv}{1+t}.$$

Le jacobien de la transformation

$$(t, v) \mapsto (x, y)$$

vaut :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \partial x/\partial t & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial t & \partial y/\partial v \end{vmatrix} (t, v) &= \frac{1}{\begin{vmatrix} \partial t/\partial x & \partial t/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} (x(t, v), y(t, v))} \\
&= \frac{x^2(t, v)}{x(t, v) + y(t, v)} = \frac{x(t, v)}{1+t}.
\end{aligned}$$

Il faut donc remplacer $dx\,dy/x$ par $dt\,dv/(1+t)$ dans le changement de variables. On a donc, en utilisant la formule de changement de variables (Théorème 1.3 du cours), puis le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{x+y} \sin\Big(\omega\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big) dxdy &= \int\int_{\substack{1/5 \leq t \leq 1/3 \\ 1 \leq v \leq 3}} \frac{\sin(\omega t)}{v} \frac{dtdv}{1+t} \\
&= \int_1^3 \frac{dv}{v} \times \int_{1/5}^{1/3} \frac{\sin(\omega t)}{1+t}\, dt \\
&= \Big[\ln v\Big]_1^3 \times \int_{1/5}^{1/3} \frac{\sin(\omega t)}{1+t}\, dt \\
&= \ln(3) \int_{1/5}^{1/3} \frac{\sin(\omega t)}{t+1}\, dt.
\end{aligned}$$

3. *Vérifier que la fonction*

$$F\ : \omega \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{1/5}^{1/3} \frac{\sin(\omega t)}{t+1}\, dt$$

est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et montrer que

$$F''(\omega) = -F(\omega) + \int_{1/5}^{1/3} (1-t)\,\sin(\omega t)\,dt.$$

Soit $t \in [1/5, 1/3]$. La fonction

$$\omega \mapsto \sin(\omega t)$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées sont $t \mapsto (-1)^k\, t^{2k+1} \cos(\omega t)$ lorsque l'ordre de dérivation $2k+1$ est impair et $t \mapsto (-1)^k t^{2k} \sin(\omega t)$ lorsque l'ordre de dérivation est pair. La dérivée d'ordre p est majorée en tout cas par $t \mapsto t^p$ sur $[1/5, 1/3]$. Comme

$$\int_{1/5}^{1/3} \frac{t^p}{1+t}\,dt < \infty \qquad \forall\, p \in \mathbb{N},$$

le théorème de dérivation des intégrales fonction d'un paramètre (ici ω) (section 1.4.2 du cours) s'applique et l'on peut affirmer que F est de classe C^2 (même en fait C^∞) et que :

$$\begin{aligned}
\forall\, \omega \in \mathbb{R},\ F''(\omega) &= -\int_{1/5}^{1/3} \frac{t^2 \sin(\omega t)}{1+t}\,dt \\
&= -\int_{1/5}^{1/3} \frac{(t^2-1+1)\,\sin(\omega t)}{1+t}\,dt \\
&= -F(\omega) + \int_{1/5}^{1/3} (1-t)\,\sin(\omega t)\,dt.
\end{aligned}$$

4. *Former l'équation différentielle linéaire du second ordre dont F est solution en calculant explicitement l'intégrale figurant au membre de droite de la formule établie à la question* **3**. Une intégration par parties immédiate fournit :

$$\int_{1/5}^{1/3} (1-t)\,\sin(\omega t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{15}\,\frac{\omega\big(12\cos(\omega/5) - 10\cos(\omega/3)\big) + 15(\sin(\omega/5) - \sin(\omega/3))}{\omega^2}.$$

On note que le membre de droite de cette égalité est une fonction de ω de classe C^∞ partout (y compris en $\omega = 0$). On note pour simplifier cette fonction Φ. l'EDO du second ordre dont F est solution est donc

$$y''(\omega) + y(\omega) = \Phi(\omega) \qquad \forall\, \omega \in \mathbb{R}.$$

5. *Exprimer en fonction de cette fonction F et des paramètres nécessaires la solution générale (réelle) de l'EDO linéaire du second ordre obtenue à la question* **4**. La solution générale de l'EDO du second ordre homogène et à coefficients constants $y'' + y \equiv 0$ est

$$\omega \longmapsto \alpha\,\cos(\omega) + \beta\,\sin(\omega)$$

puisque les racines de l'équation caractéristique $X^2 + 1 = 0$ sont $\pm i$. La solution générale de l'EDO $y'' + y \equiv \Phi$ s'obtient donc en ajoutant à cette solution générale une solution particulière de cette EDO, par exemple la fonction F. La solution générale de l'EDO $y'' + y \equiv \Phi$ est donc

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto F(\omega) + \alpha\,\cos(\omega) + \beta\,\sin(\omega), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

1. *Soit $a > 0$. On note Σ_a la surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par*

$$(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, a] \longmapsto \begin{pmatrix} z^2\,\cos\theta \\ z^2\,\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

Pourquoi cette surface est-elle une surface de révolution autour d'un axe ? Préciser lequel. On complète la surface Σ_a en lui adjoignant le disque horizontal

$$D_a := \{(x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 \leq a^4,\ z = a\}\,.$$

Représenter le domaine borné U_a de $\mathbb{R}^3$ limité par la surface Σ_a ainsi complétée par le disque horizontal D_a. En coordonnées cylindriques (r, θ, z) (*cf.* l'exemple 1.15 des notes, l'axe étant l'axe $z'Oz$, r désignant la distance à cet axe, θ la longitude mesurée depuis le plan xOz et z l'altitude), la surface est donnée comme

$$\Sigma_a := \{(r, \theta, z)\,;\, r = z^2, \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [0, a]\}.$$

Comme l'équation cartésienne s'exprime sous la forme $r = f(z)$, où f désigne une fonction positive, il s'agit bien d'une surface de révolution autour de l'axe par rapport auquel est effectué le repérage cylindrique, en l'occurrence ici l'axe $z'Oz$. La courbe que l'on met en révolution autour de l'axe $z'Oz$ est l'arc de parabole d'équation $x = z^2$, $z \in [0, a]$ dans le plan xOz. La section de cette surface Σ_a par le plan horizontal d'équation $z = a$ est le cercle de centre $(0, 0, a)$ et de rayon a^2 situé dans ce plan horizontal. En complétant Σ_a par le disque horizontal D_a, on réalise bien une surface fermée puisque l'intersection de Σ_a avec le plan horizontal d'équation $z = 0$ se réduit au point $(0, 0, 0)$. Voir la figure 3.

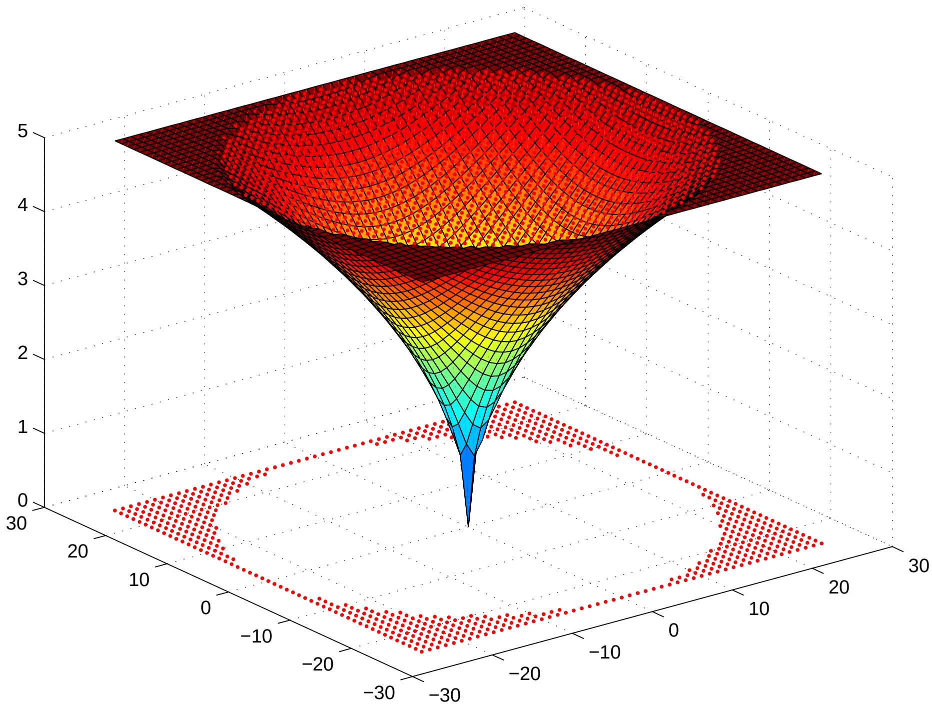

FIGURE 3 – Le domaine U_5 (section de paraboloïde plein)

2. *Calculer, en un point (x, y, z) du bord de U_a (on distinguera le cas où ce point est dans Σ_a du cas où ce point est dans l'union des deux disques horizontaux) le vecteur unitaire normal au bord de U_a en ce point, dirigé vers l'extérieur de U_a (lorsque $(x, y, z) \in \Sigma_a$, on exprimera ce vecteur normal en fonction des valeurs des paramètres (θ, z) spécifiant la position du point (x, y, z)).*

   Lorsque le point (x, y, z) est un point de D_a, le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur de U_a est le vecteur $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Supposons maintenant que (x, y, z) soit un point de Σ_a de paramètres (θ, z). On a, pour tout $(\theta, z) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} z^2 \cos \theta \\ z^2 \sin \theta \\ z \end{pmatrix} = z^2 \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'autre part :

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} z^2\,\cos\theta \\ z^2\,\sin\theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,z\,\cos\theta \\ 2\,z\,\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix},$$

Le produit extérieur de ces deux vecteurs (dans cet ordre, la dérivée par rapport à θ, suivie de la dérivée par rapport à z) est égal à

$$z^2\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -2\,z \end{pmatrix}$$

Ce vecteur est un vecteur de norme $z^2\sqrt{1+4\,z^2}$. Le vecteur unitaire demandé est donc

$$\frac{1}{\sqrt{1+4\,z^2}}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -2\,z \end{pmatrix}$$

En effet, comme la dernière composante à une coordonnée strictement négative et que la courbe d'équation $r = f(z)$ présente une branche parabolique dans la direction du demi-axe $0r$ (la concavité est tournée « vers le bas »), ce vecteur unitaire pointe bien vers l'extérieur de U_a.

3. *Calculer le flux sortant du champ de vecteurs*

$$\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

au travers du bord de U_a. Ce flux se calcule (d'après le cours et les calculs faits à la question **2**) comme la somme :

$$\begin{aligned} & \text{Aire}\,(D_a) \times a + \text{flux sortant au travers de}\,\Sigma_a \\ = \;& \pi a^5 + \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\langle z^2\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -2\,z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z^2\,\cos\theta \\ z^2\,\sin\theta \\ z \end{pmatrix} \right\rangle d\theta\,dz \\ = \;& \pi\,a^5 - \int_0^a \int_0^{2\pi} z^4\,d\theta\,dz = \frac{3\,\pi\,a^5}{5}. \end{aligned}$$

(on ajoute en effet le flux sortant au travers du disque horizontal D_a et le flux sortant au travers de la surface Σ_a).

4. *Rappeler l'énoncé de la formule de Stokes pour un domaine borné de l'espace (formulation de Green-Ostrogradski ou encore de la divergence)*

et déduire du calcul de flux effectué à la question **3** *la valeur du volume du domaine U_a.*
C'est le Théorème 1.9 du cours que l'on demande de rappeler ici : ≪ *le flux sortant d'un champ de vecteurs $\vec{F}$ au travers de la frontière d'un domaine volumique borné U est égal à l'intégrale de volume sur U de la divergence de ce champ de vecteurs* ≫. Dans notre cas, la divergence du champ de vecteurs est constante et égale à 3. Le flux Φ est donc, d'après la formule de Green-Ostrogradski, égal à trois fois le volume de U_a. On a donc

$$\mathrm{vol}(U_a) = \frac{\pi\, a^5}{5}.$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$t\, y'(t) + y(t) = t\, y^3(t) \qquad (*)$$

Soit $t_0 > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de déterminer, avec son intervalle ouvert de définition $I \subset]0, +\infty[$, l'unique solution maximale

$$y \ : t \in I \subset]0, +\infty[\mapsto y(t)$$

de l'EDO $(*)$, de classe C^1 sur son intervalle ouvert de définition I (contenant t_0), telle que de plus $y(t_0) = y_0$.

1. *L'équation $(*)$ est-elle une équation différentielle linéaire du premier ordre ? De quel type est cette équation ?* Ce n'est pas une EDO linéaire du fait de la présence du teme $t\, y^3(t)$. En revanche, il s'agit d'une équation de Bernoulli (avec $\alpha = 3$) car on peut l'écrire si l'on prend comme espace des états $U =]0, \infty[\times \mathbb{R}$ sous la forme
$$y'(t) = -\frac{y(t)}{t} + y^3(t).$$
2. *Déterminer un changement de fonction inconnue $y \to z$ qui permette de ramener la résolution de $(*)$ à celle d'une EDO de la forme :*
$$z'(t) = A(t)\, z(t) + B(t) \qquad (**)$$
(où A et B sont des fonctions que l'on précisera). Comme $\alpha = 3$, on sait que le changement de variables approprié consiste à poser $z = y^{1-3} = y^{-2}$. On trouve donc
$$z'(t) = -2\, \frac{y'(t)}{y^3(t)} = -2 + \frac{2}{t\, y^2(t)} = -2 + 2\, \frac{z(t)}{t}.$$
C'est une EDO (cette fois linéaire) de la forme voulue avec $A(t) = 2/t$ et $B(t) = -2$.

3. *Soit $z_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de $(**)$ telle que $z(t_0) = z_0$.* La solution générale de l'EDO sans second membre

$$z'(t) - 2\,\frac{z(t)}{t} \equiv 0$$

est

$$z(t) = C\,t^2, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

La méthode de variation des constantes donne ici

$$C'(t)\,t^2 = -2,$$

soit

$$C(t) = \frac{2}{t} + \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de l'EDO $(**)$ est donc

$$z(t) = 2\,t + \gamma\,t^2.$$

Pour que $z(t_0) = z_0$, il faut choisir

$$\gamma = \gamma(t_0, z_0) = \frac{z_0 - 2\,t_0}{t_0^2}.$$

4. *Déduire de la question **3** l'expression exacte de la solution maximale $y\ : I \subset]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de $(*)$ telle que $y(t_0) = y_0$ (on distinguera les cas $y_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$). Quel est l'intervalle de définition de cette fonction y ?* Si $y_0 = 0$, la fonction identiquement nulle sur $]0, +\infty[$ est (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, théorème 2.2 du cours) l'unique solution de l'EDO $(*)$ telle que $y(t_0) = 0$. Si $y_0 \neq 0$, on pose $z_0 = 1/y_0^2$. La solution y cherchée est la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{(2\,t + \gamma(t_0, z_0)\,t^2)^2}, \quad \gamma(t_0, z_0) = \frac{z_0 - 2\,t_0}{t_0^2}$$

(d'après le résultat établi à la question **3**). L'intervalle de vie de cette solution est le plus grand intervalle ouvert de $]0, +\infty[$ contenant t_0 et sur lequel t ne prend pas la valeur $-2/\gamma(t_0, z_0)$. On note que, du fait que $z_0 \neq 0$, on a toujours $\gamma(t_0, z_0) \neq -2/t_0$, *i.e.* $t_0 \neq -2/\gamma(t_0, z_0)$. Il convient de discuter.
   - dans le cas où $z_0 - 2t_0 = 1/y_0^2 - 2t_0 \geq 0$, cet intervalle est $]0, +\infty[$ tout entier car $-2/\gamma(t_0, z_0) \leq 0$ dans ce cas ;
   - dans le cas où $z_0 - 2t_0 > 0$, on a $\gamma(t_0, z_0) > -2/t_0$, *i.e.* $t_0 > -2/\gamma(t_0, z_0)$ et l'intervalle de vie de la solution est $]-2/\gamma(t_0, z_0), +\infty[$.

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle du second ordre sur $\mathbb{R}$ (à coefficients constants, mais avec second membre) :

$$y''(t) - 5\,y'(t) + 6\,y(t) = t\,e^t \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \qquad (\dagger)$$

1. *Déterminer toutes les fonctions $y\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de l'équation différentielle homogène :*

$$y''(t) - 5\,y'(t) + 6\,y(t) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \qquad (\dagger\dagger)$$

(on cherchera à déterminer une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de l'EDO $(\dagger\dagger)$ *après avoir précisé quelle est la dimension de ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel).* D'après l'étude des EDO linéaires (section 2.4.2 du polycopié, voir aussi le cours de MISMI[1], section 3.9.3), le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de l'EDO homogène $(\dagger\dagger)$ est de dimension 2 : en effet, étant donné un point $t_0 \in \mathbb{R}$ (arbitraire) et un couple (y_0, y_0') de nombres réels, il existe une et une seule solution $y\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, solution de $(\dagger\dagger)$, et telle que de plus $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$. Pour trouver une base de solutions, on cherche les racines de l'équation caractéristique :

$$z^2 - 5z + 6 = 0.$$

Les deux racines (ici réelles) sont $z = 2$ et $z = 3$ (le discriminant du trinôme valant 1). Les deux fonctions

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R} \mapsto e^{3t}$$

sont des fonctions $\mathbb{R}$-linéairement indépendantes, solutions de l'EDO $(\dagger\dagger)$. La solution générale de $(\dagger\dagger)$ (à valeurs réelles) est donc

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha\, e^{2t} + \beta\, e^{3t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. *Déterminer une solution particulière de l'EDO* $(\dagger)$ *(on la cherchera sous la forme $t \mapsto z(t)\, e^t$, où z désigne une fonction inconnue).* Soit D l'opérateur différentiel d/dt. On a

$$D[z(t)\, e^t] = (z(t) + z'(t))\, e^t, \quad D^2[z(t)e^t] = (z(t) + 2z'(t) + z''(t))\, e^t.$$

On a donc

$$(D^2 - 5D + 6)[z(t)e^t] = (z''(t) - 3\, z'(t) + 2z(t))\, e^t.$$

1. `http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursmismi.pdf`

Pour trouver une solution particulière de (†) de la forme $t \mapsto z(t)\, e^t$, il suffit de trouver une solution particulière $t \mapsto z(t)$ de l'EDO

$$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = t \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

On cherche cette solution sous la forme $t \mapsto at + b$, ce qui donne

$$-3a + 2(at + b) = t \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

soit, par identification $a = 1/2$ et $b = 3/4$. La solution particulière de l'EDO (†) ainsi trouvée est

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right) e^t.$$

3. *Déterminer la solution y de l'équation* (†) *qui satisfasse aux contraintes $y(0) = 1$ et $y(\ln(2)) = 0$.* La solution générale de l'EDO (†) est, d'après les résultats établis aux questions **1** et **2** :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha e^{2t} + \beta e^{3t} + \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right) e^t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Pour que cette solution satisfasse $y(0) = 1$, il faut que

$$\alpha + \beta + 3/4 = 1.$$

Pour que cette solution satisfasse $y(\ln(2)) = 0$, il faut que

$$4\alpha + 8\beta + 2\left(\frac{\ln(2)}{2} + \frac{3}{4}\right) = 0,$$

soit

$$\alpha + 2\beta + \frac{2\ln(2) + 3}{8} = 0.$$

On obtient

$$\beta = -\frac{2\ln(2) + 5}{8}, \quad \alpha = \frac{1}{4} - \beta = \frac{7 + 2\ln(2)}{8}.$$