Université de Bordeaux **2014-2015**
N1 MA3002 Analyse 2

Correction du Devoir Surveillé du 1/12/2014.

Documents non-autorisés, durée: 1h 20.

Exercice 1. *Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un domaine, et $f : O \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application.*

1. *Donner la définition de la dérivée partielle de f au point $x^0 \in O$.*
2. *Soit f différentiable au point $x^0 \in O$ (c.à.d., $f \in D(x^0)$). Donner les formules pour les dérivées partielles de f au point x^0 en fonction de $Df(x^0)$, la différentielle de f.*
3. *L'existence de toutes les dérivées partielle implique-t-elle la différentiabilité de l'application? Sa continuité? Justifiez votre réponse (cf. (*) ci-dessus).*
4. *Donner le critère d'appartenance de l'application f à la classe $C^1(O)$ en termes de ses dérivées partielles.*

Correction.

1. Soit $x^0 \in O$; la k-ième dérivée partielle de f au point x^0 est définie comme
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0 + te^k) - f(x^0)}{t} = D_{e^k} f(x^0),$$
où $(e^k)_{k=1,\dots,d}$ sont les vecteurs de base de $\mathbb{R}^d$. $D_{e^k} f(x^0)$ est la dérivée directionnelle de f au point x^0 en direction e^k.
2. Si $f \in D(x^0)$, on a aussi
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = Df(x^0) \cdot e^k.$$
3. L'existence des dérivées partielles en x^0 n'implique ni la différentiabilité de f en ce point ni même sa continuité. Voici l'exemple:
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \quad (x, y) \neq 0, \\ 0 & , \quad (x, y) = 0 \end{cases}$$
Cette fonction n'est pas continue (et donc pas différentiable) au point $x^0 = (0, 0)$. On constate pourtant que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
Il est possible de donner une fonction pour laquelle toutes les dérivées directionnelles en un point existent, mais la fonction n'y est pas différentiable (le point de référence est le $x^0 = (0, 0)$):
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & , \quad (x, y) \neq 0, \\ 0 & , \quad (x, y) = 0 \end{cases}$$

4. L'application $f : O \to \mathbb{R}^{d_1}$ appartient à la classe $C^1(O)$ ssi toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ existent et sont continues sur O.

Exercice 2. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une application donnée par la relation*

$$f(x, y) = e^{x+2y}.$$

1. *Calculer la différentielle* Df *en utilisant la définition. L'application* f *est-elle différentiable sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

   Indication: *observez que la relation familière*

   $$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

   peut s'écrire aussi comme $e^h = 1 + h + o(h)$, *où* $h \to 0$, *etc.*

2. *Calculer les dérivées partielles de* f. *Sont-elles continues? L'application* f *appartient-elle à la classe* C^1 *?*

3. *Donner la différentielle* Df *à l'aide des dérivées partielles calculées précédemment.*

4. *Les questions 1. et 3. de cet exercice donnent-elles le même résultat?*

Correction.

1. Re-écrivons l'indication donnée comme

   $$e^s = 1 + s + r(s),$$

   où le reste $r(s)$ possède la propriété $\lim_{s\to 0} |r(s)/s| = 0$.

   Soient $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h = (h_1, h_2)$ (et $||h|| \to 0$). Alors

   $$\begin{aligned} f(z+h) &= e^{x+h_1+2(y+h_2)} = e^{x+2y+(h_1+2h_2)} = e^{x+2y} \cdot e^{h_1+2h_2} \\ &= e^{x+2y}(1 + (h_1 + 2h_2) + r(h_1 + 2h_2)) \\ &= e^{x+2y} + e^{x+2y} \begin{bmatrix} 1, 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + R(h), \end{aligned}$$

   où $R(h) = r(h_1 + 2h_2)$ et, d'une manière évidente, on a $\lim_{h\to 0} |R(h)|/||h|| = 0$. La définition de la différentiabilité est donc vérifiée.

2. Calculons les dérivées partielles de l'application f en utilisant la formule pour la différentielle de l'application composée:

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = e^{x+2y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(z) = 2e^{x+2y}.$$

   Ces dérivées partielles sont continues (car composées des fonctions continues) sur tout $\mathbb{R}^2$. L'application f y est donc de la classe C^1 (et, par conséquent, différentiable).

3. Nous avons
$$Df(z)\cdot h = e^{x+2y}\left[\ 1,2\ \right]\cdot\left[\begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \end{array}\right].$$

4. Les questions 1. et 3. donnent bien sûr le même résultat.

Exercice 3. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. Démontrer que la fonction $\phi(x,y) = xy + x\,f(y/x)$ satisfait la relation*
$$x\frac{\partial\phi}{\partial x} + y\frac{\partial\phi}{\partial y} = xy + \phi.$$

Correction. Notons d'abord que les objets qui apparaissent dans l'exercice sont bien définis et différentiables (dérivables) à condition que $x \neq 0$. Nous avons alors:
$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x} &= y + f(y/x) + xf'(y/x)\cdot(-y/x^2) = y + f(y/x) - f'(y/x)\cdot(y/x),\\
\frac{\partial\phi}{\partial x} &= x + xf'(y/x)\cdot(1/x) = x + f'(y/x),\\
x\frac{\partial\phi}{\partial x} + y\frac{\partial\phi}{\partial y} &= (xy + xf(y/x) - f'(y/x)\cot y) + (xy + f'(y/x)\cdot y) = xy + \phi.
\end{aligned}$$

Exercice 4. *Soit*
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{3x^2+5y^2} & ,\quad (x,y)\neq 0 \\ 0 & ,\quad (x,y) = 0 \end{cases}.$$

1. *Prouvez que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *A l'aide du critère énoncé en cours, étudier l'appartenance de f à la classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.*

Indication: *le point $(x,y) = 0$ demande une étude particulière.*

Correction.

1. Posons $z = (x,y)\in\mathbb{R}^2$. Pour $(x,y)\neq 0$, la continuité de $f(x,y)$ est claire car la fonction est composée des fonctions continues et le dénominateur de f ne s'annule pas. Il reste donc d'étudier la continuité au voisinage du point $(0,0)$. Pour cela, notons que $|x| \leqslant ||z||$, $|y| \leqslant ||z||$ et $3x^2+5y^2 \geqslant 3||z||^2$. Par conséquent,
$$0 \leqslant \lim_{||z||\to 0} f(z) = \lim_{||z||\to 0}\frac{x^2y^2}{3x^2+5y^2} \leqslant \lim_{||z||\to 0}\frac{||z||^4}{3||z||^2} = \lim_{||z||\to 0}\frac{1}{3}||z||^2 = 0 = f(0,0),$$
et f est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

2. Supposons d'abord $z = (x, y) \neq (0, 0)$. Le calcul habituel (et standard) des dérivées partielles donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{10xy^4}{(3x^2 + 5y^2)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{6yx^4}{(3x^2 + 5y^2)^2)}.
\end{aligned}$$

Ces fonctions sont continues (car le dénominateur différent de zéro) sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0\}$.

Il reste d'étudier la différentiabilté de f au point $(0, 0)$. Il est facile de voir (par la définition des dérivées partielles), que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

D'autre part, le calcul analogue à celui de la question précédente (= l'exercice 4, q. 1) montre que

$$\lim_{||z|| \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(z) = 0, \quad \lim_{||z|| \to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont donc continues au point $(0, 0)$, et donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Par le critère énoncé à l'exercice 1, q. 4, nous obtenons que f est de la classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.